

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula (United Kingdom) д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я.О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko (United Kingdom), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, акад. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov (Sweden), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Sushansky (Poland), д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk (Chile), д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Futorny (Brazil), д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 10.01.13 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010 р.
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.2009 р.
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

М. Яременко Задача Коші для рівняння еволюційного типу з неперервною еліптичною матрицею в просторах Лебега.....	5
Г. Верьовкіна Інтерполяційні зображення певних класів випадкових процесів	9
А. Громик, І. Конет Гіперболічна крайова задача в кусково-однорідному порожнистому циліндрі.....	12
В. Васькович Ціни азійського опціону та їх збіжність відносно параметрів	14
З. Вижва Про статистичне моделювання випадкових полів у тривимірному евклідовому просторі	19
М. Гордієнко, В. Самойленко Математичні дослідження М.М. Боголюбова періоду 1923–1932 років	25
В. Бородін Моделювання руху міміки обличчя у флеш-іграх.....	33
Б. Кіфоренко, І. Васильєв, Я.Ткаченко, Л. Харитонова Оптимальне управління тягою електричного ракетного двигуна з сонячним джерелом енергії	36
Т. Клімчук Інтегровність систем з миттєвими в'язями.....	40
Л. Мольченко, І. Лоос, П. Голуб Вплив нелінійності на згинні коливання стержня в магнітному полі.....	43
О. П'ятецька Метод дослідження впливу температури дисипативного розігріву на показники сенсора при гармонійних термомеханічних коливаннях пластин.....	46
Б. Рохман, В. Каліон, А. Худащов Моделювання процесу переносу маси, імпульсу й енергії у висхідному полідисперсному потоці з врахуванням обертання дисперсної фази й взаємодії частинок між собою	49
Л. Яровой Вимірювання наноамплітудних механічних коливань лазерним доплерівським віброметром з модуляцією зондувальної хвилі.....	55

СОДЕРЖАНИЕ

М. Яременко Задача Коши для уравнения эволюционного типа с непрерывной матрицей в пространствах Лебега	5
Г. Веревкина Интерполяционные образы определенных классов случайных процессов	9
А. Громик, И. Конет Гиперболическая краевая задача в кусочно-однородном полом цилиндра	12
В. Васькович Цены азиатского опциона и их сходимости относительно параметров.....	14
З. Выжва О статистическом моделировании случайных полей в трехмерном евклидовом пространстве.....	19
М. Гордиенко, В. Самойленко Математические исследования Н.Н. Боголюбова периода 1923–1932 годов	25
В. Бородин Моделирование движений мимики лица в флеш-играх	33
Б. Кифоренко, И. Васильев, Я. Ткаченко, Л. Харитоновна Оптимальное управление тягой электрического ракетного двигателя с солнечным источником энергии.....	36
Т. Климчук Интегрируемость систем с мгновенными связями.....	40
Л. Мольченко, И. Лоос, П. Голуб Влияние нелинейности на изгибные колебания стержня в магнитном поле	43
О. Пятецкая Метод исследования влияния температуры диссипативного разогрева на показатели сенсора при гармонических термомеханических колебаниях пластин.....	46
Б. Рохман, В. Калион, А. Худацов Моделирование процесса переноса массы, импульса и энергии в восходящем полидисперсном потоке с учетом вращения дисперсной фазы и взаимодействия частиц между собой	49
Л. Яровой Измерения наноамплитудных механических колебаний лазерным доплеровским виброметром с модуляцией зондирующей волны	55

CONTENTS

N. Yaremenko Cauchy problem for the evolution equation with continuous matrix in Lebesgue spaces	5
G. Verovkina The interpolation representation of some kinds of random processes	9
A. Gromyk, I. Konet Hyperbolic boundary value problem in piecewise homogeneous porożnistomu cylinder	12
V. Vaskovych Prices of Asian option and its convergence relative parameters	14
Z. Vyzhva The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the 3D Euclidean Space	19
M. Gordienko, V. Samoylenko Mathematical researches of M.M. Bogoliubov of time period 1923–1932	25
V. Borodin Face mimics movement modeling method for flash-games.....	33
B. Kiforenko, I. Vasil'ev, Y. Tkachenko, L. Kharytonova Optimal control of the electric rocket engine thrust with solar energy source	36
T. Klimchuk Integrability of systems with instantaneous constraints	40
L. Molchenko, I. Loos, P. Golub Effect of nonlinearity on the bending vibrations of the rod in a magnetic field	43
O. Pyatetska Investigation of influence a temperature of dissipative heating on sensor's factors by harmonic thermo-mechanical vibrations of plates.....	46
B. Rokhman, V. Kalion, A. Khudashchov Modelling of mass, impulse and energy transfer in ascending polydisperse stream accounting rotation of the disperse phase and particle interaction	49
L. Yarovoi The measurement of the nanoscale vibration by the laser Doppler vibrometer with the modulated probing channel.....	55

**ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ТИПУ
З НЕПЕРЕРВНОЮ ЕЛІПТИЧНОЮ МАТРИЦЕЮ В ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА**

Розглянуто еліптичне рівняння спеціального вигляду в просторі Соболева, введено звуження відповідних операторів на просторах Лебега, описано деякі топологічні конструкції в $L^p(R^l, d^l x)$ $[0, t]$, завдяки яким доведено аналоги теорем Хілле-Іосіди-Філіпса.

ВСТУП. Дана стаття присвячена дослідженню задачі Коші яка формулюється для узагальненого еволюційного рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t), \quad u(t) \in L^p(R^l, d^l x), \quad t \in [0, t_0], \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

для випадку, коли в правій частині (1) стоїть оператор, що певним чином пов'язаний з еліптичним рівнянням наступного вигляду [1]

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u) = 0, \quad 1 < a(\cdot) \in C_0^\infty(R), \quad (2)$$

а також побудові напівгруп нелінійних операторів в просторах Лебега $L^p(R^l, d^l x)$, тобто вивченню умов, при яких мають місце певні аналоги теорем типу Хілле – Іосіди– Філіпса.

Коротко теореми Хілле–Іосіди–Філіпса можна сформулювати наступним чином: за умови, що оператор $(I - A)^{-1}$ визначено на $L^p(R^l, d^l x)$, де A – нелінійний дисипативний оператор в $L^p(R^l, d^l x)$, оператор A породжує єдину напівгрупу стиску T_t в $L^p(R^l, d^l x)$. І навпаки, якщо \tilde{A} – локальний генератор нелінійної напівгрупи стиску T_t в $L^p(R^l, d^l x)$, то оператор $(I - A)^{-1}$ визначено на всьому $L^p(R^l, d^l x)$ і A породжує початкову напівгрупу стиску T_t , де A – дисипативне розширення оператора \tilde{A} в $L^p(R^l, d^l x)$.

Оператор A в (1) побудовано спеціальним чином за лівою частиною еліптичного рівняння, а саме: спочатку за еліптичним рівнянням для $u \in W_1^p(R^l, d^l x), v \in W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ визначено форму $h_\lambda^p(u, v)$ згідно формули: $h_\lambda^p(u, v) \equiv \lambda \langle u, v \rangle + \langle dv \circ a \circ du \rangle + \langle f(x, u, Du), v \rangle$. Оскільки для форми $h_\lambda^p(u, v)$ виконуються всі умови теореми Банаха [2], то ця форма $h_\lambda^p(u, v)$ породжує оператор [6–8] $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, тобто $h_\lambda^p(u, v) = \langle A_\lambda^p(u), v \rangle$. Дослідження властивостей оператора A_λ^p показує, що цей оператор задовольняє умови теореми Мінті-Браудера [6 – 8], а отже можна визначити звуження \tilde{A}_λ^p оператора A_λ^p на простір $L^p(R^l, d^l x)$, тобто

$$\tilde{A}_\lambda^p = A_\lambda^p \upharpoonright L^p(R^l, d^l x), \quad D(\tilde{A}_\lambda^p) = \{u \in W_1^p(R^l, d^l x) : A_\lambda^p(u) \in L^p(R^l, d^l x)\}.$$

За визначенням покладається $A \equiv -\tilde{A}_\lambda^p$. Оператор $\tilde{A}_\lambda^p : D(A_\lambda^p) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ визначає сюр'єктивне відображення і, як наслідок, еліптичне рівняння (2) має розв'язок в $D(\tilde{A}_\lambda^p)$. Вперше подібні форми почав розглядати М.М. Кухарчук [3–5].

Основний результат цієї статті складає теорема про існування і єдиність розв'язку узагальненої задачі Коші для рівняння (1) в просторі $L^p(R^l, d^l x)$, тобто нелінійний аналог теореми Хілле-Іосіди-Філіпса [3–5, 8].

ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо наступну конструкцію. Позначимо через $C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$ простір усіх $L^p(R^l, d^l x)$ -значних сильно неперервних функцій на інтервалі $[0, t]$, тобто, якщо $u(\cdot) \in C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$, то $u : [0, t] \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ і $\lim_{s \rightarrow s_0} \|u(s) - u(s_0)\|_{L^p(R^l, d^l x)} = 0, \quad s_0 \in [0, t]$; а через $L = L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$ – простір усіх $L^p(R^l, d^l x)$ -значних, сильно інтегровних функцій на інтервалі $[0, t]$, тобто якщо $u(\cdot) \in L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$, то $u : [0, t] \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ і $\|u\|_L = \int_0^t \|u(s)\| ds < \infty$. Оператор A визначає відображення $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$, яке можна розглядати як (багатозначне) відображення з $C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$ в $L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$, тобто $C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t] \ni u \rightarrow \{v \in L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t] : v(s) \in Au(s) \text{ майже скрізь } \{s\}\}$.

Означення 1. Елемент $u \in C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t_0]$ називається слабким розв'язком узагальненого рівняння

$$\frac{d}{dt}u(t) \in Au(t), \quad u(t) \in L^p(R^l, d^l x), \quad t \in [0, t_0], \quad \text{якщо існує послідовність абсолютно неперервних розв'язків } u_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{d}{dt}u_n(t) \in \tilde{A}u_n(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{майже при всіх } t \in [0, t_0] \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ в } C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t_0].$$

Означення 2. Нехай функція $u_n(t) \in D(A) \subset C_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t], n \in N$, задовольняє (в класичному сенсі) рівняння $\frac{d}{dt} u_n(t) = A_n u_n(t), n \in N$, де $A_n, n \in N$, – відображення $u \rightarrow nu^{-1} \rightarrow v$ при $u \in D(A), v \in Au$. Якщо послідовність $\{u_n(t), n \in N\}$ збігається рівномірно до $u(t) \in D(A), t \in [0, t_0]$, в сильній топології і існує підпослідовність $\left\{ \frac{d}{dt} u_{n_k}(t), n_k \in N \right\}$, яка збігається в σ -слабкій топології до елемента $\frac{d}{dt} u(t) \in L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$, то елемент $u(t) \in D(A)$ називається розв'язком узагальненого параболічного рівняння в (1).

Відомо, що якщо $u(t)$ абсолютно неперервна функція, то $u(t)$ є диференційованою для майже всіх t і може бути записана через інтеграл від своєї похідної, яка існує для майже всіх t .

Означення 3. Власним розв'язком задачі Коші для рівняння в (1) називається функція $u(t)$, якщо $u(t) \in D(A)$ і ця функція є абсолютно неперервною для майже всіх t і задовольняє для майже всіх t узагальнене параболічне рівняння в (1).

Означення 4. Відображення $A : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$, взагалі кажучи, багатозначне, називається дисипативним, якщо

$$\langle f_1 - g_1, (f - g) | f - g |^{p-2} \rangle \leq 0 \quad \forall f_1 \in Af, g_1 \in Ag, \tag{3}$$

де Af, Ag – множина значень відображення A елементів f і g відповідно.

Якщо A – однозначний оператор, то умова (3) набуває вигляду

$$\langle Af - Ag, (f - g) | f - g |^{p-2} \rangle \leq 0 \quad \forall f, g \in L^p(R^l, d^l x).$$

Оскільки ми розглядаємо нелінійні напівгрупи, то, взагалі кажучи, включення $A_0 T_t \supset T_t A_0$ не виконується. Тут під відображенням $A_0 : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$ ми розуміємо наступне відображення:

$$A_0 f \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h f - f}{h}, \quad f \in L^p(R^l, d^l x), \tag{4}$$

яке називається строго інфінітезимальним генератором.

Теорема 1 (про існування розв'язку еліптичного рівняння). Нехай коефіцієнти рівняння (2)

$$\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u) = 0, \quad 1 < a \in C_0^\infty,$$

задовольняють умови :

1. $f(x, y, z)$ – функція, що задовольняє умови:

$$|f(x, y, z) - f(x, y_1, z_1)| \leq \tilde{\mu}_1(x) |z - z_1| + \tilde{\mu}_2(x) |y - y_1|,$$

$$|f(x, y, z)| \leq \mu_1(x) |z| + \mu_2(x) |y| + \mu_3(x),$$

2. функції $\mu_i(x), \tilde{\mu}_i(x) \in \prod_{KB}(-\Delta), \mu_3(x) \in L^p(R^l, d^l x)$.

Тоді рівняння (2) має розв'язок у просторі $W_1^p(R^l, d^l x), l \geq 3, p \geq 2$.

Доведення даної теореми базується на наступних лемах [3–5, 8].

Лема 1. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ визначає хемінеперервне відображення.

Лема 2. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x), \lambda > \lambda_0$, визначає в просторі $L^p(R^l, d^l x)$ акретивне відображення.

Доведення. Згідно означення оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \rightarrow W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є акретивним в просторі $L^p(R^l, d^l x)$, якщо виконується нерівність [4] $\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle \geq 0, \forall u, v \in W_1^p$.

Враховуючи умови, маємо

$$\begin{aligned} & \langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle \geq \lambda \langle (u - v), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle + \\ & + \langle d(u - v) \circ a \circ d((u - v) | u - v |^{p-2}) \rangle + \langle f(x, u, \nabla u), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle - \langle f(x, v, \nabla v), (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle \geq \\ & \geq \lambda \| |u - v| \|^p + (p - 1) \langle d(u - v) \circ a \circ d(u - v), |u - v |^{p-2} \rangle - \langle \tilde{\mu}_1 |u - v| + \tilde{\mu}_2 |\nabla(u - v)|, (u - v) | u - v |^{p-2} \rangle \geq \\ & \geq \lambda \| |W| \|^2 + 4 \frac{(p - 1)}{p^2} \langle dW \circ a \circ dW \rangle - \langle \mu_4 W, W \rangle - \frac{2}{p} \langle \mu_5 \nabla W, W \rangle \geq \\ & \geq \left(\lambda - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\beta} + \frac{c(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}} + \frac{2}{p\sqrt{\beta}} c(\beta) \right) \right) \| |W| \|^2 + \left(4 \frac{(p - 1)}{p^2} - \frac{\sqrt{\beta}}{2} - \frac{2}{p} \sqrt{\beta} \right) \langle dW \circ a \circ dW \rangle \geq 0. \quad \forall u, v \in W_1^p. \end{aligned}$$

де використано позначення $W = (u - v) | u - v |^{\frac{p-2}{2}}$. Лему 2 доведено.

Розглянемо тепер питання про існування розв'язку задачі Коші (1) та побудувати для неї відповідну напівгрупу стиску.

ТЕОРЕМИ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ЛОКАЛЬНИХ ГЕНЕРАТОРІВ НЕЛІНІЙНИХ НАПІВГРУП СТИСКУ.

Теорема 2 (про незалежність області $D(A_\phi)$ від фільтра ϕ). Область визначення $D(A_\phi)$ ϕ -локального генератора A_ϕ нелінійної напівгрупи стиску T_t не залежить від вибору фільтра ϕ . При цьому для будь-якого $f \in L^p(R^l, d^l x)$ виконуються такі властивості: $f \in D(A_\phi), T_t f \in D(A_\phi) \quad \forall t \geq 0$.

Остання властивість означає, що $T_t f \in D(A_0)$ майже для всіх $t \geq 0$ і $T_t f = f + \int_0^t A_0 T_s f ds$.

Теорема 3 (про властивості оператора A_0). Якщо A_0 – строго локальний генератор напівгрупи T_t , то A_0 – дисипативний оператор, який має таке дисипативне розширення A , що відображення $(I-A)^{-1}$ однозначне і неперервне на $L^p(R^l, d^l x)$.

Теорема 4 (про щільність множини $D(A_0)$ в множині $D(T_t)$). Нехай $D(T_t)$ – область визначення напівгрупи стиску T_t , при цьому $D(T_t)$ є випуклою і замкнутою множиною в $L^p(R^l, d^l x)$. Тоді область визначення $D(A_0)$ локального генератора A_0 напівгрупи T_t всюди щільна в $D(T_t)$.

Позначимо: $A_0 f \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_h f - f}{h}$, $A_h \equiv \frac{T_h - I}{h}$, або $A_0 f \equiv \lim_{h \rightarrow 0} A_h f$, $A_\phi f \equiv w - \lim_{h \in \phi} A_h f$,

де ϕ – максимальний фільтр підмножини $\phi \subset (0, \infty)$, що збігається до 0.

Тут $\sup_{h > 0} \|A_h f\| < \infty$, $A_\lambda f = \{f - q : q \in L^p(R^l, d^l x), f = w - \lim_{h \in \phi} (I - \lambda A_h)^{-1} q, \lambda > 0\}$.

ПОБУДОВА НЕЛІНІЙНОЇ НАПІВГРУПИ СТИСКУ В $L^p(R^l, d^l x)$. Оператор A , який побудовано вказаним вище способом за оператором, що породжений еліптичним виразом $\lambda u - d \circ a \circ du + f(x, u, \nabla u)$, за заданих умов задовольняє умови наступної теореми.

Теорема 5 (про узагальнену задачу Коші в $L^p(R^l, d^l x)$). Узагальнена задача Коші

$$\frac{d}{dt} u(t) \in Au(t), \quad u(t) \in L^p(R^l, d^l x), \quad t \in [0, t_0], \quad u(0) = u_0,$$

де $A \equiv -\tilde{A}_\lambda : L^p(R^l, d^l x) \rightarrow L^p(R^l, d^l x)$, має при кожному $u_0 \in D(A)$ єдиний слабкий розв'язок.

Доведення. Покажемо, що: $D((I - \lambda A)^{-1}) = L^p(R^l, d^l x)$, $\lambda \in (0, 1]$. Оскільки $(I - \lambda A)^{-1}$ – оператор стиску, то операція $(I - \lambda A)^{-1}$ визначає однозначне відображення. Нехай $u \in L^p(R^l, d^l x)$ – довільний (фіксований) елемент, число $\mu \in (\frac{1}{2}, 1]$. Покладемо $v = (I - \mu A)^{-1} u$. Тоді $v - \mu A v = u$. Справджується рівність $v = (I - A)^{-1} \left(\frac{1}{\mu} u - \frac{1 - \mu}{\mu} v \right)$.

Розглянемо відображення $E_\mu : v \rightarrow (I - A)^{-1} \left(\frac{1}{\mu} u - \frac{1 - \mu}{\mu} v \right)$. Неважко переконатися, що має місце нерівність $\|E_\mu v_1 - E_\mu v_2\| \leq \frac{1 - \mu}{\mu} \|v_1 - v_2\|$, звідки випливає, що рівняння $E_\mu v = v$ згідно принципу стиску має в просторі $L^p(R^l, d^l x)$ розв'язок, а отже оператори $(I - \lambda A)^{-1}$, E_μ визначені на $L^p(R^l, d^l x)$. Аналогічно маємо, що оператор $(I - \mu^k A)^{-1}$ при кожному $k = 1, 2, \dots$ визначено на $L^p(R^l, d^l x)$, а отже можна записати $\lambda = \mu^k$ для певних μ і k .

Якщо A – однозначний оператор, то покладемо $A_n = A \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$. У загальному випадку маємо $A_n : u - \frac{1}{n} v \rightarrow v$, де $u \in D(A)$, $v \in Au$.

Дослідимо відображення A_n на однозначність. Нехай $u_1 - \frac{v_1}{n} = u_2 - \frac{v_2}{n}$, де $v_1 \in Au_1$, $v_2 \in Au_2$. Тоді маємо $u_1 = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \left(u_1 - \frac{v_1}{n} \right) = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \left(u_2 - \frac{v_2}{n} \right) = u_2$. Отже $\left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1}$ – однозначне відображення, тобто $v_1 = v_2$. Звідси робимо висновок про те, що оператори A_n – однозначні.

Покажемо, що кожне відображення A_n є дисипативним і генерує нелінійну напівгрупу T_t^n , для якої виконується нерівність $\|A_n T_t^n u\| \leq \|A_n u\|$. Доведемо спочатку дисипативність оператора A_n . Нехай u_1, u_2 – два довільні елементи з $L^p(R^l, d^l x)$ і $v_1 = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} u_1$, $v_2 = \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} u_2$. Виберемо елементи \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 так, щоб виконувалися умови: $\tilde{v}_1 \in Av_1$, $A_n u_1 = \tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2 \in Av_2$, $A_n u_2 = \tilde{v}_2$. Тоді виконуються рівності $u_1 = v_1 - \frac{\tilde{v}_1}{n}$, $u_2 = v_2 - \frac{\tilde{v}_2}{n}$. Перевіримо дисипативність оператора A_n .

Маємо: $\langle A_n u_1 - A_n u_2, (u_1 - u_2) | u_1 - u_2 |^{p-2} \rangle = n \|u_1 - u_2\|_p^p - n \langle v_1 - v_2, (u_1 - u_2) | u_1 - u_2 |^{p-2} \rangle \leq 0$, оскільки

$$\langle (I - A)(u_1) - (I - A)(u_2), (u_1 - u_2) | u_1 - u_2 |^{p-2} \rangle = \|u_1 - u_2\|_p^p - \langle A(u_1) - A(u_2), (u_1 - u_2) | u_1 - u_2 |^{p-2} \rangle \geq \|u_1 - u_2\|_p^p,$$

внаслідок дисипативності оператора A , тобто A_n – дисипативний оператор при кожному $n \in \mathbb{N}$.

Наступні міркування показують, що A_n визначає неперервне і обмежене відображення. Дійсно, маємо:

$$\| A_n u_1 - A_n u_2 \|^p \leq n^p \| u_1 - u_2 \|^p .$$

Таким чином, задача $\frac{d}{dt} u(t) = A_n u(t)$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in L^p(R^l, d^l x)$ має єдиний розв'язок, який можна записати у вигляді $u_n(t) = T_t^n u_0$, де T_t^n – напівгрупа стиску. Оскільки $\| T_h^n u_0 - u_0 \| \geq \| T_{t+h}^n u_0 - T_t^n u_0 \|$, то

$$\| A_n u_0 \| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_h^n u_0 - u_0) \geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_{t+h}^n u_0 - T_t^n u_0) = \| A_n T_t^n u_0 \| .$$

Зафіксуємо довільний елемент $u \in D(A)$ і доведено рівномірну збіжність стосовно t на кожному скінченному інтервалі. Нехай $v \in Au$, $u_n = u - \frac{v}{n}$, $n \in N$. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{ds} \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^p ds &= p \int_0^t \left\langle \frac{d}{ds} T_s^m u_m - \frac{d}{ds} T_s^n u_n, (T_s^m u_m - T_s^n u_n) | T_s^m u_m - T_s^n u_n \right\rangle^{p-2} ds = \\ &= p \int_0^t \left\langle A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, (T_s^m u_m - T_s^n u_n) | T_s^m u_m - T_s^n u_n \right\rangle^{p-2} ds = \\ &= p \int_0^t \left\langle A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, (T_s^m u_m - T_s^n u_n)^{p-1} \right\rangle \Big|_{T_s^m u_m \geq T_s^n u_n} ds + p \int_0^t \left\langle A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, (T_s^m u_m - T_s^n u_n)^{p-1} \right\rangle \Big|_{T_s^m u_m < T_s^n u_n} ds . \end{aligned}$$

Оцінимо перший доданок (другий оцінюється аналогічно). Для цього використовуємо нерівності Гельдера і Юнга.

$$\begin{aligned} \text{Маємо} \left\langle A_m T_s^m u_m - A_n T_s^n u_n, (T_s^m u_m - T_s^n u_n)^{p-1} \right\rangle &= \left\langle A_m T_s^m u_m - A_m T_s^n u_n + A_m T_s^n u_n + A_n T_s^n u_n, (T_s^m u_m - T_s^n u_n)^{p-1} \right\rangle \leq \\ &\leq \frac{c(p)}{m} \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \| \left(\| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^{p-1} + \left\| \frac{A_n T_s^n u_n}{n} - \frac{A_m T_s^m u_m}{m} \right\|^{p-1} \right) + \\ &+ \left\langle A_m T_s^n u_n - A_n T_s^n u_n, \left(T_s^m u_m - T_s^n u_n + \frac{A_n T_s^n u_n}{n} - \frac{A_m T_s^m u_m}{m} \right)^{p-1} \right\rangle \leq \\ &\leq \frac{c(p)}{m} \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^p + \frac{c(p)}{m} \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^p \| A(u_0) \|^{p-1} (n^{1-p} + m^{1-p}) + \\ &+ c_1(p) \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^{p-1} \| A(u_0) \| + c_2(p) \| A(u_0) \|^p (n^{1-p} + m^{1-p}) \end{aligned}$$

Зробимо деякі перетворення та оцінки. Оскільки

$$\begin{aligned} \| A_m T_s^m u_m \| &\leq \| A_m u_m \| = \| v \| , \| A_n T_s^n u_n \| \leq \| A_n u_n \| = y , \| A_m T_s^m u_m \| \leq \| A u_0 \| , \\ \left(I - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} \right) T_s^m u_m &= \left(I - \frac{A}{m} \right) \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_s^m u_m - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} T_s^m u_m = -\frac{1}{m} A_m T_s^m u_m , \\ \left(I - \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \right) T_s^n u_n &= -\frac{A_n}{n} T_s^n u_n , \end{aligned}$$

то

$$\left\| \left(I - \left(I - \frac{A}{m} \right)^{-1} \right) T_s^m u_m \right\| = \frac{1}{m} \| A_m T_s^m u_m \| \leq \frac{1}{m} \| A_m u_m \| = \frac{\| v \|}{m} , \left\| \left(I - \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} \right) T_s^n u_n \right\| \leq \frac{\| v \|}{n} .$$

Таким чином отримали оцінку $\frac{d}{ds} \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^p \leq \text{const} (p, \| A(u_0) \|) \varepsilon(m, n)$, де $\varepsilon(m, n) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$,

а отже $\int_0^t \frac{d}{ds} \| T_s^m u_m - T_s^n u_n \|^p ds \leq \text{const} (p, \| A(u_0) \|) \varepsilon(m, n) t$.

Таким чином при кожному фіксованому $t_0 > 0$ справедлива оцінка:

$$\sup_{t \in [0, t_0]} \| T_t^m u - T_t^n u \| \leq \sup_{t \in [0, t_0]} (\| T_t^m u - T_t^m u_m \| + \| T_t^n u_n - T_t^n u \| + \| T_t^m u_m - T_t^n u_n \|) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 .$$

Внаслідок повноти простору $L^p(R^l, d^l x)$ послідовність $T_t^n u$ збігається рівномірно стосовно t на будь-якому скінченному інтервалі. Згідно нерівності $\| T_t^n u_1 - T_t^n u_2 \| \leq \| u_1 - u_2 \|$, враховуючи, що послідовність $T_t^n u_2$ збігається рівномірно (стосовно t) на будь-якому скінченному інтервалі при всіх $u_2 \in D(A)$, маємо, що послідовність $T_t^n u_1$ збігається рівномірно (стосовно t) на будь-якому скінченному інтервалі при всіх $u_1 \in L^p(R^l, d^l x)$.

Нехай $T_t u = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t^n u$, де $u \in D(A)$. Покладемо $u_n = u - \frac{1}{n} v$, $v \in Au$. Покажемо, що T_t – нелінійна напівгрупа, яка задовольняє умову: $\frac{d}{dt} T_t u \in \tilde{A} T_t u$ майже для всіх $t \in [0, t_0]$, де через \tilde{A} позначено розширення відображення A

згідно описаної вище конструкції. З нерівності $\left\| \left(I - \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} \right) T_t^n u_n \right\| \leq \|v\| \frac{1}{n}$, одержуємо $\left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_t^n u_n \rightarrow T_t u$, де послідовність збігається рівномірно стосовно t на будь-якому обмеженому інтервалі.

Оскільки множина $\left\{ \left(I - \frac{A}{n} \right)^{-1} T_t^n u_n : t \in [0, t_0], n = 1, 2, \dots \right\}$ обмежена в $L^p(R^l, d^l x)$, то існує підпослідовність $\left\{ A \left(I - \frac{A}{n_k} \right)^{-1} T_t^{n_k} u_{n_k} \right\}$, яка збігається в слабкій σ -топології. Отже $\tilde{A} T_t u \in \sigma - \lim A_{n_k} T_t^{n_k} u_{n_k}$.

Послідовність $A_n T_t^n u_n = \frac{d}{dt} T_t^n u_n$ прямує до елемента $\frac{d}{dt} T_t u$ в топології $L^p(R^l, d^l x)$ -значних нескінченно диференційовних функцій, що визначені на проміжку $(0, t_0)$. Позначимо цей простір через $D_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$, а через σ_1 -топологію $\sigma_1 \equiv \sigma(L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t], D_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t])$. Ця топологія є слабкою топологією в $L_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$ відносно $D_{L^p(R^l, d^l x)}[0, t]$.

Очевидно, що $\sigma_1 < \sigma$ в топологічному сенсі, а отже $\frac{d}{dt} T_t u \in \sigma_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n_k} T_t^{n_k} u_{n_k} \in \tilde{A} T_t u$. Теорему 5 доведено.

Теорема 6 (аналог теореми Хілле-Іосіди-Філіпса). Нехай T_t – нелінійна напівгрупа стиску, A_0 – щільно визначений локальний генератор. Тоді A_0 має розширення A , яке генерує нелінійну напівгрупу стиску T_t^* , причому напівгрупи T_t і T_t^* співпадають.

Ця теорема є наслідком теорем 4, 5.

ВИСНОВКИ. Розглянуто еліптичне рівняння спеціального вигляду в просторі $W_1^p(R^l, d^l x)$, введено звуження відповідних операторів на $L^p(R^l, d^l x)$, описано деякі топологічні конструкції в $L_{L^p(R^l, d^l x)}([0, t])$, завдяки яким доведено аналоги теорем Хілле-Іосіди-Філіпса, тобто показано, що оператори, які визначаються еліптичним рівнянням спеціального вигляду, насправді є локальними генераторами напівгруп. Розглянуто узагальнену задачу Коші для нелінійного еволюційного рівняння і доведено її однозначну розв'язність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубинский Ю.А. Нелинейные параболические и эллиптические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. – М.: ВИНТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5–130.
2. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
3. Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про розв'язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільберга-Серріна в R^l і побудову нелінійних напівгруп стиску в $L^2(R^l, d^l x)$ / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць. Рівне. – 2008. – Вип. 1(41). – С. 435–443.
4. Кухарчук М.М., Яременко М.І. Розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння з матрицею Гільберга – Серріна в просторах Соболева / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – №4. – С. 142–154.
5. Кухарчук М.М., Яременко М.І. Про гладкість розв'язків деяких квазілінійних еліптичних рівнянь / М.М.Кухарчук, М.І.Яременко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №4. – С. 67–71.
6. Komura Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space / Y. Komura // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 493–507.
7. Kato T. Nonlinear semi-groups and evolution equations / T. Kato // J. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 3. – P. 375–402.
8. Minty G. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space / G. Minty // Duke Math. J. – 1962. – V. 29. – P. 341–346.

Надійшла до редколегії 04.12.12

М. Яременко, канд. физ.-мат. наук., мл. научн. сотр.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА С НЕПРЕРЫВНОЙ МАТРИЦЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Рассмотрено эллиптическое уравнение специального типа в пространстве Соболева, введено сужение соответствующих операторов на пространствах Лебега, описаны некоторые топологические конструкции в $L_{L^p(R^l, d^l x)}([0, t])$, благодаря которым доказаны аналоги теорем Хилле-Иосиды-Филлипса.

N.Yaremenko, PhD

CAUCHY PROBLEM FOR THE EVOLUTION EQUATION WITH CONTINUOUS MATRIX IN LEBESQUE SPACES

There is considered elliptic equation of special type in space of Sobolev, restriction on spaces of Lebesgue the relevant operators, described some possible topological structures in $L_{L^p(R^l, d^l x)}([0, t])$, by means of which analogues of Hille-Iosidy-Phillips theorems are proved.

УДК 519.21

Г. Верьовкіна, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, м.Київ
Email: ganna.verov@gmail.com

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПЕВНИХ КЛАСІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Досліджуються інтерполяційні зображення певних класів випадкових процесів за нерівновіддаленими вузлами інтерполяції.

ВСТУП. Досліджуються інтерполяційні зображення деяких класів випадкових процесів на площині з нерівновіддаленими вузлами інтерполяції. Отримано інтерполяційну формулу, в якій використовується значення процесу та його похідних в вузлах інтерполяції. Доведено збіжність відповідного інтерполяційного ряду до випадкового процесу

© Верьовкіна Г., 2013

з ймовірністю одиниця. Одержані результати стосуються застосування теореми Котельнікова-Шеннона [3] та її узагальнень на випадок нерівновіддалених вузлів інтерполяції і можуть знайти використання в теорії передачі інформації, теорії зв'язку та інших галузях техніки, де неперервний випадковий сигнал замінюється дискретним набором значень процесу та його похідних.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розглянемо інтерполяційні зображення деяких класів випадкових процесів [4] за нерівновіддаленими вузлами інтерполяції. Нехай вузли інтерполяції задано умовами $t_{n_0} = n \frac{7\pi}{\alpha}, t_{n_1} = n \frac{7\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}, n \in \mathbb{Z}$. У вузлах $t_{n_0}, n \in \mathbb{Z}$, розглянемо значення процесу та його похідних до третього порядку включно, а у вузлах $t_{n_1}, t_{n_2}, n \in \mathbb{Z}$, – значення процесу та його похідних до другого порядку включно. Сформулюємо необхідні, доведені раніше, результати з теорії цілих функцій.

Лема. Нехай $f(z)$ – ціла, обмежена на дійсній осі функція експоненціального типу з показником σ . Тоді для будь-якого $\alpha, \alpha > \sigma$, має місце зображення

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{f(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z-t_{n_0})^4} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{f'(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z-t_{n_0})^3} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} + \frac{f''(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z-t_{n_0})^2} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{f'''(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (z-t_{n_0})} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{f(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})^2} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{f'(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{f''(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (z-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2 \sin^4 \frac{\pi}{7}} \right] \times \sin^4 \frac{\alpha}{7} (z-t_{n_0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7} (z-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha}), \quad (1)$$

де $t_{n_0} = n \frac{7\pi}{\alpha}, n \in \mathbb{Z}$, причому інтерполяційний ряд (1) збігається рівномірно в будь-якій обмеженій області комплексної площини.

При доведенні леми, використовуючи результати, що викладені в [1, 2], отримано оцінку залишку інтерполяційного ряду (1) наступного вигляду

$$|R_n(z)| \leq LG(z) C_f \frac{\alpha}{\alpha - \sigma} \frac{1}{n}, \quad (2)$$

де L – стала, $C_f = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, $G(z) = \left| \sin^4 \frac{\alpha}{7} z \times \sin^3 \frac{\alpha}{7} (z - \frac{\pi}{\alpha}) \right|$ – функція, що обмежена в довільній обмеженій області комплексної площини.

Розглянемо випадковий процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, для якого $M\xi(t) = 0$, а його коваріаційна функція має вигляд

$$B(t, s) = \int_{\Lambda \times \Lambda} f(t, \lambda) \overline{f(s, \mu)} F(d\lambda, d\mu), \quad (3)$$

де Λ – деяка множина параметрів, $F(\dots)$ – комплексна функція множин, адитивна за двома аргументами, додатно визначена і така, що

$$\int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < +\infty \quad (4)$$

Відносно функції $f(t, \lambda)$ будемо припускати, що її можна довизначити в комплексній площині відносно t до цілої функції експоненціального типу з показником $\sigma(\lambda)$ таким чином, щоб виконувались співвідношення

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(t, \lambda)| = C_f < +\infty, \quad (5)$$

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(\lambda) = \sigma < +\infty \quad (6)$$

Сформулюємо теорему.

Терема. Нехай $\xi(t)$ – випадковий процес, що задовольняє умови (3) – (6). Тоді для будь-якого $\alpha, \alpha > \sigma$, з ймовірністю одиниця має місце формула

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n_0})^4} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi'(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n_0})^3} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} + \frac{\xi''(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n_0})^2} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi'''(t_{n_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t-t_{n_0})} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})^2} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{\xi'(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{\xi''(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2 \sin^4 \frac{\pi}{7}} \right] \times \sin^4 \frac{\alpha}{7} (t-t_{n_0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7} (t-t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha}),$$

$$+ \left. \frac{\xi''(t_{n_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^3 (t - t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2 \sin^4 \frac{\pi}{7}} \right\} \times \sin^4 \frac{\alpha}{7} (t - t_{n_0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7} (t - t_{n_0} - \frac{\pi}{\alpha}). \quad (7)$$

Доведення. Згідно з теоремою про спектральне зображення випадкових процесів [4], процес $\xi(t)$ подамо у вигляді

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} f(t, \lambda) Z(d\lambda), \quad (8)$$

де $Z(d\lambda)$ – така випадкова міра на Λ , що $MZ(A_1) \cdot \overline{Z(A_2)} = F(A_1, A_2)$. Для довільного натурального n розглянемо процес $\xi_n(t)$, який визначимо як часткову суму з номером n ряду (7), тобто

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \left[\frac{\xi(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})^4} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi'(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})^3} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} + \frac{\xi''(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})^2} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} \right. \\ \left. - \frac{\xi'''(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{\xi(t_{k_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha})^2} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{\xi'(t_{k_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} \right. \\ \left. + \frac{\xi''(t_{k_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^3 (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2 \sin^4 \frac{\pi}{7}} \right] \times \sin^4 \frac{\alpha}{7} (t - t_{k_0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7} (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha}). \end{aligned}$$

Використовуючи зображення (8) та твердження леми, подамо $\xi_n(t)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = \sum_{k=-n}^n \int_{\Lambda} \left[\frac{f(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})^4} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{f'(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})^3} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} + \frac{f''(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})^2} \times \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\pi}{7}} \right. \\ \left. - \frac{f'''(t_{k_0})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^4 (t - t_{k_0})} \times \frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{7}} - \frac{f(t_{k_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha})^2} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{f'(t_{k_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{7}\right)^3 (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{7}} \right. \\ \left. + \frac{f''(t_{k_0} + \frac{\pi}{\alpha})}{\left(\frac{\alpha}{5}\right)^3 (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha})} \times \frac{1}{2 \sin^4 \frac{\pi}{7}} \right] \times \sin^4 \frac{\alpha}{7} (t - t_{k_0}) \sin^3 \frac{\alpha}{7} (t - t_{k_0} - \frac{\pi}{\alpha}) \times Z(d\lambda). \quad (9) \end{aligned}$$

Тоді на підставі зображення (1), (8), (9) та оцінки (2) знаходимо

$$M |\xi(t) - \xi_n(t)|^2 \leq R_n^2(t) \int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| = L^2 G^2(t) C_f^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha - \sigma} \right)^2 \frac{1}{n^2} \int_{\Lambda \times \Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| \quad (10)$$

Із нерівності (10), враховуючи умову (4) отримуємо, що інтерполяційний ряд (7) збігається до випадкового процесу $\xi(t)$ в середньому квадратичному. Враховуючи сепарабельність процесу $\xi(t)$ та збіжність ряду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2$,

одержимо, що інтерполяційний ряд (7) з ймовірністю одиниця збігається до випадкового процесу $\xi(t)$ рівномірно відносно t в довільній обмеженій області зміни t .

ВИСНОВКИ. Розглянуто інтерполяційне зображення деяких класів випадкових процесів на площині з нерівновіддаленими вузлами інтерполяції. Доведено теорему про збіжність побудованого інтерполяційного ряду до випадкового процесу з ймовірністю одиниця.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Верьовкіна Г.В., Нагорний В.Н. Інтерполяційні зображення одного класу випадкових полів // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2005. – Вип. №1. – С.31–34.
2. Нагорний В.Н. Інтерполяційні зображення випадкових процесів за рівновіддаленими вузлами інтерполяції // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1990. – Вип.32. – С.82–85.
3. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. – М., 1962. – 220 с.
4. Яглом А.М. Спектральные представления для различных классов случайных функций // Труды IV Всесоюз. мат. съезда. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1963. – Т.1. – С.132–148.

Надійшла до редколегії 08.11.12

Г. Вєрєвкина, доц.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ОБРАЗЫ ОПРЕДЕЛЕННЫХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Исследуются интерполяционные образы определенных классов случайных процессов по неравноудаленным узлам интерполяции

G. Verovkina, PhD, Ass. Prof.

THE INTERPOLATION REPRESENTATION OF SOME KINDS OF RANDOM PROCESSES

Paper deals with some interpolation representations of some random processes with no equidistance knots interpolations.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, викл.,
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Кам'янець-Подільський державний університет, Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА
В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

ВСТУП. Прикладні задачі сучасної теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6, 7, 17, 18].

Для досить широкого класу крайових задач в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породженні диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються, або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3–5, 10, 12–14, 16].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях одержано у працях [8, 9, 11]. У цій статті, яка є логічним продовженням [2], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z); t > 0; r \in (R_0; R), R_0 > 0, R < +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (I_{j-1}; I_j), I_0 \geq 0; I_k < I_{k+1}; I_{n+1} \equiv l < \infty \right\} 2\pi -$$

періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{ij}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

з початково-крайовими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=I_0} = g_0(t, r, \varphi); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, r, \varphi), \tag{3}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h_1 \right) u_j \Big|_{r=R_0} = \theta_j^1(t, \varphi, z); \left(\frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) u_j \Big|_{r=R} = \theta_j^2(t, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=I_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де $a_{ij}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k, h$ – деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} c_{2k} > 0; |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0; |\alpha_{22}^{n+1}| + |\beta_{22}^{n+1}| \neq 0; f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\}; g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\};$$

$$\theta^1(t, \varphi, z) = \{\theta_1^1(t, \varphi, z), \theta_2^1(t, \varphi, z), \dots, \theta_{n+1}^1(t, \varphi, z)\}; \theta^2(t, \varphi, z) = \{\theta_1^2(t, \varphi, z), \theta_2^2(t, \varphi, z), \dots, \theta_{n+1}^2(t, \varphi, z)\};$$

$g_0(t, r, \varphi), g_l(t, r, \varphi)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$ – шукана функція.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ. Вважаємо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних перетворень [19, 15, 16].

Побудований за методикою, розвинутою у [2] для суцільного циліндра, методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової φ [19], скінченного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду щодо радіальної змінної r [15] та скінченного інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[I_0; l]$ з n точками спряження щодо змінної z [16], єдиний обмежений розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)–(5) визначають функції

$$\begin{aligned}
u_j(t, r, \varphi, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
& + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
& + \int_0^t \int_0^R \int_0^{2\pi} [W_j^0(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) g_0(\tau, \rho, \alpha) + W_j^1(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) g_j(\tau, \rho, \alpha)] \rho d\alpha d\rho d\tau + \\
& + a_{ij}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_{l_{k-1}}^{l_k} [W_{jk}^1(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) \theta_k^1(\tau, \alpha, \xi) + W_{jk}^2(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) \theta_k^2(\tau, \alpha, \xi)] \sigma_k d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1},
\end{aligned} \quad (6)$$

У формулах (6) застосовано компоненти $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m E_{jk,m}(t, r, \rho, z, \xi) \cos(m\varphi)$ матриці впливу (функції впливу), $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, r, \rho, \varphi, z, l_0)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), $W_j^1(t, r, \rho, \varphi, z) = \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{j,n+1}(t, r, \rho, \varphi, z, l)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), $W_{jk}^1(t, r, \rho, z, \xi) = R_0 E_{jk}(t, r, R_0, \varphi, z, \xi)$ лівої радіальної матриці Гріна та компоненти $W_{jk}^2(t, r, \rho, z, \xi) = R E_{jk}(t, r, R, \varphi, z, \xi)$ правої радіальної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t, r, \rho, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\Delta(\beta_p, \lambda_s)t)}{\Delta(\beta_p, \lambda_s)} \frac{f_{m,0}(\beta_p r, \beta_p R)}{\|f_m(\beta_p r, \beta_p R)\|^2} \frac{V_j(z, \lambda_s) V_k(\xi, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2}; \quad j, k = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z)$, $W_j^1(t, r, \rho, \varphi, z)$, $W_{jk}^s(t, r, \rho, z, \xi)$, ($s = 1, 2$), безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (6), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [20].

Єдиність розв'язку (6) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу та функцій Гріна).

Можна довести [1], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)–(5), узагальнений розв'язок (6) буде також її класичним обмеженням розв'язком.

Зауваження 1. У випадку $a_j = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (6) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (6) розв'язку крайових задач випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 1–3, ..., 3–3).

Зауваження 3. Параметри h_1, h_2 дає можливість виділяти із формул (6) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $r = R_0, r = R$ крайової умови 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 2–1, 2–2).

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (6) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $\theta_j^1(t, \varphi, z)$, $\theta_j^2(t, \varphi, z)$, $g_0(t, r, \varphi)$, $g_j(t, r, \varphi)$ проводиться безпосередньо.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному порожнистому циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гельфанд І.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз., 1958.2. Громик А.П., Конет І.М. Гіперболічна крайова задача в кусково-однорідному суцільному циліндрі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2013. – Вип. 29. 3. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2011. 4. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2009. 5. Громик А.П., Конет І.М. Стационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2008. 6. Дейнека В.С. Сергиенко І.В., Скопечкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. 7. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. 8. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 93–108. 9. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т.7. – С. 71–92. 10. Конет І.М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2007. 11. Конет І.М., Ленюк М.П. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11). – Чернівці: Прут, 2011. – С. 5–17. 12. Конет І.М., Ленюк М.П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці : Прут, 2001. – 312 с. 13. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці : Прут, 2004. 14. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. 15. Ленюк М.П. Інтегральні преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – К., 1983. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Институт математики; 83.18). 16. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских куско-

во-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 17. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. 18. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. 19. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат., 1956. 20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 15.04.13

А. Громик, канд. техн. наук, препод.,
И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений построены точные аналитические решения гиперболических краевых задач в кусочно-однородном полом цилиндре.

A. Gromyk, PhD (eng) I. Konet, Full Doctor

**HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM
IN PIECEWISE HOMOGENEOUS POROŽNISTOMU CYLINDER**

The method of integral transforms in combination with the method of principal solutions the exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems in piecewise homogeneous hollow cylinder.

УДК 519.21

В. Васькович, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: v.v.vaskovych@gmail.com

ЦІНИ АЗІЙСЬКОГО ОПЦІОНУ ТА ЇХ ЗБІЖНІСТЬ ВІДНОСНО ПАРАМЕТРІВ

Розглянуто модель ринку цінних паперів і азійський опціон в ній. Враховано справедливу і об'єктивну ціну даного опціону і досліджено об'єктивну ціну на збіжність відносно параметрів та її порядок.

ВСТУП. Азійський опціон – це різновидність опціону, при якому ціна виконання залежить від середнього значення активу за період. Розглянемо модель ринку, в якій ціна активу в момент часу s дорівнює $x e^{s+\beta W_s}$, де $x > 0$, а W – вінерівський процес. Отже, прибуток від цього опціону в момент T визначається як $(Y - K)^+$, де Y – середнє дисконтоване значення ціни активу за період (це середнє ми будемо шукати як середнє арифметичне), а $K \geq 0$ – фіксована страйкова ціна, яка визначається в момент заключення контракту. Об'єктивною ціною в такому випадку буде математичне сподівання від нашого прибутку. Очевидно, що вона буде залежати від параметрів μ та β . З метою технічного спрощення далі всюди вважатимемо, що $x = 1$.

ЦІНА ОПЦІОНУ. Як зазначено вище об'єктивною ціною азійського опціону буде математичне сподівання від $(Y - K)^+$, де Y – випадкова величина, що дорівнює $Y = \frac{1}{T} \int_0^T e^{s+\beta W_s} ds$. Для того, щоб знайти справедливу ціну даного

азійського опціону, в Y потрібно μ замінити на $-\frac{\beta^2}{2}$, тобто знайти $E(X - K)^+$, де $X = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{\beta^2}{2}s + \beta W_s} ds$.

З [2] відомо, що щільність розподілу випадкової величини $\int_0^T e^{2\delta\eta s + 2\delta W_s} ds$ в точці $y > 0$ дорівнює

$$Q(y, \eta, \delta) = \frac{\sqrt{2} |\delta| (2\delta^2 y)^{\frac{\eta}{2\delta}} e^{-\frac{\eta^2 T}{2} - \frac{1}{4\delta^2 y}}}{\sqrt{y}} m_{2\delta^2 T} \left(\frac{\eta}{2\delta} - \frac{1}{2}, \frac{1}{4\delta^2 y} \right), \frac{\eta}{2\delta} > -1.$$

Тут $m_y(x, z) = \frac{8z^2 \Gamma\left(x + \frac{3}{2}\right) e^{\frac{\pi^2}{4y}}}{\pi \sqrt{2\pi y}} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch}(2u) - \frac{u^2}{y}} M\left(-x, \frac{3}{2}, 2z \operatorname{sh}^2(u)\right) \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{\pi u}{y}\right) du,$

а функція $M(a, b, x) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \binom{a}{b} \binom{a+1}{b+1} \dots \binom{a+k-1}{b+k-1} \frac{x^k}{k!}.$

Таким чином, щільність розподілу випадкової величини $\frac{1}{T} \int_0^T e^{s+\beta W_s} ds$ в точці $y > 0$ дорівнює

$$P(y, \mu, \beta) = Q\left(y, \frac{\mu}{\beta}, \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{2} |\beta| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 T y}} \frac{\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi \sqrt{\pi T}} \times \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\operatorname{ch}(2u)}{\beta^2 T y} - \frac{2u^2}{\beta^2 T}} M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du \right), \frac{\mu}{\beta^2} > -1.$$

Тоді знаходимо

$$E(Y - K)^+ = \int_K^\infty (y - K) \sqrt{2} |\beta| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 T y}} \frac{\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi \sqrt{\pi T}} \times \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\operatorname{ch}(2u)}{\beta^2 T y} - \frac{2u^2}{\beta^2 T}} M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du \right) dy.$$

Це і є об'єктивною ціною азійського опціону в нашій моделі. Справедлива ціна цього ж опціону дорівнює

$$E(X - K)^+ = \int_K^\infty (y - K)P\left(y, -\frac{\beta^2}{2}, \beta\right) dy.$$

ЗБІЖНІСТЬ ОБ'ЄКТИВНОЇ ЦІНИ ВІДНОСНО μ . Об'єктивна ціна опціону – це величина, яка залежить від двох параметрів: μ і β . Позначимо $E(Y - K)^+ = F(\mu, \beta)$. Так як β – коефіцієнт при вінерівському процесі, то можемо вважати, що $\beta > 0$. Також припустимо, що $\mu < 0$. Нехай в нас β фіксоване. Дослідимо $F(\mu, \beta)$ на збіжність відносно μ .

Оскільки $|abcd - a_n b_n c_n d_n| \leq |a - a_n| |bcd| + |a_n| |b - b_n| |cd| + |a_n| |b_n| |c - c_n| |d| + |a_n| |b_n| |c_n| |d - d_n|$, то

$$\begin{aligned} |F(\mu, \beta) - F(\mu_n, \beta)| &= \left| \int_K^\infty (y - K)P(y, \mu, \beta) dy - \int_K^\infty (y - K)P(y, \mu_n, \beta) dy \right| \leq \\ &\leq \int_K^\infty \int_0^\infty (y - K) \sqrt{2} |\beta| e^{-\frac{1}{\beta^2 T y}} \frac{e^{-\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi \sqrt{\pi T}} e^{-\frac{ch(2u)}{\beta^2 T y} - \frac{2u^2}{\beta^2 T}} \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) \times \\ &\times \left(\left| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} - \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2} - 2} \right| e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2}} \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) + \right. \\ &+ \left| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2} - 2} \left| e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2}} - e^{-\frac{\mu_n^2 T}{2\beta^2}} \right| \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) + \right. \\ &+ \left. \left| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2} - 2} \left| e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2}} \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] - \Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2} + 1\right] \right| M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) + \right. \\ &\left. \left. + e^{-\frac{\mu_n^2 T}{2\beta^2}} \left| \left(2\beta^2 T y\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2} - 2} \left| \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) - M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \right| \right| \right) \right). \end{aligned}$$

Оцінімо $\left| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} - \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2} - 2} \right|, \left| e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2}} - e^{-\frac{\mu_n^2 T}{2\beta^2}} \right|, \left| \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] - \Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2} + 1\right] \right|$ і $\left| M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) - M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \right|$.

Функції $\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2}, e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2}}$ і $\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right]$ неперервні та диференційовані за μ на півінтервалі $(-\beta^2, 0)$. Згідно з умовою

$0 > \frac{\mu}{\beta^2} > -1$, μ належить саме цьому півінтервалу. Отже, можна застосувати теорему Лагранжа про середнє значення.

Також без втрати загальності вважатимемо, що $\frac{\beta^2 T K}{2} \geq 1$, отже для довільного $y \geq K$ маємо $\frac{\beta^2 T y}{2} \geq 1$.

Отже існують такі a, b, c які лежать між μ_n та μ такі, що

$$\left| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} - \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu_n}{\beta^2} - 2} \right| = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{a}{\beta^2} - 2} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) |\mu - \mu_n| \leq \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu + |\mu - \mu_n|}{\beta^2} - 2} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) |\mu - \mu_n|,$$

$$\left| e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2}} - e^{-\frac{\mu_n^2 T}{2\beta^2}} \right| = e^{-\frac{b^2 T}{2}} \left| \frac{bT}{\beta^2} \right| |\mu - \mu_n| \leq \frac{T}{\beta^2} (|\mu| + |\mu - \mu_n|) |\mu - \mu_n|,$$

$$\left| \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] - \Gamma\left[\frac{\mu_n}{\beta^2} + 1\right] \right| = \frac{1}{\beta^2} |\mu - \mu_n| \int_0^\infty x^c e^{-x} \ln(x) dx \leq \frac{1}{\beta^2} \Gamma\left[\frac{\mu + |\mu - \mu_n|}{\beta^2} + 1\right] |\mu - \mu_n|,$$

$$\left| M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) - M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1}\right) \left(\frac{1}{\frac{3}{2} + 1}\right) \dots \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + k}\right) \frac{\left(\frac{2\operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right)^k}{k!} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta^2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu_n}{\beta^2}\right) \right) \right|.$$

Оскільки

$$\left| \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta^2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu_n}{\beta^2}\right) \dots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu_n}{\beta^2}\right) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \left(\frac{1-\mu}{2-\beta^2} \right) - \left(\frac{1-\mu_n}{2-\beta^2} \right) \right| \left| \left(\frac{3-\mu}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu}{2-\beta^2} \right) \right| + \left| \frac{1-\mu_n}{2-\beta^2} \right| \left| \left(\frac{3-\mu}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu}{2-\beta^2} \right) - \left(\frac{3-\mu_n}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu_n}{2-\beta^2} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{\mu-\mu_n}{\beta^2} \right| \left| \left(\frac{3-\mu}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu}{2-\beta^2} \right) \right| + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left| \left(\frac{3-\mu}{2-\beta^2} \right) - \left(\frac{3-\mu_n}{2-\beta^2} \right) \right| \left| \left(\frac{5-\mu}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu}{2-\beta^2} \right) \right| + \\ &+ \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left| \frac{3-\mu_n}{2-\beta^2} \right| \left| \left(\frac{5-\mu}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu}{2-\beta^2} \right) - \left(\frac{5-\mu_n}{2-\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1+k-1-\mu_n}{2-\beta^2} \right) \right| \leq \dots \leq \left| \frac{\mu-\mu_n}{\beta^2} \right| \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1+k}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) + \\ &+ \left| \frac{\mu-\mu_n}{\beta^2} \right| \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1+k}{2} \right) \left(\frac{2}{5} \right) + \dots + \left| \frac{\mu-\mu_n}{\beta^2} \right| \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1+k}{2} \right) \left(\frac{2}{2k+1} \right), \\ \text{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} \right)^{k-1}}{(k-1)!} &= e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^k \frac{2}{2n+1} \leq k, \end{aligned}$$

то
$$\left| M\left(\frac{1-\mu}{2-\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) - M\left(\frac{1-\mu_n}{2-\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} \right)^k}{k!} \left| \frac{\mu-\mu_n}{\beta^2} \right| \sum_{n=1}^k \left(\frac{2}{2n+1} \right) \right) \leq \frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2} \frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}}.$$

Таким чином, підставивши всі різниці і замінивши $M\left(\frac{1-\mu}{2-\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right)$ на $e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}}$, отримуємо:

$$\begin{aligned} |F(\mu, \beta) - F(\mu_n, \beta)| &\leq \int_K \int_0^{\infty} (y-K)\sqrt{2} |\beta| e^{\frac{1}{\beta^2 T y}} e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}} e^{\frac{-\text{ch}(2u)}{\beta^2 T y}} e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} \text{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) \times \\ &\times \left(|\mu-\mu_n| \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right] e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}} + |\mu-\mu_n| \frac{T}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} (|\mu|+|\mu-\mu_n|) \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right] e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}} + \right. \\ &\left. + |\mu-\mu_n| \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}} \Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right] + |\mu-\mu_n| \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} \frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} \Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right] e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}} \right) dudy. \end{aligned}$$

Так як $\frac{-\text{ch}(2u)}{\beta^2 T y} + \frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} = \frac{-e^{2u} - e^{-2u}}{2\beta^2 T y} + \frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u}}{2\beta^2 T y} = \frac{-1}{\beta^2 T y}$, то $e^{\frac{-\text{ch}(2u)}{\beta^2 T y}} e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} e^{\frac{2\text{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}} e^{\frac{1}{\beta^2 T y}} \leq e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} e^{\frac{-2}{\beta^2 T}} \leq e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}}$. Отримуємо:

$$\begin{aligned} |F(\mu, \beta) - F(\mu_n, \beta)| &\leq \sqrt{2} |\beta| |\mu-\mu_n| \frac{1}{\beta^2} \frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi\sqrt{\pi T}} \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right] \left(\int_K (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) dy \right) \left(\int_0^{\infty} e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} \text{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du \right) + \\ &+ \sqrt{2} |\beta| |\mu-\mu_n| \frac{T}{\beta^2} \frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi\sqrt{\pi T}} (|\mu|+|\mu-\mu_n|) \Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2}+1\right] \int_K (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} dy \int_0^{\infty} e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} \text{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du + \\ &+ \sqrt{2} |\beta| |\mu-\mu_n| \frac{1}{\beta^2} \frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi\sqrt{\pi T}} \Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right] \int_K (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} dy \int_0^{\infty} e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} \text{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du + \\ &+ \sqrt{2} |\beta| |\mu-\mu_n| \frac{1}{\beta^2} \frac{e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi\sqrt{\pi T}} \Gamma\left[\frac{\mu+|\mu-\mu_n|}{\beta^2}+1\right] \int_K (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-3} \int_0^{\infty} e^{\frac{2u^2}{\beta^2 T}} \text{sh}(2u) \text{sh}^2(u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) dudy = |\mu-\mu_n| G(\mu_n, \beta). \end{aligned}$$

Оскільки
$$\int_K (y-K) y^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} dy = \frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2} K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|} K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}} \rightarrow \frac{\beta^2}{\mu-\beta^2} K^{\frac{\mu}{\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\mu} K^{\frac{\mu}{\beta^2}},$$

$$\int_K (y-K) y^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-3} dy = \frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-2\beta^2} K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-1} - \frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2} K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-1} \rightarrow \frac{\beta^2}{\mu-2\beta^2} K^{\frac{\mu}{\beta^2}-1} - \frac{\beta^2}{\mu-\beta^2} K^{\frac{\mu}{\beta^2}-1},$$

$$\int_K (y-K) y^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}-2} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) dy = \frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2} K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}} \ln\left(\frac{\beta^2 T K}{2}\right) - \frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|} K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|-\beta^2} \right)^2 K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}} - \left(\frac{\beta^2}{\mu+|\mu-\mu_n|} \right)^2 K^{\frac{|\mu-\mu_n|}{\beta^2}} \rightarrow \frac{\beta^2}{\mu-\beta^2} K^{\frac{\mu}{\beta^2}} \ln\left(\frac{\beta^2 T K}{2}\right) - \frac{\beta^2}{\mu} K^{\frac{\mu}{\beta^2}} \ln\left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right) +$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \right| \left| \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2} \right| \left| \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta^2} \right) \left(\frac{\operatorname{sh}^2(u)}{2 \beta^2 T y} \right)^k \right| - \\ &- \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \left(\frac{\operatorname{sh}^2(u)}{2 \beta_n^2 T y} \right)^k \left| \leq \left| \frac{\mu}{\beta^2} \right| \left| \frac{\beta - \beta_n}{\beta_n^2} \right| \left| \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k \right| + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left| \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta^2} \right) \right| - \\ &- \left(\frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \left| \left(\frac{5}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k \right| + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \left| \frac{3}{2} - \frac{\mu}{\beta^2} \right| \left| \left(\frac{5}{2} - \frac{\mu}{\beta^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta^2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} \right)^k \right| - \\ &- \left(\frac{5}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k - 1 - \frac{\mu}{\beta_n^2} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k \left| \leq \dots \leq |\beta - \beta_n| \left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k \right) \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k + |\beta - \beta_n| \left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| \times \\ &\times \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k \right) \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k + \dots + |\beta - \beta_n| \left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k \right) \left(\frac{2}{2k+1} \right) \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k + \\ &+ \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{5}{2} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} + k \right) \left| \left(\frac{\operatorname{sh}^2(u)}{2 \beta^2 T y} \right)^k - \left(\frac{\operatorname{sh}^2(u)}{2 \beta_n^2 T y} \right)^k \right|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \left| M \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} \right) - M \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta_n^2}, \frac{3}{2}, \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \beta - \beta_n \right| \left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| \frac{\left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k}{k!} \sum_{n=1}^k \frac{2}{2n+1} + \frac{\left| \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y} \right)^k - \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} \right)^k \right|}{k!} \right| \leq \\ &\leq |\beta - \beta_n| \left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y} e^{\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta_n^2 T y}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k-1)!} \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{T y} \right)^k \frac{1}{|\mu|^{\frac{2k+1}{2}}} |\beta - \beta_n| \leq \\ &\leq |\beta - \beta_n| \left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{|\mu| T y} e^{\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{|\mu| T y}} + 2 \left| \frac{\beta - \beta_n}{\sqrt{-\mu}} \right| \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{|\mu| T y} e^{\frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{|\mu| T y}}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} |F(\mu, \beta) - F(\mu, \beta_n)| &\leq \frac{2\sqrt{2}}{T \sqrt{|\mu|^3} \pi T} |\beta - \beta_n| |\beta| \Gamma \left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1 \right] \left(\int_K^{\infty} (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2} \right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} dy \right) \left(\int_0^{\infty} u e^{\frac{\pi^2 - 4u^2}{2\beta^2 T}} \operatorname{sh}(2u) du \right) + \\ &+ |\beta - \beta_n| \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\pi T}} \Gamma \left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1 \right] \left(\int_K^{\infty} (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2} \right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} dy \right) \left(\int_0^{\infty} e^{\frac{\pi^2 - 4u^2}{2\beta^2 T}} \operatorname{sh}(2u) du \right) + |\beta - \beta_n| \left| \frac{C}{\sqrt{-\mu}} \right| \frac{\beta_n \sqrt{2}}{\pi \sqrt{\pi T}} \left(\int_K^{\infty} (y-K) \left(\frac{\beta^2 T y}{2} \right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} dy \right) \times \\ &\times \left(\int_0^{\infty} e^{\frac{\pi^2 - 4u^2}{2\beta^2 T}} \operatorname{sh}(2u) du \right) + |\beta - \beta_n| \frac{\beta_n \sqrt{2}}{\pi \sqrt{\pi T}} \Gamma \left[\frac{\mu}{\beta_n^2} + 1 \right] \left(\int_0^{\infty} \operatorname{sh}(2u) e^{\frac{4u^2 - \pi}{2\mu T}} du \right) \times \\ &\times \int_K^{\infty} (y-K) \left(e^{-\frac{\pi^2}{2\mu T}} \frac{\pi^2}{2|\mu|^{\frac{3}{2}} T} \left(\frac{\beta^2 T y}{2} \right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} + e^{-\frac{\pi^2}{2\mu T}} \left(\frac{v^2 T y}{2} \right)^{\frac{\mu}{v^2} - 2} \frac{2T}{v^3} \left| \left(-2v^2 + \mu - \mu \ln \left(\frac{v^2 T}{2} \right) - \mu \ln(y) \right) \right| \right) dy + \\ &+ |\beta - \beta_n| \frac{\beta_n \sqrt{2}}{\pi \sqrt{\pi T}} \Gamma \left[\frac{\mu}{\beta_n^2} + 1 \right] e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}} \left(\left| \frac{\beta + \beta_n}{\beta^2} \right| + 2 \left| \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \right| \right) \left(\int_K^{\infty} \frac{(y-K)}{y} \left(\frac{\beta^2 T y}{2} \right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} dy \right) \left(\int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{|\mu| T} \operatorname{sh}(2u) e^{-\frac{4u^2}{2|\mu| T}} du \right) = |\beta - \beta_n| R(\mu, \beta_n) \end{aligned}$$

Аналогічно випадку з фіксованим β легко показати, що $R(\mu, \beta_n) \rightarrow R(\mu, \beta) = const \neq 0$ при $\beta_n \rightarrow \beta$. Отже, $F(\mu, \beta_n) \rightarrow F(\mu, \beta)$ з порядком збіжності $|\beta - \beta_n|$.

ВИСНОВКИ. Знайдено оптимальну і справедливу ціни азійського опціону і показано, що об'єктивна ціна азійсько-го опціону в даній моделі збігається за параметрами μ та β на проміжку $\left\{ -1 < \frac{\mu}{\beta^2} < 0 \right\}$ з порядком збіжності $|\mu - \mu_n|$ та $|\beta - \beta_n|$ відповідно.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Фельмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время – МЦНМ – 2008 2. Borodin A., Salminen P. Handbook of Brownian motion: Facts and Formulate-Birkhäuser Verlag – 2002.

В. Васюкович, студ.

ЦЕНЫ АЗИАТСКОГО ОПЦИОНА И ИХ СХОДИМОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрена модель рынка ценных бумаг и азиатский опцион в ней. Вычислена справедливая и объективная цена данного опциона и исследована объективная цена на сходимость относительно параметров и ее порядок.

V.Vaskovych, BA

PRICES OF ASIAN OPTION AND ITS CONVERGENCE RELATIVE PARAMETERS

Model of the securities market and the Asian option in it are discussed. There are calculated fair and objective price for this option, and are researched objective price convergence relative parameters and its rank.

УДК 519.21

3. Вижва, докт. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка
Email: vsa@univ.kiev.ua

**ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ
У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ**

Розглянуто задачу про статистичне моделювання реалізацій однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному евклідовому просторі на основі їх спектрального розкладу. Наведено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій таких випадкових полів. Отримано середньоквадратичну оцінку апроксимації цих випадкових полів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій гаусівських однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі з використанням спектральних коефіцієнтів.

ВСТУП. Методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів та полів у зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки мають широкий діапазон застосування, зокрема це стосується таких напрямків природничих наук, як геологія, геофізика, сейсмологія, метеорологія, океанографія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, та інші. За допомогою методів статистичного моделювання можна згенерувати на комп'ютері реалізації випадкових процесів та полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію.

У статті вивчаються дійснозначні випадкові поля у просторі \mathbb{R}^3 , які однорідні ізотропні та неперервні в середньому квадратичному. Наведено теорему про спектральний розклад таких полів. Отримано оцінку середньоквадратичної апроксимації випадкових полів у тривимірному просторі моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу. Наведено обчислені спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових полів у просторі \mathbb{R}^3 . Розроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій однорідних ізотропних гаусівських випадкових полів із заданими статистичними характеристиками з використанням спектральних коефіцієнтів.

Запропонований у цій статті метод чисельного моделювання однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі є узагальненням такого методу для однорідних випадкових полів на сфері в 3-вимірному евклідовому просторі [5, 14], однорідних ізотропних випадкових полів на площині [4] та стаціонарних періодичних випадкових процесів [3]. Метод статистичного моделювання однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі з використанням спектральних коефіцієнтів доповнює перелік інших розроблених методів чисельного моделювання таких полів, зокрема методу рандомізації [13] та з використанням деякого вигляду розкладу випадкового поля [9].

Методи статистичного моделювання випадкових полів у тривимірному просторі на основі розкладів в ряди розглядалися також в [6, 7, 10–12] та ін.

ОДНОРІДНЕ ТА ІЗОТРОПНЕ ВИПАДКОВЕ ПОЛЕ В ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ \mathbb{R}^3 ТА ЙОГО ЗВУЖЕННЯ НА СФЕРУ. Розглядається дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ в тривимірному евклідовому просторі \mathbb{R}^3 (r, θ, φ – полярні координати). Відомо [5], що неперервне в середньому квадратичному дійснозначне однорідне та ізотропне випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ в просторі \mathbb{R}^3 можна подати у вигляді розкладу в ряд за сферичними гармоніками, який називається спектральним розкладом такого випадкового поля:

$$\xi(r, \theta, \varphi) = c_3 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^m \zeta_m^l(r) S_m^l(\theta, \varphi),$$

де $c_3 = \sqrt{2\pi}$, $\zeta_m^l(r) = \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_m^l(d\lambda)$, причому, $\{Z_m^l(\cdot)\}$ – послідовність ортогональних випадкових

мір на борелівських множинах із інтервалу $[0, +\infty)$, таких, що $M Z_m^l(S_1) Z_{m'}^{l'}(S_2) = \delta_l^{l'} \delta_m^{m'} \Phi(S_1 \cap S_2)$,

де $\Phi(\lambda)$ – неспадна обмежена функція, яку називають спектральною функцією, а сферичні гармоніки $S_m^l(x)$ мають вигляд $S_m^l(\theta, \varphi) = \tilde{c}_{m,l} P_m^l(\cos \theta) e^{i l \varphi}$, де $P_m^l(x)$ – приєднані функції Лежандра,

$$\tilde{c}_{m,l} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu_l (m-l)!}{\pi (m+l)!}} (2m+1), \quad (1)$$

$$\nu_l = \begin{cases} 1, & l \neq 0, \\ 2, & l = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Нагадаємо, що ортонормовані послідовності дійснозначних сферичних гармонік $S_m^l(\theta, \varphi)$ для тривимірному простору зі зміною індексації мають вигляд:

$S_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $S_m^0(\theta, \varphi) = c_m^0 P_m(\cos \theta)$, $m = 1, 2, \dots$, ($P_m(x)$ – поліноми Лежандра степеня m)

$S_m^l(\theta, \varphi) = c_m^l P_m^l(\cos \theta) \cos(l\varphi)$, $m = 1, 2, \dots$, $l = 1, \dots, m$, $S_m^{-l}(\theta, \varphi) = c_m^l P_m^l(\cos \theta) \sin(l\varphi)$, $m = 1, 2, \dots$, $l = 1, \dots, m$.

Кореляційну функцію $B(\rho)$ однорідного ізотропного випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ у тривимірному просторі R^3 можна подати [8, с. 6] у вигляді:

$$B(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{1}{2}}(\lambda \rho)}{\sqrt{\lambda \rho}} d\Phi(\lambda), \tag{3}$$

або (оскільки $J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t / \sqrt{t}$), то можна записати: $B(\rho) = \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \rho}{\lambda \rho} d\Phi(\lambda)$,

де ρ – відстань між векторами $x, y \in R^3$ ($x = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$, $y = (r_2, \theta_2, \varphi_2)$): $\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \psi}$, а $\cos \psi$ – кутова відстань між векторами $x, y \in R^3$: $\cos \psi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Спектральні коефіцієнти $b_m(r)$ обчислюємо за виразом: $b_m(r) = D c_m^l(r) = M |c_m^l(r)|^2$, $l = 1, 2, \dots, h(m, 3)$.

Тоді:

$$b_m(r) = \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}^2(\lambda r)}{\lambda r} \Phi(d\lambda), m = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Можна навести формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів у вигляді виразу, що містить кореляційну функцію випадкового поля. Для цього скористаємось інтегралом 7.7.3(14) із [1, стор. 58]. В нашому випадку маємо:

$$J_{m+\frac{1}{2}}^2(\lambda r) = \frac{2\pi m! \lambda r}{\Gamma(m+1)} \int_0^\pi \rho^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\rho) P_m(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \tag{5}$$

Підставимо (12) в (11) і отримаємо:

$$b_m(r) = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \rho^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\rho) P_m(\cos \psi) \sin \psi d\psi d\Phi(\lambda).$$

Враховуючи вираз (6) для кореляційної функції, можна отримати формулу для обчислення спектральних коефіцієнтів $b_m(r)$ випадкового поля, якщо відома його кореляційна функція $B(\rho)$, а саме:

$$b_m(r) = 2\pi \int_0^\pi B(\rho) P_m(\cos \psi) \sin \psi d\psi$$

або, при $\rho = 2r \sin(\psi/2)$, – відстань між точками сфери радіуса r .

$$b_m(r) = 2\pi \int_0^\pi B(2r \sin \frac{\psi}{2}) P_m(\cos \psi) \sin \psi d\psi.$$

Зауважимо, що якщо розглянути "звуження" випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ на сферу радіуса r , то кореляційну функцію такого випадкового поля можна розкласти в ряд:

$$B(\rho) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=1}^{2m+1} S_m^l(\theta_1, \varphi_2) S_m^l(\theta_2, \varphi_2) \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}^2(\lambda r)}{\lambda r} d\Phi(\lambda).$$

або, по теоремі додавання для сферичних гармонік, маємо:

$$B(\rho) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^\infty (2m+1) P_m(\cos \psi) b_m(r).$$

Наведемо деякі приклади кореляційних та відповідних спектральних функцій для випадкових полів в просторі R^3 .

Приклад 1. Кореляційна функція випадкового поля в тривимірному просторі експоненціального типу (Гауссівська крива) має вигляд:

$$B(\rho) = \exp\{-c \rho^2\},$$

де c ($c > 0$) – деяка стала.

Похідна від спектральної функції в цьому прикладі така:

$$\Phi'(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{\pi} c^3} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4c}\right\}.$$

Приклад 2. Кореляційна функція випадкового поля бesselевого типу має вигляд:

$$B(\rho) = 3\sqrt{\pi/2} \frac{J_{\frac{3}{2}}(c\rho)}{(c\rho)^{\frac{3}{2}}}, c \in R, \tag{6}$$

де $J_p(x)$ – функція Бесселя першого роду p -го порядку.

Така функція належить сімейству Бесселя [11] при значенні параметра $\nu = 3/2$. Загальний вигляд функцій цього сімейства такий:

$$B_\nu(\rho) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \frac{J_\nu(\rho)}{\rho^\nu}, \quad \nu \geq 0. \quad (7)$$

Кореляційній функції (17) випадкового поля в тривимірному просторі відповідає спектральна функція вигляду:

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^3}{c^3}, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \geq c. \end{cases}$$

Приклад 3. Кореляційну функцію випадкового поля із сімейства Бесселя (7) при значенні параметра $\nu = 1/2$ в деякій літературі називають "синусом кардинальним":

$$B(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin c(a\rho), \quad \text{де } \sin c(a\rho) = \frac{\sin a\rho}{a\rho}, \quad a > 0.$$

Враховуючи (7), маємо іншу форму запису цієї кореляційної функції $B(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{\frac{1}{2}}(c\rho)}{\sqrt{c\rho}}$.

Приклад 4. Кореляційна функція випадкового поля типу Коші має вигляд:

$$B(\rho) = \frac{c^2}{\rho^2 + c^2}, \quad c > 0.$$

Більш загальний вираз для функцій такого типу має вигляд:

$$B(\rho) = \frac{c^{n-1}}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad c > 0, \quad n > 1.$$

У цьому прикладі параметр $n = 3$ – це розмірність простору. Відповідна такій кореляційній функції випадкового поля у тривимірному просторі спектральна функція має похідну:

$$\Phi'(\lambda) = c^2 \lambda e^{-c\lambda}.$$

Приклад 5. Можна також розглянути кореляційну функцію типу Коші іншого вигляду, ніж в попередньому прикладі, тобто:

$$B(\rho) = \frac{c^{n+1}}{(\rho^2 + c^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c > 0, \quad n > 1.$$

Потрібно зауважити, що загальний вигляд функцій сімейства Коші [11] такий:

$$B(\rho) = \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)^{-\nu}, \quad \nu > 0, \quad a > 0.$$

У цьому прикладі параметр $\nu = (n+1)/2$.

Спектральна щільність випадкового поля у тривимірному просторі, що відповідає такій кореляційній функції (при $n = 3$), має вигляд:

$$\Phi'(\lambda) = \frac{1}{2} c^3 e^{-c\lambda} \lambda^2.$$

Спектральні коефіцієнти для прикладів 1–6 обчислено в [5]. Результати обчислень спектральних коефіцієнтів для практично важливих кореляційних функцій однорідних та ізотропних випадкових полів у тривимірному просторі наведено в наступній таблиці.

За цією таблицею, використовуючи спектральні коефіцієнти, можна проводити статистичне моделювання реалізацій випадкових полів у тривимірному просторі за допомогою моделі, побудованої на основі спектрального розкладу таких полів.

Наведемо теорему [5] про спектральний розклад однорідного та ізотропного випадкового поля в просторі \mathbb{R}^3 . В такому розкладі мають місце стохастичні інтеграли по дійснозначним випадковим мірам з ортогональними значеннями.

Теорема 1. Однорідне та ізотропне неперервне в середньому квадратичному дійснозначне випадкове поле $\xi(r, \theta, \varphi)$ в просторі \mathbb{R}^3 можна подати у вигляді спектрального розкладу:

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m c_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \left[\cos l\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m,1}^l(d\lambda) + \sin l\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m,2}^l(d\lambda) \right] \quad (8)$$

де $c_{m,l} = \sqrt{\frac{\pi \nu_l (m-l)!}{2 (m+l)!}} (2m+1)$, ν_l – константа (5), а $P_m^l(x)$ – приєднані функції Лежандра, $\{Z_{m,k}^l(\cdot)\}$, $k = 1, 2$, – набори випадкових мір з ортогональними значеннями, що задані на σ -алгебрі борелевських множин $[0, +\infty)$ і такі, що:

$$M Z_{m,k}^l(S_1) Z_{m,k'}^{l'}(S_2) = \delta_l^{l'} \delta_m^{m'} \delta_k^{k'} \Phi(S_1 \cap S_2) \quad (9)$$

Доведення теореми наведено у роботі [5].

Таблиця 1

Кореляційні та спектральні функції та відповідні спектральні коефіцієнти однорідних ізотропних випадкових полів в R^3

$B(\rho)$	$\Phi(\lambda)$	$b_k(r)$
$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{\frac{1}{2}}(c\rho)}{(c\rho)^{\frac{1}{2}}}, c \geq 0.$	$\begin{cases} 0, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \geq c. \end{cases}$	$2\pi^2 \frac{J_{\frac{1}{2}+k}^2(cr)}{cr}$
$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=1}^s p_m \frac{J_{\frac{1}{2}}(c_m \rho)}{(c_m \rho)^{\frac{1}{2}}},$ $\sum_{m=1}^s p_m = 1, p_m > 0, c_m \geq 0.$	$\begin{cases} 0, & \lambda \leq c_1, \\ \sum_{m=1}^i p_m, & c_i < \lambda \leq c_{i+1}, i = \overline{1, s-1} \\ 1, & \lambda > c_s \end{cases}$	$2\pi^2 \sum_{m=1}^s p_m \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(c_m r)}{c_m r}$
$3\sqrt{\pi/2} \frac{J_{\frac{3}{2}}(c\rho)}{(c\rho)^{\frac{3}{2}}}$	$\begin{cases} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^3, & 0 < \lambda < c, \\ 1, & \lambda \geq c. \end{cases}$	$\frac{3\pi^2}{\sqrt{cr}} \left[J_{m+\frac{1}{2}}^2(cr) - J_{m+\frac{3}{2}}(cr) J_{m-\frac{1}{2}}(cr) \right]$
$\exp\{-c\rho^2\}, c > 0$	$\Phi'(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{\pi c^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4c}\right\}$	$\left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2r} \exp\{-2c^2 r\} I_{m+\frac{1}{2}}(2cr^2),$ де $I_m(x)$ – модифікована функція Бесселя першого роду m -го порядку
$\frac{c^2}{\rho^2 + c^2}, c > 0$	$\Phi'(\lambda) = c^2 \lambda e^{-c\lambda}.$	$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{c}{r}\right)^2 Q_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{c^2 + 2r^2}{2r^2}\right),$ де $Q_p(x)$ – функція Лежандра другого роду p -го порядку
$\frac{c^4}{(\rho^2 + c^2)^2}, c > 0$	$\Phi'(\lambda) = \frac{c^3}{2} \lambda^2 e^{-c\lambda}$	$c^{-2} \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)^{-1} \left(\frac{r}{2c}\right)^{2k+1} \times$ $\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2k+m+2)(2m+2k+1)!}{m! \Gamma\left(m+k+\frac{3}{2}\right)^2} (-1)^m \left(\frac{r}{2c}\right)^m.$

Розглянемо розклад випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ в іншому, порівняно із (8), вигляді, ввівши позначення для інтегралів. Такий розклад запишемо виразом:

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m c_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \left[\zeta_{m,1}^l(r) \cos l\varphi + \zeta_{m,2}^l(r) \sin l\varphi \right], \tag{10}$$

де випадкові процеси $\zeta_{m,k}^l(r), k = 1, 2; m = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots, m.$ мають вигляд

$$\zeta_{m,k}^l(r) = \int_0^{\infty} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m,k}^l(d\lambda), k = 1, 2; m = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots, m.$$

Із припущення, що $M\xi(r, \theta, \varphi) = 0$, випливає наступне:

$$M\zeta_{m,k}^l(r) = 0, k = 1, 2; m = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots, m. \tag{11}$$

Теорема 2. Якщо $\xi(r, \theta, \varphi)$ – однорідне ізотропне випадкове поле на R^3 , то

$$M\zeta_{m,k}^l(r) \zeta_{m',k'}^{l'}(r) = \delta_m^{m'} \delta_k^{k'} \delta_l^{l'} b_m(r), k, k' = 1, 2; m, m' = 0, 1, \dots; l, l' = 0, 1, \dots, m, \tag{12}$$

де $\delta_m^{m'}$ – символ Кронеккера, $\{b_m(r)\}, m=0, 1, \dots$ – послідовність додатньо визначених ядер на R_+ , які задовольняють умові $\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)b_m(r) < +\infty$ та мають вигляд (4).

Дисперсію випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ можна визначити за виразом:

$$M\xi^2(r, \theta, \varphi) = D\xi(r, \theta, \varphi) = \pi/2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)b_m(r). \tag{13}$$

Доведення: Розглянемо наступний вираз:

$$M \zeta_{m,k}^l(r) \zeta_{m',k'}^{l'}(r) = M \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m,k}^l(d\lambda) \int_0^\infty \frac{J_{m'+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{1}{2}}} Z_{m',k'}^{l'}(d\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}^2(\lambda r)}{\lambda r} M Z_{m,k}^l(d\lambda) Z_{m',k'}^{l'}(d\lambda).$$

Скориставшись умовою (9) теореми 1 та виразом (4) для спектральних коефіцієнтів, отримаємо (12).

Доведемо рівність (13).

Із теореми додавання для сферичних гармонік випливає, що для будь-яких двох точок x_1 та x_2 із $S_3(S_3$ – одинична сфера в 3-вимірному евклідовому просторі) має місце рівність:

$$\sum_{l=1}^{2m+1} S_m^l(x) S_m^l(x) = \frac{m+1/2}{2\pi}. \tag{14}$$

Тоді дисперсію випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ можна обчислити, враховуючи (10) та (14), за виразом:

$$D\xi(r, \theta, \varphi) = M \xi(r, \theta, \varphi) \xi(r, \theta, \varphi) = 2\pi^2 \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=1}^{2m+1} S_m^l(\theta, \varphi) S_m^l(\theta, \varphi) \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}^2(\lambda r)}{\lambda r} d\Phi(\lambda) = \pi/2 \sum_{m=0}^\infty (2m+1) b_m(r).$$

Теорему доведено.

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОРІДНИХ ІЗОТРОПНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА R^3 . Наведений вище спектральний розклад (10) можна використати для статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних ізотропних випадкових полів на R^3 із заданими статистичними характеристиками. Для побудови наближеної моделі гауссівських полів, що розглядаються, використаємо часткову суму розкладу (10) випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$. Побудована **модель** має такий вигляд:

$$\xi_M(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=0}^m c_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \left[\zeta_{m,1}^l(r) \cos l\varphi + \zeta_{m,2}^l(r) \sin l\varphi \right] \tag{15}$$

Лема. Мають місце нерівності[9]:

$$\sum_{m=M+1}^\infty J_{m+\theta}^2(z) \leq \frac{z^2}{M}, \quad \theta \in [0, 1), \tag{16}$$

та

$$\sum_{m=M+1}^\infty \left(m + \frac{1}{2} \right) J_{m+1/2}^2(z) \leq \frac{5z^4}{4M^2}. \tag{17}$$

Теорема 3. Якщо $\mu_3 = \int_0^\infty \lambda^3 d\Phi(\lambda) < +\infty$, то для всіх $M=1, 2, \dots$ має місце оцінка середньоквадратичного наближення:

$$M |\xi(r, \theta, \varphi) - \xi_M(r, \theta, \varphi)|^2 \leq \frac{5\pi r^3 \mu_3}{4M^2}. \tag{18}$$

Доведення. Розглянемо:

$$M |\xi(r, \theta, \varphi) - \xi_M(r, \theta, \varphi)|^2 = M \left\{ \sum_{m=N+1}^\infty \sum_{l=0}^m C_{m,l} P_m^l(\cos \theta) \left[\cos l\varphi \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{\lambda r}} z_{m,1}^l(d\lambda) + \sin l\varphi \int_0^\infty \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{\sqrt{\lambda r}} z_{m,2}^l(d\lambda) \right] \right\}^2 \tag{19}$$

У виразі (19) виділимо суми при $l=0$ та при $l>0$ і, використовуючи властивості ортогональних випадкових мір і стохастичних інтегралів, отримаємо:

$$M |\xi(r, \theta, \varphi) - \xi_M(r, \theta, \varphi)|^2 = \sum_{m=N+1}^\infty \left[(2m+1) (P_m(\cos \theta))^2 \int_0^\infty \frac{J_{m+1/2}^2(\lambda r)}{\lambda r} d\Phi(\lambda) + \sum_{l=1}^m 2 C_{m,l}^2 (P_m^l(\cos \theta))^2 \int_0^\infty \frac{J_{m+1/2}^2(\lambda r)}{\lambda r} d\Phi(\lambda) \right].$$

Далі, врахуємо рівність $P_m(1) = 1$ та застосуємо теорему додавання для многочленів Лежандра:

$$P_m(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) = P_m(\cos \theta_1) P_m(\cos \theta_2) + 2 \sum_{l=1}^m \frac{(m-l)!}{(m+l)!} P_m^l(\cos \theta_1) P_m^l(\cos \theta_2) \cos l(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тоді маємо $M |\xi(r, \theta, \varphi) - \xi_M(r, \theta, \varphi)|^2 \leq \pi \int_0^\infty \left\{ \sum_{m=M+1}^\infty \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{J_{m+1/2}^2(\lambda r)}{\lambda r} \right\} d\Phi(\lambda) = \pi/2 \sum_{m=M+1}^\infty (2m+1) \int_0^\infty \frac{J_{m+1/2}^2(\lambda r)}{\lambda r} d\Phi(\lambda).$

Використовуючи наведену вище лему, отримаємо таку оцінку:

$$\pi \int_0^\infty \left\{ \sum_{m=M+1}^\infty \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{J_{m+1/2}^2(\lambda r)}{\lambda r} \right\} d\Phi(\lambda) \leq \pi \int_0^\infty \frac{5(\lambda r)^4}{4M^2 \lambda r} d\Phi(\lambda) \leq \frac{5\pi r^3 \mu_3}{4M^2}.$$

Теорему доведено.

Опишемо побудований на основі моделі (15) та оцінки середньоквадратичного наближення (18) однорідних ізотропних випадкових полів $\xi(r, \theta, \varphi)$ на R^3 з обмеженим спектром алгоритм для моделювання реалізацій таких випадкових полів, які розподілені за гауссівським законом.

АЛГОРИТМ.

1. Вибираємо, відповідно до необхідної точності $\varepsilon > 0$, натуральне число M для моделі (15) за допомогою нерівності:

$$\frac{5\pi r^3 \mu_3}{4M^2} < \varepsilon,$$

де $\mu_3 = \int_0^\infty \lambda^3 d\Phi(\lambda)$, де r – полярний радіус точки в тривимірному просторі, в якій генерується реалізація випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$.

2. Моделюємо послідовності гауссівських випадкових величин (випадкових процесів при фіксованому r) $\{\zeta_{m,k}^l(r)\}$, $k = 1, 2; m = 0, 1, \dots; l = 0, 1, \dots, m$, які задовольняють умовам (11), (12).

3. Обчислюємо вираз (15) у заданій точці $(r, \theta, \varphi) \in R^3$ підставляючи в нього обчислені за попередніми пунктами 1 та 2 значення величини M і послідовності гауссівських випадкових величин.

4. Перевіряємо згенеровану в п.3 реалізацію випадкового поля $\xi(r, \theta, \varphi)$ на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння відповідних статистичних характеристик.

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу, а не лише з гауссівським.

ВИСНОВКИ. Із використанням отриманої оцінки середньоквадратичної апроксимації однорідних ізотропних випадкових полів у тривимірному евклідовому просторі моделлю, побудованою на основі спектрального розкладу, зроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій таких випадкових полів. При цьому запропоновано залучати обчислені аналітичні формули спектральних коефіцієнтів для практично важливих типів кореляційних функцій випадкових полів у просторі R^3 .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, Т.2, 1974.
- Вижва З.О. Статистичне моделювання випадкових процесів та полів. Монографія. – К.: ВГЛ "Обрії", – 2011, 388 с.
- Вижва З.О., Вишва А.С. Статистичне моделювання стаціонарних випадкових процесів // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2010. – Вип. 24. – С. 33–39.
- Вижва З.О., Зражевський О.Г. Про статистичне моделювання випадкових полів на площині // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2008. – Вип. 19–20. – С. 43–47.
- Вижва З.О., Ядренко М.І. Статистичне моделювання ізотропних випадкових полів на сфері // Вісник Київського університету. Математика і Механіка – 2000. – №5. – С. 5–11.
- Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М., Наука, – 1982. – 296 с.
- Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ, – 2005. – 259 с.
- Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К.: Наукова думка. – 1980.
- Ядренко М.И., Гамалій О. Статистичне моделювання однорідних та ізотропних тривимірних випадкових полів та оцінки похибок моделювання // Теор. ім. та мат. стат., 1998, №59, С. 171–175.
- Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto - 2009. - 720 p.
- Gneiting T. Symmetric Positive Definite Functions with Applications in Spatial Statistics. Von der Universität Bayeuth zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung. – 1997. – P.107.
- Schlather M. Introduction to Positive Definite Functions and to Unconditional Simulation of Random Fields. Technical Report – 1999. ST–99–10. Lancaster University, UK.
- Vyzhva Z.O. About Approximation of 3-D Random Fields and Statistical Simulation // Random Operator and Stochastic Equation, – 2003, V. 4, No. 3, p. 255–266.
- Vyzhva Z.O. On Approximation of Isotropic Random Fields on the Sphere and Statistical Simulation // Theory of Stochastic Processes. – 1997, V. 3(19), N 3–4, p. 463–467.

Надійшла до редколегії 22.01.13

З. Вижва, докт. физ.-мат. наук

О СТАТИСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрена задача о статистическом моделировании реализации однородных изотропных случайных полей в трехмерном евклидовом пространстве на основе их спектрального разложения. Приведены спектральные коэффициенты для практически важных корреляционных функций таких случайных полей. Получена среднеквадратическая оценка аппроксимации этих случайных полей частичными суммами ряда. Построена модель и сформулирован алгоритм статистического моделирования реализации гауссовских однородных изотропных случайных полей в трехмерном пространстве с использованием спектральных коэффициентов.

Z.Vyzhva, Full Doctor

THE PROBLEM OF STATISTICAL SIMULATION OF HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC RANDOM FIELDS ON THE 3D EUCLIDEAN SPACE

The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the 3D Euclid Spacerealizations has been considered, which was built on the base of it spectral decomposition. It has been given the spectral coefficients for the typical random field's examples. It has been got the mean-squares estimator of this random fields approximation by the partial sums. It has been constructed the model and statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the 3D space algorithm by used the spectral coefficients.

УДК 517.9 + 53(092)

М. Гордієнко, асп., В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**МАТЕМАТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ М.М. БОГОЛЮБОВА
ПЕРІОДУ 1923–1932 РОКІВ**

Проаналізовано наукові праці М.М. Боголюбова періоду 1924–1932 рр. і досліджено процес еволюції напрямків його наукової діяльності.

ВСТУП. Наукові дослідження М.М. Боголюбова (1909–1992 рр.) стосувалися широкого кола наукових проблем з математики, механіки і теоретичної фізики. Основні наукові праці М.М. Боголюбова містяться в 12-ти томному зібранні його наукових праць [12], які об'єднані в 3 серії, що відповідають трьом основним напрямкам його наукової діяльності: математика і нелінійна механіка, статистична механіка, квантова теорія. Серія "Математика. Нелінійна механіка" складається з 4 томів: том 1 "Математика, 1925–1990" [13] містить математичні праці М.М. Боголюбова, а інші три томи присвячені нелінійній механіці і асимптотичним методам в теорії нелінійних коливань. Вибрані праці з математики і нелінійної механіки М.М. Боголюбова також представлені в [10, 11]. Порівняльний аналіз переліку праць в [10–13] і [21–23] показує, що зібрання [10–13] не містять всі наукові праці М.М. Боголюбова, наприклад, – праці періоду з початку його наукової діяльності до 1940 р., зокрема, ті праці, які були надруковані або ж в Україні, або ж за кордоном. Деякі з праць, які не увійшли до [10–13], можна знайти в [20], наприклад, [17, 32]. Аналіз переліку праць М.М. Боголюбова [10–13], [21–23] та [1] показує, що протягом періоду 1924–1932 рр. ним написано 35 наукових праць [4–8, 15–19, 25–49], з них – 9 самостійно [4–6, 25–30]. В [11, 13] можна ознайомитися з монографією М.М. Боголюбова [4], а в [10, 11, 13] – зі статтями [5, 6, 7, 25, 26, 28], окрім зазначених, в [13] також увійшла стаття [18], а в [14] міститься стаття [19]. Праці [7, 15, 16, 27, 29–31, 33–49], на жаль, не доступні.

М.М. Боголюбов розпочав свою наукову діяльність у 1923 р., коли почав відвідувати науковий семінар М.М. Крилова. У 1924 р. М.М. Боголюбов написав свою першу наукову працю "Про поведінку інтегралів лінійного рівняння другого порядку на нескінченності", якою розпочав цикл наукових досліджень з теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань і варіаційного числення. Як зазначено у [13, с. 764], ця праця не збереглася. Перші наукові праці М.М. Боголюбова були пов'язані з тематикою наукових інтересів його наставника – академіка М.М. Крилова, який на той час мав наукові праці з варіаційних методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, зокрема, з застосування методу Рітца та його узагальнень. У 1928 р. М.М. Боголюбов успішно захистив кандидатську дисертацію, був зарахований науковим співробітником кафедри математичної фізики Всеукраїнської академії наук і того ж року отримав престижну премію Болонської академії наук, у 1930 р. йому присуджено науковий ступінь доктора наук (*honoris causa*). 5 жовтня 1932 р., рекомендуючи М.М. Боголюбова для обрання членом-кореспондентом АН СРСР, М.М. Крилов відзначає [9, с. 347]: "Научные работы Н.Н. Боголюбова по предмету их исследования можно разбить на три группы: работы, относящиеся к 1) вариационному исчислению, 2) теории почти периодических функций, 3) приближенному интегрированию дифференциальных уравнений и к изучению колебательных процессов в технике". Далі він пише [9, с. 348]: "С этими работами тесно связаны работы, написанные совместно с акад. Н.Н. Крыловым по заданиям различных отраслевых институтов (например, авиации, промышленности, сооружений), в которых исследуются в основном почти периодические свойства и устойчивость процессов". Отже, станом на початок 30-х рр. ХХ-го ст. М.М. Боголюбов – досвідчений науковець: від початку своєї наукової діяльності по 1932 р., коли його наставник дав процитовану вище характеристику його наукових праць, він – автор 36 статей і 1 монографії, з них, 8 статей і 1 монографію виконав самостійно.

У короткому огляді наукової діяльності М.М. Боголюбова, що відкриває перший том його вибраних праць, Ю.О. Митропольський, С.В. Тябликов, В.П. Шелест зазначають наступне [10, с. 11]: "В 1932 г. Н.Н. Боголюбов совместно с академиком Н.Н. Крыловым приступили к разработке совершенно новой отрасли математической физики – теории нелинейных колебаний, названной ими нелинейной механикой. ... Преодолев большие принципиальные трудности Н.Н. Боголюбов совместно с Н.Н. Крыловым распространили методы теории возмущений на общие неконсервативные системы и построили новые асимптотические методы нелинейной механики"

У 30-х рр. ХХ ст. М.М. Боголюбов поступово від математичних праць і праць з застосування математичних методів до розв'язання задач фізики і практики, які стали основою для створення ним спільно з М.М. Криловим нелінійної механіки, перейшов до задач статистичної механіки, а потім – задач квантової фізики.

У даній статті аналізується наукова діяльність М.М. Боголюбова за період з 1923 р. по 1932 р., тобто з початку його наукової діяльності до заснування нового розділу математичної фізики – нелінійної механіки [24, с. 103].

ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І ОЦІНКИ ПОХИБОК.

Перші наукові праці М.М. Боголюбова були виконані у співавторстві з М.М. Криловим і стосувалися варіаційних методів наближеного розв'язання рівнянь математичної фізики та оцінки похибок наближеного інтегрування. У 1908 р. швейцарський фізик В. Рітц запропонував наближений метод розв'язання диференціальних рівнянь, при якому використовується еквівалентність даного диференціального рівняння деякій задачі варіаційного числення і при цьому наближене інтегрування цього диференціального рівняння зводиться до наближеного розв'язання еквівалентної варіаційної задачі. М.М. Крилов приділив дослідженню метода Рітца значну увагу і назвав цей метод методом варіаційного алгоритму. Зокрема, він відзначив [32], що "хотя еще до него (Ритца, прим. авторов) Релей использовал метод вариационного алгоритма как способ вычисления, тем не менее, совершенно бесспорно, что именно Ритцу принадлежит заслуга открытия общего метода и доказательства в частных случаях сходимости процесса" [20, с. 90].

М.М. Крилов у 20-ті та на початку 30-тих рр. активно займався дослідженням питань про побудову наближених розв'язків диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики. Питання про знаходження наближених розв'язків тих чи інших задач мало важливе значення для розв'язання багатьох задач практики, з якими доводилося мати справу М.М. Крилову в той час. При цьому, як він відзначав у [20, с. 132–149], задачу про наближене інтегрування

диференціальних рівнянь можна сформулювати різними способами. У його численних самостійних і сумісних з М.М. Боголюбовим працях розглядалася задача побудови наближених розв'язків, коли вважалося, що розв'язок даного диференціального рівняння априорі існує та єдиний, і необхідно обчислити цей розв'язок з наперед заданою точністю та знайти вирази для похибки у вигляді, який зручний для практичних обчислень. Також вважалося, що для знаходження наближеного розв'язку має бути використано порівняно невелика кількість математичних операцій, які були пов'язані з розв'язуванням відповідних систем (диференціальних або алгебраїчних) рівнянь для визначення коефіцієнтів відповідних розкладів для наближеного розв'язку. При цьому питання про збіжність процесу побудови наближених розв'язків не було головним.

Для побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь М.М. Крилов і М.М. Боголюбов використовували методи варіаційного алгоритму (метод Релея-Рітца), метод найменших квадратів і його різні узагальнення, метод скінченних різниць і його узагальнення, зокрема, метод "тронсонів", метод спеціальної ортогоналізації (метод Енскога). Значну увагу в їх працях було приділено застосуванню принципу Релея та його обґрунтуванню, розгляду якого було присвячено декілька статей [8, 38, 42]. У [8] автори математично обґрунтували принцип Релея, який стосується зв'язку між розв'язками різницевої і диференціальними рівнянь, що має важливе значення при переході від дискретної механіки до неперервної. У [11, с. 6–7] автори зазначають, що ще у 18-му столітті, у епоху створення диференціального і інтегрального числення, граничний перехід у рівняннях руху для дискретних систем привів до відомих рівнянь математичної фізики з частинними похідними, які, отже, можна вважати рівняннями руху неперервної системи. З іншого боку, граничний перехід можна здійснити не лише у рівняннях для руху дискретної системи, але й у розв'язках цих рівнянь, тобто відповідних рівнянь у скінченних різницях. Природно виникає питання: чи отримаємо один й той самий результат при згаданих вище способах переходу до границі. Керуючись інтуїцією, вчені того часу дали ствердну відповідь на це питання, а такі вчені як Релей і Пуанкаре застосували цей метод при дослідженні деяких важливих задач математичної фізики, зокрема, при розгляді крайових задач. Отже, обґрунтування принципу Релея пов'язано з доведенням того, що розв'язок відповідного різницевого рівняння прямує до розв'язку вихідного диференціального рівняння. Це питання розглянуто у [11, с. 6–29], де запропоновано спосіб обчислення порядку малості похибки n -го наближення для крайової задачі вигляду

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = q(x)y(x) + f(x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \text{де } q(x) > 0, \quad (1)$$

коли потрібно оцінити порядок малості виразу $|y(x_k) - y^{(n)}(x_k)| = |y_k - y_k^{(n)}|$, де $y_k^{(n)}$ – розв'язок системи у скінченних різницях:

$$\frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = q(x_k)y_k^{(n)} + f(x_k), \quad y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0. \quad (2)$$

Тут $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$, $\Delta x = n^{-1}$, $k = \overline{0, n-2}$, і припускається, що перші похідні функцій $f(x)$, $q(x)$ задовольняють умову Ліпшиця. Помітивши, що для функції Гріна $G(x, t) = \begin{cases} (1-x)t, & t \leq x, \\ (1-t)x, & t \geq x \end{cases}$ крайової задачі

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \text{має місце рівність } G_{i,k} = G^{(n)}(r_i, t_k) = \begin{cases} (1-i/k)k/n, & k \leq i, \\ (1-k/n)i/n, & k \geq i \end{cases}, \quad \text{де } G^{(n)}(r_i, t_k) \text{ – функція Гріна відповідної}$$

різницевої крайової задачі вигляду $\frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = 0, y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0, k = \overline{0, n-2}$, М.М. Боголюбов і М.М. Крилов отримали рівність:

$$(y_k^{(n)} - y_k) = -\sum_{i=0}^n G(x_k, t_i) q_i (y_i^{(n)} - y_i) \Delta t + \varepsilon_k^{(n)}, \quad (3)$$

де $\varepsilon_k^{(n)}$ – величина порядку малості n^{-2} . Потім помноживши (3) на вираз $(y_k^{(n)} - y_k)q_k \Delta t$ і підсумувавши по k та скориставшись нерівністю Коші, автори отримали оцінку: $|y_k^{(n)} - y_k| \leq M |\varepsilon_k^{(n)}|$, де M – деяка стала.

В [11, с. 6–29] також розглянуто крайову задачу вигляду (1) з параметром

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda q(x)y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (4)$$

для розв'язків якої і розв'язків апроксимуючого різницевого рівняння

$$\frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = \lambda q(x_k)y_k^{(n)} + f(x_k), \quad y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0, \quad \Delta x = n^{-1}, \quad k = \overline{0, n-2}, \quad (5)$$

отримано співвідношення:

$$y_k^{(n)} = y_k - \lambda \sum_{i=0}^n G(x_k, t_i) q_i (y_i^{(n)} - y_i) \Delta t + \varepsilon_k^{(n)}, \quad y_i^{(n)} = y_i - \sum_{j=1}^{n-2} z_j^{(k)} \frac{\sum_{l=1}^n \varepsilon_l^{(n)} g_l z_l^{(n)} \Delta t}{\lambda - \lambda_k^{(n)}} - \varepsilon_i^{(n)}, \quad (6)$$

де $z_j^{(k)}$, $k = \overline{1, n-2}$, – розв'язки однорідної системи в скінченних різницях вигляду:

$$\frac{\Delta^2 z_i^{(k)}}{\Delta x^2} = \lambda_k^{(n)} q_i z_i^{(k)}, \quad z_0^k = z_n^k = 0, \quad k = \overline{1, n-2}, \quad (7)$$

при цьому величини $z_i^{(k)}$ відповідають значенням параметра $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_{n-2}^{(n)}$, які автори називають різницевиими характеристичними числами.

В [11, с. 6–29] показано, що порядки малості $|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}|$ і $|\varphi_k - \varphi_k^{(n)}|$ рівні n^{-1} , де λ_k і $\varphi_k = \varphi(x_k) - k$ -те характеристичне число і k -та характеристична функція відповідного однорідного рівняння (4), а $\lambda_k^{(n)}$ і $\varphi_k^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_k) - k$ -те характеристичне число і k -та характеристична функція крайової задачі (7), відповідно.

На основі формули (6) отримано оцінку $|y_k^{(n)} - y_k| \leq M |\varepsilon_k^{(n)}|$, де величина $|\varepsilon_k^{(n)}|$ має порядок малості n^{-2} , M – деяка стала, що залежить від $|\lambda - \lambda_k|$. Тут λ_k – характеристичне число, найближче до даного значення параметра λ . Записані вище оцінки обґрунтовують принцип Релея для випадку задачі (4). Далі автори пов'язують задачу (4) та відповідну різницеву задачу (5) за принципом мінімуму, при якому гранична задача розглядається як рівняння Ейлера, яке відповідає умові мінімуму функціонала $I[y]$ для (4) і суми $S(y_i^{(n)})$ для (5). У цьому випадку також визначається порядок малості відповідних величин і обґрунтовується принцип Релея.

М.М. Боголюбов і М.М. Крилов встановили наступну теорему [11, с. 23].

Теорема. Якщо у найпростішій задачі варіаційного числення $\int_0^1 f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = I[y]$ функція під знаком інтеграла задовольняє умови:

$$1. \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geq \alpha_1 > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \leq -\beta < 0,$$

$$2. |f''_{yy}| \leq M = \text{const}, \quad |f''_{yy}|, |f''_{yx}| \leq N(p) + P(y) + C, \quad \text{де } M, N, P, C - \text{сталі},$$

то можна не лише довести принцип Релея, але й обчислити порядок малості похибки, яка відповідає n -му наближенню.

Отже, у [11 с. 6–29] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов не лише розробили методи наближеного розв'язання рівнянь математичної фізики, але й отримали оцінку похибки n -го наближення.

У 1928 р. у [48] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов для оцінки порядку малості похибки для n -го наближення розв'язку диференціального рівняння запропонували новий метод, основою якого став метод скінченних різниць, а саме: вибираючи більш точне зображення для похідних та інтегралів різницями і сумами, вони в результаті отримали краще наближення. Того ж року, у [41] запропоновано метод побудови наближених розв'язків задач математичної фізики на основі методу відрізків, коли інтервал розбивається на n частин, а функції замінюються кусково-сталими функціями. Як наслідок, відповідне рівняння Штурма-Ліувілля є рівнянням зі сталими коефіцієнтами на кожному з інтервалів $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, на кінцях яких має виконуватися умова Вейерштрасса-Ердмана. У цій статті автори також отримали оцінки похибок для власних функцій і характеристичних чисел.

У 1929 р. М.М. Боголюбов і М.М. Крилов розглянули методи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь. У статті [34] вивчено задачу про наближене розв'язання інтегрального рівняння, до якого можна звести задачу Діріхле. У статті [46] зазначено, що задача наближеного обчислення фундаментальних чисел, найближчих до заданого числа, можна сформулювати також для інтегральних рівнянь. В якості прикладу автори розглянули лінійне однорідне

інтегральне рівняння $y(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t) y(t) dt = 0$, ядро якого $K(x,t)$ є симетричним. У цілому ця стаття присвячена

проблемі обчислення фундаментальних чисел. Автори показали, що застосування методу найменших квадратів та методу Рітца (згідно термінології М.М. Крилова – метод варіаційного алгоритму) дозволяє знайти корені визначника Фредгольма. У цій статті також встановлено зв'язок між методом найменших квадратів і методом Рітца. Протягом 1930–1931 рр. М.М. Боголюбов і М.М. Крилов продовжили розвиток методів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. Зокрема, вони застосували метод Рітца і метод зведення для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу.

У праці [17] М.М. Боголюбов за допомогою методу узагальненого гармонічного аналізу довів існування розв'язку мішаної крайової задачі вигляду

$$\begin{cases} A_0(x)u_{xx} + A_1(x)u_{xt} + A_2(x)u_{tt} + A_3(x)u_x + A_4(x)u_t + A_5(x)u = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

який і похідні якого, що входять у рівняння, на нескінченності зростають не швидше, ніж $\exp(Mt)$, де M – деяка стала, за умов виконання нерівностей $A_0(x) < -\alpha$, $A_2(x) > \alpha$, $A_5(x) > 0$, де $\alpha > 0$ – деяке число, і отримав оцінки для n -го наближення розв'язку задачі (8).

Значну увагу М.М. Боголюбов і М.М. Крилов приділили виконанню наукових досліджень на замовлення проектних організацій, які були пов'язані з питаннями наближеного обчислення розв'язків певних диференціальних рівнянь. Так, наприклад, Інститут споруд (Харків) запропонував розв'язати наступну задачу [14, с. 263]: необхідно знайти найбільше значення напружень, прогибів і моментів балки, що лежить на пружній основі, без знаходження функцій, які їх описують. Оскільки, положення балки описується диференціальним рівнянням 4-го порядку вигляду

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + ky = y(x), \quad (9)$$

де E, k – сталі, $l = l(x)$, то з математичної точки зору це означає, що необхідно встановити обмеження для максимальних значень розв'язку $y(x)$ і його другої похідної $y''(x)$ диференціального рівняння (9). При цьому мають виконуватися певні крайові умови, а саме (один із зазначених нижче випадків):

- а) $y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0$ (балка з закріпленими кінцями);
- б) $y''(0) = y''(l) = y'''(0) = y'''(l) = 0$ (балка вільно лежить);
- в) $y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0$ (балка шарнірно закріплена на кінцях).

Взагалі кажучи, згадані максимуми є деякими функціями від коефіцієнтів рівняння (9), але знайти ці максимуми у загальному випадку так само складно, як і знайти сам розв'язок. М.М. Боголюбов і М.М. Крилов, використовуючи метод послідовних наближень, отримали обмеження зверху та знизу для максимальних значень розв'язку задачі (9), при цьому запропоновані ними формули були зручними для практичного використання [14, с. 263–275].

ПРЯМІ МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. У 1923 р. М.М.Крилов опублікував статтю [50], в якій ним було доведено низку теорем, з яких як частинний випадок слідували відомі на той час узагальнення основної леми варіаційного числення.

Перші самостійні наукові дослідження М.М. Боголюбова стосувалися теоретико-функціонального напрямку варіаційного числення. Цей напрямок був започаткований Д. Гільбертом, який першим сформулював у загальному вигляді проблему існування абсолютного екстремуму інтеграла. Для розв'язання цієї проблеми він запропонував метод, який принципово відрізнявся від класичних методів варіаційного числення того часу, суттєво узагальнивши клас допустимих ліній за рахунок розгляду спряжених кривих. Саме це розширення класу допустимих ліній було принциповим моментом методу Д.Гільберта, який він застосував для розв'язання наступної задачі: серед деякого класу допустимих ліній необхідно знайти ту лінію, на якій досягається абсолютний мінімум інтегралу

$$J = \int_{S_2}^{S_1} F(x, y, x', y') dS .$$

При записі даного інтегралу використовується параметричне рівняння лінії, а в якості параметру використовується натуральний параметр (довжина дуги).

Довівши існування кривої, що надає абсолютний мінімум інтеграла J серед спряжених кривих, Д.Гільберт сформулював проблему про аналітичність розв'язку. Йому вдалося показати, що екстремальна крива задовольняє рівняння Ейлера і має неперервну другу похідну. У подальшому теоретико-функціональні методи Д.Гільберта були розвинені у працях італійського математика Л.Тонеллі, який використовуючи інтеграл Лебега, побудував теорію абсолютного екстремуму варіаційних задач вигляду

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx ,$$

при цьому, він розглянув в якості допустимих ліній, що задаються абсолютно неперервними функціями. Тим самим, було розширено клас допустимих ліній, доведено існування абсолютного екстремуму для широкого класу варіаційних задач і встановлено аналітичність розв'язку задачі.

Значним кроком вперед у розвитку результатів Л. Тонеллі стали дослідження М.М. Боголюбова, які стосувалися розробки прямого методу розв'язання варіаційних задач і які було розпочато ним у його кандидатській дисертації "Про деякі нові методи в варіаційному численні" (1926) на прикладі найпростішої задачі варіаційного числення про абсолютний мінімум інтеграла Лебега вигляду

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx .$$

Тут припускається, що функція $f(x, y, z)$ – неперервна разом зі своїми частинними похідними до другого порядку включно, функція $y(x)$ — диференційована майже всюди на інтервалі (a, b) , задовольняє умови $y(a) = a_1, y(b) = b_1$, де a, b, a_1, b_1 – деякі сталі числа, та її перша похідна є інтегрованою.

У 1927 р. було оголошено конкурс на здобуття премії імені Адольфо Мерлані, присудження якої було доручено Болонській Академії наук. При цьому було обумовлено, що премія присуджується за кращу наукову працю на тему "Вивчення прямими методами екстремальних властивостей криволінійного інтегралу $I(C) = \int_C F(x, y, x', y', x'', y'') dt$ " [3, с. 44].

Значення цього інтегралу для дослідження екстремальних властивостей помітив ще Д.Гільберт, який вивчав цей інтеграл, хоча і не зумів дослідити його повністю.

М.М. Боголюбов розглянув задачу знаходження мінімуму криволінійного інтеграла

$$\int_C F(x, y, x', y', x'', y'') dt , \tag{10}$$

де функція $F(x, y, x', y', x'', y'')$ є неперервною, якщо $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

Він показав, що $I(C)$ завжди можна подати у вигляді

$$\int_0^{L_C} f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) ds , \tag{11}$$

де $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ є неперервною функцією своїх аргументів і періодичною за θ з періодом 2π , x, y, θ, s – відповідно координати, кут напрямку і дуга поточної точки кривої C , L_C – довжина кривої C , а вирази (10) і (11) є еквівалентними, причому існує взаємно однозначне співвідношення [11, с. 52–53], при якому

$$f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) = F\left(x, y, \cos \theta, \sin \theta, -\frac{d\theta}{ds} \sin \theta, \frac{d\theta}{ds} \cos \theta\right), \quad F(x, y, x', y', x'', y'') = f\left(x, y, \arctg \frac{y'}{x'}, \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\right) (x'^2 + y'^2)^{1/2}.$$

Це дозволило М.М. Боголюбову отримати необхідні і достатні умови існування абсолютного екстремуму для інтеграла вигляду (10). Він також запропонував метод, який можна застосовувати як до напівнеперервних, так і до ненапівнеперервних функціоналів, в той час, як методи Л. Тонеллі можна було застосовувати лише до напівнеперервних функціоналів. Ці результати увійшли до праці М.М. Боголюбова "Застосування прямих методів до однієї проблеми варіаційного числення", яку він у 1927 р. подав на здобуття премії імені Адольфо Мерлані Болонської Академії наук. Згодом згадані результати отримали свій подальший розвиток у працях М.М. Боголюбова, які він доповів 4 квітня 1930 р. на семінарі з математичної фізики (керівник – М.М. Крилов), прочитавши доповідь "Застосування нових методів до однієї проблеми варіаційного числення", де було розглянуто нові екстремальні властивості інтеграла $I(C) = \int_C F(x, y, x', y', x'', y'') dt$.

У статті [11, с. 51 – 97] та більш детально у монографії [13, с. 40 – 160], що присвячена викладу прямих методів, методу утворення мінімізуючих послідовностей, опису результатів Л.Тонеллі, вивченню загального (неквазірегулярного) випадку, властивостям розв'язків рівняння Ейлера, підсумовано основні результати М.М.Боголюбова з теорії варіаційного числення, які полягають у наступному:

1. Задача про абсолютний мінімум інтеграла $I(C) = \int_0^{L_C} f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) ds$, де $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ – неперервна функція своїх аргументів і періодична за θ з періодом 2π на множині M кривих, кути напрямку $\theta(s)$ яких мають обмежену варіацію, x, y, θ, s – відповідно, координати, кут напрямку і дуга поточної точки кривої C , L_C – довжина кривої C , не має, взагалі кажучи, розв'язку.

2. Якщо функція $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ задовольняє нерівність $\left|f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)\right| \leq A \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^\delta + B$, де A, B – обмежені для обмежених x, y ; $\delta < 1$ – фіксоване додатне число, то задача про абсолютний мінімум криволінійного інтеграла $I(C)$ в полі D кривих, кути напрямку яких абсолютно неперервні і задовольняють тим же крайовим умовам, що і криві поля M , не має розв'язку.

3. Нехай $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ є двічі диференційованою функцією, що задовольняє нерівність

$$A(x, y) \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta} + B(x, y) \geq f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) \geq k \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta},$$

де k, δ – фіксовані додатні числа, $A(x, y), B(x, y)$ – обмежені при обмежених значеннях аргументів. Тоді границя

(при $\varepsilon \rightarrow 0$) нижньої межі криволінійного інтеграла $I(C) = \int_0^{L_C} f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) ds$ у полі $D_\varepsilon(C)$ кривих C класу P , що ма-

ють разом з C спільний окіл (ε) порядку 1, дорівнює криволінійному інтегралу $J(C) = \int_0^{L_C} \Phi\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) ds$.

4. Якщо функція $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ задовольняє умови

$$f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right) \leq A(x, y, \theta) \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta} + B(x, y, \theta), \quad \left|f'_x\right| \leq A(x, y, \theta) \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta} + B(x, y, \theta), \quad (12)$$

$$\left|f'_y\right| \leq A(x, y, \theta) \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta} + B(x, y, \theta), \quad \left|f'_\theta\right| \leq A(x, y, \theta) \left|\frac{d\theta}{ds}\right|^{1+\delta} + B(x, y, \theta), \quad (13)$$

де $A(x, y, \theta), B(x, y, \theta)$ – обмежені при обмежених значеннях аргументів, то для існування кривої, на якій досягається абсолютний мінімум інтеграла $I(C)$ в полі D , необхідно і достатньо, щоб серед кривих (завжди існуючих), на яких досягається абсолютний мінімум для $J(C)$ в полі D , існувала крива, яка не має спільної дуги з "особливими кривими" даної задачі відшукування мінімуму.

5. Якщо функція $f\left(x, y, \theta, \frac{d\theta}{ds}\right)$ задовольняє нерівності (12), (13), то в полі D існує принаймні один розв'язок рівняння Ейлера (що відноситься до $I(C)$), який складається зі скінченної кількості екстремалей. Більш того, яким би не було ε , завжди можна поставити йому у відповідність у полі D принаймні один розв'язок рівняння Ейлера (що відноситься до $I(C)$), на якому $I(C)$ набуває значення, яке відрізняється не більше ніж на ε від нижньої межі i_D .

ТЕОРІЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ. У 1923 р. датський математик Г. Бор запропонував поняття майже періодичної функції: *неперервна на всій дійсній осі функція $f(t)$ називається майже періодичною, якщо для всіх $\varepsilon > 0$ існує таке число $L_\varepsilon > 0$, що в кожному інтервалі довжини L_ε існує таке число τ_ε , що $|f(t + \tau_\varepsilon) - f(t)| \leq \varepsilon$ для всіх $t \in (-\infty, +\infty)$.*

Це означення Бора узагальнює поняття періодичної функції. Задовго до Г. Бора відомий латвійський математик П. Боль запропонував поняття квазіперіодичної функції, згідно з яким неперервна на всій дійсній осі функція $f(t)$ називається квазіперіодичною, якщо існують такі лінійно незалежні дійсні числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, що будь-якому $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність η_ε так, що кожне число τ_ε , яке задовольняє умову $R(\tau_\varepsilon, \omega_k) \leq \eta_\varepsilon, k = \overline{1, m}$, є майже

періодом функції $f(t)$, тобто $|f(t + \tau_\varepsilon) - f(t)| \leq \varepsilon$ для всіх $t \in (-\infty, +\infty)$. Тут позначено $R(x) = |x - E(x)|$, де $E(x)$ – найближче до x ціле число. З означення П. Боля випливає, що будь-яку квазіперіодичну функцію можна подати у вигляді $f(t) = F(\omega, t, \dots, \omega_m t)$, де $F(x_1, \dots, x_m)$ – неперервна 1-періодична функція своїх змінних.

На основі свого означення Г. Бор довів теорему про рівномірну тригонометричну апроксимацію.

У подальшому поняття майже періодичної функції Бора узагальнювалося, було доведено низку теорем про тригонометричну апроксимацію (Н. Вінер (1925), К. Валле-Пуссен (1927), С. Бохнер (1927), Г. Вейль (1927)).

М.М. Боголюбов у [26–28] розглянув питання, які стосувалися теорії майже періодичних функцій. Результати цих статей М.М. Боголюбов подав на семінарі кафедри математичної фізики у доповідях "До теорії майже періодичних функцій" (24 травня 1930 р.) та "Про тригонометричне зображення функцій на нескінченному інтервалі $(-\infty; +\infty)$ " (6 листопада 1930 р.) [2, с. 123]. З приводу цих праць М.М. Крилов зазначив [9, с. 348]: "По теории почти периодических функций Н.Н. Боголюбовым исследовано главным образом влияние процессов суммирования произвольных функций на появление в предделе почти периодических свойств. С помощью этих исследований им установлены различные теоремы, относящиеся к равномерному приближению почти периодических функций тригонометрическими суммами."

С этими работами тесно связаны работы, написанные совместно с акад. Н.Н. Крыловым по заданиям различных отраслевых институтов (например, авиации, промышленности, сооружений), в которых исследуются в основном почти периодические свойства и устойчивость процессов".

У [11, с. 44–50] М.М. Боголюбов встановив, що теореми Г. Бора, Н. Вінера, Г. Вейля про апроксимацію майже періодичної функції на всій дійсній осі з допомогою формально побудованих сум $\sum_p A_p e^{i\Lambda_p t}$, де Λ_p – дійсні числа, можна розглядати як прямі наслідки наступного загального твердження.

Теорема [11, с. 44–45]. Нехай $p_s^{(m)}(\varepsilon)$, $q_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\tau_s^{(m)}(\varepsilon)$, $\delta_s^{(m)}(\varepsilon)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$, $m = 1, 2, \dots$, – послідовності чисел, з яких $p_s^{(m)}(\varepsilon)$, $q_s^{(m)}(\varepsilon)$ можуть бути комплексними, які задовольняють нерівності:

$$\begin{aligned} \tau_{s+1}^{(m)} - \tau_s^{(m)} &\geq \alpha > 0, \quad |\tau_{\pm m}^{(m)}| \leq am, \quad \sum_{s=-m}^m |p_s^{(m)}|^2 (2m+1) \leq A, \\ \delta_{s+1}^{(m)} - \delta_s^{(m)} &\geq \alpha > 0, \quad |\delta_{\pm m}^{(m)}| \leq am, \quad \sum_{s=-m}^m |q_s^{(m)}|^2 (2m+1) \leq A, \end{aligned}$$

де α, a, A – додатні сталі.

Нехай $f_m(t)$, $m \rightarrow \infty$, – деяка послідовність функцій, які можуть набувати комплексні значення, і які задовольняють умову $\frac{1}{6am} \int_{-3am}^{3am} |f_m(t)|^2 dt \leq B = \text{const}$, $m \rightarrow \infty$. Тоді для будь-якого додатного числа $\delta \leq \alpha$ з послідовності $[m]$ можна виділити таку послідовність $[\mu]$, $\mu \rightarrow \infty$, що у кожному скінченному інтервалі дійсної осі має місце рівномірна збіжність

$$\frac{1}{4\delta^2} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \left\{ \sum_{s=-\mu}^{s+\mu} \sum_{r=-\mu}^{r+\mu} p_s^{(\mu)} q_r^{(\mu)} f_\mu(t + \tau_s^{(\mu)} + \delta_r^{(\mu)}) \right\} dt^2 \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{+\infty} A_p e^{i\Lambda_p t},$$

де Λ_p – дійсні числа і ряд $\sum_{p=1}^{+\infty} |A_p|$ збігається.

У статті [11, с. 98–108] М.М. Боголюбов продовжив вивчення майже періодичних функцій і довів для них низку теорем про тригонометричну апроксимацію. Зокрема, він показав, що основні теореми теорії майже періодичних функцій є наслідком деяких загальних теорем, що стосуються довільних обмежених функцій. М.М. Боголюбов довів наступні дві теореми.

Теорема IV [11, с. 103–104]. Якщо кожному числу $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність такі числа $l(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$, $k(\varepsilon)$, де $k(\varepsilon)$ – ціле, так, що у кожному інтервалі довжини $l(\varepsilon)$ існують числа $\tau_{r,\varepsilon}$, $r = 1, 2, \dots, k(\varepsilon)$, яким можна поставити у відповідність числа $A_{r,\varepsilon}$, $r = 1, 2, \dots, k(\varepsilon)$, так, що виконуються нерівності

$$\left| f(t) - \sum_{r=1}^{k(\varepsilon)} A_{r,\varepsilon} f(t + \tau_{r,\varepsilon}) \right| \leq \varepsilon, \quad |A_{r,\varepsilon}| \leq A(\varepsilon), \quad \tau_{r+1,\varepsilon} - \tau_{r,\varepsilon} \geq \alpha(\varepsilon), \quad A(\varepsilon)(1 + k(\varepsilon)) \leq A = \text{const},$$

і якщо при цьому функція $f(t)$ є неперервною і обмеженою в кожному інтервалі, то цю функцію можна рівномірно апроксимувати тригонометричними сумами.

Теорема V [11, с. 106–107]. Якщо кожному числу $\varepsilon > 0$ можна поставити у відповідність такі числа $l(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$, $k(\varepsilon)$, де $k(\varepsilon)$ – ціле, так, що у кожному інтервалі довжини $l(\varepsilon)$ існують числа $\tau_{r,\varepsilon}$, $r = 1, 2, \dots, k(\varepsilon)$, яким можна поставити у відповідність числа $A_{r,\varepsilon}$, $r = 1, 2, \dots, k(\varepsilon)$, так, що виконуються нерівності

$$\int_{t-1}^{t+1} \left| f(t) - \sum_{r=1}^{k(\varepsilon)} A_{r,\varepsilon} f(t + \tau_{r,\varepsilon}) \right|^2 dt \leq \varepsilon, \quad |A_{r,\varepsilon}| \leq A(\varepsilon), \quad A(\varepsilon)(1 + k(\varepsilon)) \leq A = \text{const}, \quad \tau_{r+1,\varepsilon} - \tau_{r,\varepsilon} \leq \alpha(\varepsilon),$$

і якщо також $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \leq C = \text{const}$, $T \rightarrow \infty$, то кожному додатному ε можна поставити у відповідність таку тригонометричну суму $P_\varepsilon(t)$, що $\int_{t-1}^{t+1} |f(t) - P_\varepsilon(t)|^2 dt \leq \varepsilon$ для всіх дійсних значень t .

Теореми IV, V узагальнюють теореми Г. Бора і Н. Вінера про тригонометричну апроксимацію майже періодичних функцій.

ІНЖЕНЕРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ. Теорія коливань зацікавила М.М. Боголюбова ще у юності. О.М. Боголюбов у [3, с. 40] пригадує: "Уважне опрацювання товстих томів Хвольсона, у яких було зібрано все, що фізики знали на кінець XIX століття, наштотнуло його (М.М. Боголюбова, прим. авторів) думку на одне явище, яке постійно з'являлось в усіх феноменах фізики – коливання. Очевидно, в коливаннях містилась суть більшості, а можливо і всіх, феноменів природи, які так детально і точно описували фізики". У 1925 р. М.М. Боголюбов самостійно виконав наукову роботу [11, с. 40–43], якою було започатковано один з напрямків спільної наукової діяльності М.М. Боголюбова і М.М. Крилова – дослідження нелінійних коливань і вивчення нелінійних диференціальних рівнянь, якими можна описати нелінійні коливальні процеси.

У вступі до статті [11, с. 40–43] М.М. Боголюбов зауважив, що у техніці доводиться часто мати справу з коливальними рухами. Якщо припустити, що основна сила пропорційна зміщенню, то рух матеріальної точки описується диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами і у цьому випадку вимушені коливання обчислюються дуже просто. Але, якщо основна сила не пропорційна зміщенню, то питання про обчислення вимушених коливань значно ускладнюється. Такий рух можна описати, якщо основну силу подати у вигляді многочлена третього степеня відносно зміщення.

У [11, с. 40–43] М.М. Боголюбов довів збіжність методу послідовних наближень для розв'язку рівняння Дюфінга $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = k \sin \omega t$, коли $x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = x(t)$, $x(0) = 0$, за умови, що система є резонансною, тобто $\alpha < \frac{8\omega^2}{\pi^2}$.

Перше наближення будується методом Рітца. Цей метод запропонував Дюфінг, проте він не встановив його збіжність.

Низка дослідницьких праць М.М. Боголюбова і М.М. Крилова стосується вивчення коливальних процесів в радіотехнічних пристроях і електричних машинах. Зокрема, вивчаючи принципи роботи і будову індикаторів, вони розглядали питання загальної теорії синхронізації, використовуючи методи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, при цьому значну увагу приділяли вивченню явища синхронізації, яке мало важливе значення при створенні індикаторних приладів. У 1928 р. у спільній статті [44] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов розглянули питання про інтегральну синхронізацію у сенсі Блонделя для випадку, коли досліджувана система описується диференціальним рівнянням другого порядку вигляду $m\ddot{q} + \chi\dot{q} + \rho q = k(t)$, де $k(t)$ – T -періодична функція. Автори отримали значення верхньої межі для пунктуальної похибки повної синхронізації у сенсі Блонделя, а також значення для середньої квадратичної похибки.

Стаття [7] присвячена знаходженню значень параметрів m , λ , c для рівняння $m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$, при яких власні коливання системи, що описується цим рівнянням, затухають якомога швидше, тобто для випадку так званої часткової синхронізації у сенсі Корню, і при цьому періодичний розв'язок цього рівняння повинен майже не відрізнятися від розв'язку, який відповідає повній або інтегральній синхронізації у сенсі Блонделя. Використовуючи наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь, М.М. Боголюбов і М.М. Крилов отримали оцінки для середніх квадратичних і пунктуальних похибок повної синхронізації (у сенсі Блонделя) за умови, що часткова синхронізація у сенсі Корню має місце.

Стаття [43] присвячена уточненню так званих індикаторних діаграм. У ній розглянуто диференціальне рівняння $m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + cy = f(t)$ і розроблено метод, який автори назвали "методом зміщення діаграм", за допомогою якого, застосовуючи звичайні графічні способи, можна "корегувати діаграми", тобто за даною діаграмою будувати інші діаграми, які в певному сенсі апроксимують графік шуканої функції з наперед заданою точністю. Тут також отримано оцінки для середньої квадратичної і пунктуальної похибок у сенсі Корню і у сенсі Блонделя.

У 1932 р. було надруковано 9 спільних праць М.М. Боголюбова і М.М. Крилова [15, 16, 19, 33, 36, 37, 39, 40, 47], де вивчалися нелінійні коливання. Три з цих праць [36, 39, 47] опубліковані у трьох послідовних повідомленнях Паризької Академії наук і містили нові методи, за допомогою яких можна досліджувати як періодичні, так і квазіперіодичні коливання. У статті [39] отримано перші наближення для розв'язку рівняння $\frac{d^2l}{dt^2} + \omega^2 l = \varepsilon f\left(\frac{dl}{dt}\right) + E \sin \alpha t$, яке

описує нелінійні коливання і зустрічається у радіотехніці [21, с. 390]. Автори вивчили квазіперіодичні режими, що виникають в автоколивальній системі під дією зовнішньої періодичної сили і отримали низку результатів, що стосуються аналізу резонансних явищ у нелінійному випадку, причому, крім основного резонансу розглянуто і так звані демультіплікаційні резонанси, які, як і основний резонанс, характеризуються зникненням явища биття всередині деяких зон, ширину і положення яких було визначено у цій праці.

У поданій на Перший міжнародний електротехнічний конгрес (Париж, 1932 р.) доповіді [40] М.М. Боголюбов і М.М. Крилов запропонували нові методи нелінійної теорії регулювання. Зокрема, вони розробили прийом, за допомогою якого систему n диференціальних рівнянь з n невідомими, що описують роботу n синхронних машин, завжди можна звести до одного рівняння з одним невідомим і отримали умови, яким мають задовольняти моменти зовнішніх навантажень, дослідили вплив моменту затухання на стійкість системи за Ляпуновим, вивчили критерії стійкості її роботи, а також проаналізували області динамічної та статичної стійкості. Ці результати того року були опубліковані у монографії [16] і мали важливе практичне значення, зокрема, при побудові електростанцій.

Окрім задач про стійкість паралельної роботи електричних машин у 1932 р. за завданням Харківського авіаційного заводу М.М. Боголюбов і М.М. Крилов проаналізували повздовжню стійкість літака для випадку його польоту з вимкненим двигуном і нерухомими рулями. Дослідження проведено шляхом поширення методів Гюльдена і Ліндштедта на неконсервативну систему вигляду $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_i^2 x_i = \varepsilon f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$, де $i = 1, 2, \dots, n$. Результати опубліковано у монографії [15], в якій автори розпочали роботу над створенням асимптотичних методів нелінійної механіки.

ВИСНОВКИ. Проаналізовано наукову діяльність М.М. Боголюбова періоду 1923–1932 рр. і досліджено еволюцію напрямків його наукової творчості протягом зазначеного періоду часу, аналіз якої дозволяє встановити зв'язок між різними напрямками наукових досліджень вченого, розкрити процес еволюції його наукових поглядів та ідей, прослідкувати, за яких умов і під впливом яких факторів відбувалося формування стилю наукової діяльності М.М. Боголюбова. Встановлено, що протягом 1923–1932 рр. основними напрямками наукових досліджень були: варіаційні методи наближеного розв'язання рівнянь математичної фізики і оцінка похибок наближеного інтегрування, теорія майже періодичних функцій, прями методи варіаційного числення, інженерні задачі теорії коливань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Архів Інституту математики НАН України, особова справа М.М.Боголюбова, арк. 14–20. 2. Боголюбов А.Н. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов // Историко-математич. исследования. Серия 2. – М.: "Янус", 1996. – Вып. 1 (36), № 2. – С. 118–127. 3. Боголюбов А.Н. Н.Н. Боголюбов. Жизнь. Творчество. – Дубна: ОИЯИ, 1996. – 182 с. 4. Боголюбов М.М. Нові методи в варіаційному численні. – Харків; Київ: Техтеоретвидав., 1932. – 111 с. 5. Боголюбов М.М. Про наближене розв'язання диференціальних рівнянь // Збірник праць Ін-ту технічної механіки ВУАН. – 1927. – Вип.2. – С. 79–87. 6. Боголюбов М.М. Про обчислення вимушених хитань, що справджують певні нелінійні диференціальні рівняння // Зб. праць Ін-ту тех. механіки ВУАН. – 1927. – Вип.2. – С. 89–92. 7. Боголюбов М.М., Крылов М.М. До теорії синхронізації // Записки фіз.-мат. відділу ВУАН. – К., 1930. – Т. 4, вип.4. – С. 299–302. 8. Боголюбов М.М., Крылов М.М. Про Rayleigh'ів принцип в теорії диференціальних рівнянь математичної фізики та про одну Ейлерову методу в варіаційнім численні // Труды фіз.-мат. відділу ВУАН. – К., 1926. – Т. 3, вип.3. – С. 39–57. 9. Боголюбов Н.Н. Боголюбов Николай Николаевич // Физики о себе. – Л.: Наука, 1990. – С. 345–348. 10. Боголюбов Н.Н. Избранные труды: в 3 т. / Ред.-сост. Ю.А.Митропольский. – К.: Наукова думка, 1969. – Т. 1. – 646 с. 11. Боголюбов Н.Н. Избранные труды по математике / Под ред. В.С.Владимирова, А.Д.Суханова; ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 560 с. 12. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов: в 12 т. / Ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: Наука, 2005 – 2009. 13. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов: в 12 т. / Ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: Наука, 2005. – Т. 1. – 776 с. 14. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов: в 12 т. / Ред.-сост. А.Д.Суханов. – М.: Наука, 2005. – Т. 2. – 832 с. 15. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. Исследование продольной устойчивости аэроплана. – М.; Л.: Гос. Авиаавтотрактиздат., 1932. – 60 с. 16. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. О колебаниях синхронных машин. Об устойчивости параллельной работы п синхронных машин. – Харків; Київ: Энерговидав, 1932. – 98 с. 17. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. О некоторых теоремах, касающихся существования интегралов дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. – 1931. – № 3. – С. 323–344. 18. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. Определение максимальных значений некоторых величин (прогибов, моментов и т. д.) с помощью специальных методов, выработанных для снижения мажораций этих величин // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. – 1931. – № 6. – С. 771–785. 19. Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М. Основные проблемы нелинейной механики. – М.; Л.: Гостехтеоретикоиздат., 1932. – 23 с. 20. Крылов Н.М. Избранные труды: в 3 т. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 2. – 307 с. 21. Крылов Н.М. Избранные труды: в 3 т. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – Т. 3. – 397 с. 22. Митропольский Ю.О., Боголюбов О.М. Микола Митрофанович Крылов. – К.: Наукова думка, 1979. – 90 с. 23. Николай Николаевич Боголюбов // Материалы к библиографии ученых СССР: Серия математики, вып. 8. – М.: Изд-во АН СССР, 1959 – 50 с. 24. Самойленко А.М. Н.Н.Боголюбов и нелинейная механика // Успехи матем. наук. – 1994. Т. 49. – вып. 5(299). – С. 103–146. 25. Bogoliouboff N.N. Sur l'application des methodes directes a quelques problemes du calcul des variations // Annali di matematica pura ed applicata. Serie 4. – 1931. – Т. 9. – P. 195–241. 26. Bogoliouboff N.N. Sur l'approximation des fonctions par les sommes trigonometriques // ДАН СССР, А. – 1930. – № 6. – С. 147–152. 27. Bogoliouboff N.N. Sur l'approximation trigonometrique des fonctions dans l'intervalle infini. I. // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. Сер. VII. – 1931. – № 1. – С. 23–54. 28. Bogoliouboff N.N. Sur l'approximation trigonometrique des fonctions dans l'intervalle infini. II (О тригонометрическом приближении функций на бесконечном интервале. II. // Известия АН СССР, Отделение матем. и естеств. наук. Сер. VII. – 1931. – № 2. – С. 149–160. 29. Bogoliouboff N.N. Sur le theoreme fondamental de l'algebre // Bolletino della Unione Matematica Italiana. – 1932. – Ann. 7. – P. 65–66. 30. Bogoliouboff N.N. Sur quelques methodes nouvelles dans le calcul des variations // Annali di matematica pura ed applicata. Serie 4. – 1929. – Т. 7. – P. 249–271. 31. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Application de la methode de l'algorithme variationnel a la solution approchee des equations differentielles aux derivees partielles du type elliptique. Estimation des erreurs qu'on commet en s'arretant a la n-eme approximation dans le calcul des valeurs et des fonctions singulieres. Cas general de l'equation non homogene // Известия АН СССР, Отделение физ.-мат. наук. – 1930. – № 1. – С. 43–71. 32. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Application de la methode de l'algorithme variationnel a la solution approchee des equations differentielles aux derivees partielles du type elliptique. Estimation des erreurs qu'on commet en s'arretant a la n-eme approximation dans le calcul des valeurs et des fonctions singulieres. Cas general de l'equation non homogene // Известия АН СССР, Отделение физ.-мат. наук. – 1930. – № 2. – С. 105–114. 33. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Fundamental problems of the non-linear mechanics // Congres international des mathematiciens. – Zürich, 1932. – V. 2. – P. 270–272. 34. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. La solution approchee du probleme de Dirichlet // ДАН СССР, А. – 1929. – № 12. – С. 284–288. 35. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. La solution approchee du probleme de Dirichlet. Resume // Vortrage aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwander Gebiete (Aachen, 1929). – Berlin: Springer, 1930. – S. 53 – 55. 36. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Les phenomenes de demultiplication de frequence en radiotechnique // Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. – 1932. – Т. 194. – P. 1119–1122. 37. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Methodes nouvelles pour la solution de quelques problemes mathematiques se rencontrant dans la science des constructions. – Киев, б. и., 1932. – 96 с. 38. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. On Rayleigh's principle in the theory of differential equations of mathematical physics and on Euler's method in calculus of variations // Annals of Mathematics. Serie II. – 1928. – vol. 29, № 3. – P. 255–276. 39. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Quelques exemples d'oscillation non-lineaires // Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. – 1932. – Т. 194. – P. 957–960. 40. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Recherché sur la stabilite statique et la stabilite dynamique des machines synchrones // Comptes rendus des travaux de la Troisieme section. – Paris: Gauthier – Villars, 1932. – (P. 179–205. – (Congres Intern. d'electricite, v. 4, 3 section, t. 1, rapport 14). 41. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sopra il metodo dei coefficienti costanti (metodo dei tronconi) per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della fisica matematica // Bolletino della Unione Matematica Italiana. – 1928. – Ann. 7, № 2. – P. 72–77. 42. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur la justification du principe de Rayleigh par l'ordre de l'erreur commise a la n-me approximation // Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. – 1926. – Т. 183, N.9. – P. 476–479. 43. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur la theorie des appareils indicateurs // Journal de Physique et le Radium. Ser. 7. – 1930. – Т. 1, № 3. – P. 77–92. 44. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur la theorie mathematique des oscillographes // Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. – 1928. – Т. 187. – P. 938–940. 45. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur quelques criteres concernant l'existence des derivees d'une fonction d'une variable reelle // Збірник Математично-природописно-лікарської секції Наукового т-ва ім. Т.Г.Шевченка. – Львів, 1928. – Т. 27. – С. 215–221. 46. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur le calcul des racines de la transcendante de Fredholm les plus voisines d'un nombre donne par les methodes des moindres carres et de l'algorithme variationnel // Изв. АН СССР, ОФМН. – 1929. – №5. – С. 471–488. 47. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur le phenomene de l'entrainement en radiotechnique // Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. – 1932. – Т. 194. – P. 1064–1066. 48. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur les methodes des differences finies pour la resolution approchee des problemes fondamentaux de la physique mathematique // Comptes rendus de l'Academie des Sciences, Paris. – 1928. – Т. 186. – P. 422–425. 49. Bogoliouboff N.N., Kryloff N.M. Sur un probleme de l'electrostatique // Тр. Харьковского электротехн. ин-та. – 1931. – № 1. – С. 7–19. 50. Kryloff N.M. Sur differentes generalisations du lemme fondamental du calcul des variations // Записки фіз.-мат. відділу ВУАН. – 1923. – Т.1, вип. 1. – с. 8–11.

Надійшла до редколегії 11.02.13

М. Гордиенко, асп.,
В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ Н.Н. БОГОЛЮБОВА ПЕРИОДА 1923–1932 ГОДОВ

Проанализированы научные труды Н.Н. Боголюбова периода 1924–1932 годов и исследован процесс эволюции направлений его научной деятельности

M. Gordienko, PhD graduate, V. Samoylenko, Full Doctor

MATHEMATICAL RESEARCHES OF M.M. BOGOLIUBOV OF TIME PERIOD 1923–1932

Scientific researches by M.M. Bogoliubov of time period 1924–1932 are analyzed and evolution process of his scientific activity in mentioned time period is studied.

УДК 004.932

В. Бородін, канд.техн.наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ МІМІКИ ОБЛИЧЧЯ У ФЛЕШ-ІГРАХ

Розглядається задача автоматичного розпізнавання обличчя за зображенням та формуванню з допомогою розпізнано-го зображення анімації, яка відображала б міміку обличчя. Запропоновано метод розпізнавання еліпсу обличчя на фотографії та методи формування реалістичного зображення, що відображає міміку та рух обличчя.

ВСТУП. У сучасних мобільних іграх, де використовуються елементи комп'ютерної графіки для відображення реалістичного зображення людей і їхніх обличчя у динаміці, так само як і в ряді систем охорони й/або розпізнавання зображень зустрічається задача відображення реалістичної міміки обличчя. Також є популярним і важливим знаходження та розпізнавання особливих точок обличчя (очі, брови, губи, чоло й т.п.) для наступної обробки зображення, такої як рух цих точок, видалення зайвого червоного кольору, відблисків, зморшок і т.ін [1–7].

При рішенні цих завдань можна використовувати досить багато методів, але варто мати на увазі, що багато з цих методів є ресурсомісткими, тому що вимагають або значних витрат машинних операцій і, отже, часу для виконання, або потребують для подальшої обробки іноді досить значної попередньої бази зображень обличчя [1, 2]. Ці вимоги іноді бувають надмірними, наприклад, при створенні мобільних і флеш-ігр, у яких швидкість виконання роботи й до-тепер критичний параметр [3].

ФОРМУЛЮВАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТА ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ. У зв'язку із цим виникає завдання розпізнавання обличчя й моделювання міміки в мобільних іграх і флеш-іграх без використання великих ресурсів часу (машинних операцій) і додаткових баз даних.

Проблема моделювання міміки обличчя ставиться таким чином. На сервер надходить фотографія, що містить зображення обличчя. Програма повинна розпізнати й виділити овал (еліпс) обличчя, перенести його на інше зображення й змоделювати рух губ, брів, щік і чола якомога реалістичніше.

Це завдання природно розбивається на наступні три підзадачі: виділення овалу обличчя, розпізнавання особливих точок обличчя – країв губ, брів, очей й інших, а також підзадачу реалістичного виконання зображення заданого руху цих особливих точок у формі серії малюнків (електронного кіно).

Для рішення першої із цих підзадач на даний момент існує безліч рішень, що використовують різні підходи: нейронні мережі [1–3, 6], використання вибірок баз даних осіб [3], методи визначення за кольором шкіри [4–8] й інші [9–10]. При цьому виділяють два типи завдання – коли відомо, що обличчя на зображенні нахилиється під відомим кутом до осі картинки, і коли цей кут невідомий. У другому випадку метод рішення вимагає значно більше часу. Оскільки в розглянутому варіанті завдання важливий саме час роботи, то буде досліджуватися перший варіант завдання, коли без обмежень загальності можна сказати, що обличчя на розглянутому зображенні (фотографії) розташовано без нахилу. У даній статті пропонується для такого завдання використати варіант розпізнавання за допомогою колірної диференціації шкіри, що проставлені в кольоровій моделі YCrCb [3, 4] та дозволяє контролювати кількість машинних операцій для виділення овалу обличчя при заданій точності результату.

Для другий підзадачі також на даний момент активно розвиваються методи розв'язування, що використовують схожі з першою задачею підходи [5–9]. На жаль, навіть найгарніші методи рішення цього завдання не дають стовідсотково коректного рішення навіть на фотографіях найкращої якості. Крім того, більшість цих методів використовують багато обчислювальних ресурсів [3]. У даній статті пропонуються методи пошуку країв очей, брів, губ, що не використовують великої кількості обчислювальних операцій і додаткової бази даних зображень при достатній коректності результатів.

Третє завдання є найменш дослідженим з розглянутих, хоча на даний момент уже існують комерційні продукти, які візуалізують деякі із гримас обличчя по даній фотографії [8, 9]. У даній статті пропонується відкрите рішення цього завдання, тобто формули перетворень зображення, що за даними про особливі точки обличчя здійснює ряд його мімічних перетворень: посмішку, погрозу, гримаси подиву й інших.

ВИДІЛЕННЯ ОВАЛУ ОБЛИЧЧЯ. Нехай дано фотографію із зображенням обличчя в одному зі стандартних графічних форматів, який являє собою набір матриці кольорів пікселів зображення, що зберігає кольори в стандартному представленні кольору RGB. Для виділення овалу обличчя пропонується, як і в більшості відомих методів, скористатися критеріями визначення кольору шкіри обличчя, при цьому найкращі характеристики має подання кольору у формі YCrCb, де критерій збігу з кольором шкіри буде [4]:

$$Y > 80, 85 < Cb < 135, 135 < Cr < 180. \quad (1)$$

Тут значення параметрів Y, Cr, Cb нормуються так, щоб вони належали інтервалу [0, 255].

Таким чином, завдання зводиться до знаходження еліпсу найменшого розміру, який би включав всі точки з деякої зв'язної області точок, що задовольняють критерій (1), і за формою є близькою до овалу.

На початку роботи програми ми не знаємо, де на фотографії перебуває обличчя. Для того, щоб знайти його, потрібно визначити найбільшу 8-зв'язну групу точок (пікселів), що задовольняють (1). Виділення такої області можна зробити класичним алгоритмом послідовного сканування [9]. При цьому під час першого застосування алгоритму варто додати операції для обчислення центра мас зв'язних областей (тобто підсумувати в кожній області координати по кожній з осей координат й збільшувати щоразу при виконанні (1) лічильник точок, що попали в дану зв'язну область на одиницю), а під час другого обходу підсумувати ці дані по кожній з областей, що належать тій самій області.

Поділивши в підсумковому масиві суми координат по осях OX і OY на відповідні кількості точок ми одержимо центри мас, а визначивши максимум по кількості точок знаходимо центр еліпсу обличчя.

Визначивши центр мас отриманої зв'язної множини точок, можна вказати, що цей центр буде також центром обличчя, а, отже, і центром шуканого еліпса (овалу) обличчя. Крім того, можна вказати приблизну ширину (W) і висоту (H) еліпса за формулами

$$W = \sqrt{N/2}, H = \sqrt{2N} \quad (2)$$

де N – кількість точок зв'язної області.

Подальший алгоритм виділення овалу обличчя заснований на класичному енергетичному алгоритмі [10], коли створюється функція, яка отримує результат співвідношення частини заданого еліпсу, що задовольняють критерію (1) та тієї частини, що не задовольняє йому. Аргументами цієї функції будуть координати центру еліпсу та його радіуси. Потрібно знайти максимум цієї функції на даному зображенні. Надалі здійснюється поправка коректності координат центру еліпсу.

Тоді, для розв'язання цієї задачі можна скористатись методом градієнтів, що дозволяє за не надто значну кількість рухів досягти шуканого максимуму цієї функції та визначити еліпс обличчя.

Початкові наближення для висоти й ширини еліпса вже задані. Далі межа еліпса ділиться на (експериментальним шляхом це число обрано як 20) певну кількість рівних частин. У кожній із цих частин визначається співвідношення кількості пікселів, що задовольняють (1) і всіх пікселів цієї частини. Якщо воно більше 9/10 (90%), то центр мас еліпса зрушується в напрямку центра цієї частини межі еліпса на 1/20 частину відстані до нього, за винятком нижніх частин, відповідальних за шію, де зрушення робиться на 1/40 (2,5%).

Після цього потрібно зробити поправку величин ширини та висоти для шуканого еліпсу.

З цією метою внутрішність і зовнішня частина еліпса ділиться на 4 частини малюнку згідно схеми, що зображена на рис. 1.

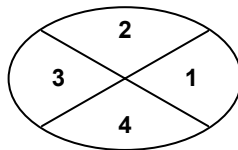


Рис.1. Розбивка еліпса

Якщо на межі й усередині частин 1 і 3, більше 80% точок задовольняє умові (1), то ширина еліпса збільшується на коефіцієнт, обраний 8/7. Якщо навпаки, менше 80% точок на межі задовольняють (1), то ширина зменшується на коефіцієнт, який обраний 25/24.

Аналогічно, якщо на межі й усередині частин 2 і 4, більше 80% точок задовольняє (1), то висота еліпса збільшується на коефіцієнт, що обраний 8/7. Якщо навпаки, менше 80% точок на межі задовольняють (1), то висота зменшується на коефіцієнт, обраний 25/24. Зазначені коефіцієнти та пропорції підібрані експериментально для серії зображень осіб, завантажених з Інтернету.

Вказані дії являють собою операції однієї ітерації циклу. Для розв'язання основної задачі пошуку еліпсу обличчя потрібно виконати ці ітерації достатню кількість разів, доки за результатами двох послідовних ітерацій значення обчислюваних параметрів не залишиться незмінним.

Оскільки для розглянутого завдання необхідно завершувати роботу, навіть якщо овал обличчя не підібраний належним чином, раціонально поставити обмеження на кількість ітерацій при роботі циклу пошуку обличчя – експеримент показав, що кількість ітерацій рівна $n=100$ забезпечує прийнятну точність визначення овалу обличчя.

Наступне завдання – визначення особливих точок обличчя. Це завдання є одним з найбільш важливих завдань розпізнавання зображень. Для його рішення використовуються різні методи, що ґрунтуються як на колірних, так і на геометричних характеристиках обличчя, а також ті, що використовують попередню базу подібності для зображень облич, нейронмережі й т.п. [1, 10]. Оскільки в розглянутій ситуації найбільш важливою характеристикою розв'язання завдання є економія часу й обчислювальних ресурсів, то було обрано метод, що використовує геометричні характеристики обличчя й розподіл кольору [10].

Головними особливими точками обличчя є очі та рот. Важливими геометричними властивостями цих точок, що допомагають знайти їх на обличчі є наступні [4–6]:

- ліве око, праве око та центр рота утворюють рівносторонній трикутник;
- ліве та праве око симетричні відносно головної осі еліпсу обличчя;
- лінія, що з'єднує обидва ока ділить головну діагональ у відношенні, що є близьким до відношення 1:2.

Для пошуку очей окремим є також кольорові характеристики. Колір очей суттєво відрізняється від кольору шкіри. Тому відслідковуючи зміну кольорів на лінії, що ділить головну діагональ еліпсу обличчя у відношенні 1:2, можна знайти координати очей.

Таким чином, алгоритм пошуку особливих точок обличчя полягає в наступному:

- 1) Будується головна вісь еліпсу;
- 2) Вона ділиться у відношенні 1:2;
- 3) Вздовж цієї лінії рахується зміна кольорів (неважливо в якій кольоровій системі, зручніше обрати систему YCrCb, в якій вже проводилися розрахунки);
- 4) Там, де знайдено пік зміни значення кольорів, виділяються координати очей;
- 5) Побудувавши рівносторонній трикутник по двом вершинам (координати очей) знаходимо координати центру рота;
- 6) Рухаючись по головній осі еліпсу обличчя в районі центру знайденого трикутника за змінами кольору визначаються координати носу;
- 7) Рухаючись з центру рота, виділяємо ділянку де зміна червоного кольору не є значною – це виділяється губи та їх границі.

Таким чином, запропонований метод пошуку особливих точок обличчя дозволяє за відносно малу кількість операцій та без використання додаткової бази даних, а отже й обчислювальної пам'яті комп'ютера, знаходити та виділяти особливі точки зображення обличчя.

ПЕРЕТВОРЕННЯ МІМІКИ ОБЛИЧЧЯ. Задача перетворення міміки обличчя повинна розглядатись для деяких окремих виразів обличчя.

У даній роботі дослідження проводилася для наступних виразів обличчя:

- а) посмішка – коли обидві половинки губ піднімаються вгору;

- b) гримаса суму – коли обидві половинки губ опускаються вниз;
 c) гримаса – коли одна половинка губ піднімаються нагору, а інша вниз;
 d) насуплення брів – брови опускаються в напрямку до носа.

Розглянемо завдання а). Нехай $2L$ – ширина губ на обличчі, а $2h$ – їхня висота. Координати центра посмішки позначимо (x, y) . Тоді координати країв губ будуть $(x - L, y)$ і $(x + L, y)$. Оскільки ширина губ при посмішці поняття розтяжне введемо коефіцієнти розтягання губ по осі OX і OY відповідно α, β . Тоді нові координати лівого й правого країв губ будуть

$$(x - \alpha L, y + \beta h), (x + \alpha L, y + \beta h) \quad (3)$$

Рух точок обличчя буде визначатися в такий спосіб.

Нехай R – відстань від даної точки обличчя (px, py) до лівого краю губ, де

$$R = \sqrt{(px - x + L)^2 + (py - y)^2}. \quad (4)$$

Позначимо ρ_x, ρ_y , як

$$\rho_x = \begin{cases} 0, & R \geq 0.7L \\ (1 - px/0.35L)^\gamma, & R < 0.7L \end{cases}, \quad (5)$$

$$\rho_y = \begin{cases} 0, & R \geq 0.7L \\ (1 - py/0.35L)^\sigma, & R < 0.7L \end{cases}. \quad (6)$$

Нові координати обчислюються за формулою

$$x' = (px - x - L)\rho_x + px, \quad (7)$$

$$y' = (py - y - L)\rho_y + py. \quad (8)$$

При цьому варто брати всі точки із прямокутника з координатами протилежних вершин $(x - 2L, y - 2h)$ та $(x + 2L, y + 2h)$. Експериментальним шляхом встановлено найбільш оптимальні коефіцієнти, які використовуються у формулах: $\alpha = 1.2$, $\beta = 1.1$, $\gamma = 2$, $\sigma = 2$. Для правої частини посмішки виконуються операції за майже аналогічними формулами.

Завдання b) виконується аналогічно, але у формулах (7)–(8) міняється знак ρ_y .

Завдання c) як легко побачити – комбінація рішень a) і b).

Завдання d) виконується аналогічно c) за формулами (4)–(8) з коефіцієнтами $\alpha = 1.1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 1$.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ЗАПРОПОНОВАНИХ МЕТОДІВ. Для перевірки та апробації результатів було створено відповідне програмне забезпечення на мові PHP з використанням серверної технології. Було завантажено з Інтернету декілька фотографій та зображень облич та проведено відповідні описані перетворення трансформації облич.

Експериментальні результати роботи запропонованого алгоритму показано на рис. 2. для перетворення гримаси й посмішки. Для тестування спеціально було обрано дещо неякісно оброблені фотографії.

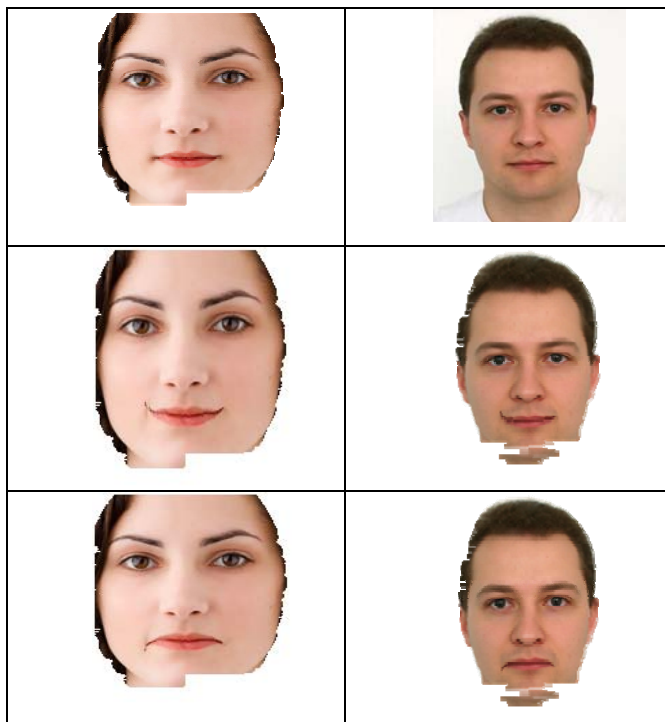


Рис. 2. Приклад роботи алгоритму перетворень міміки для фотографій

ВИСНОВКИ. Запропоновано метод моделювання міміки обличчя по фотографії. Даний метод може застосовуватися для створення мобільних ігор і був програмно реалізований. Перевагою цього методу є універсальність, оскільки для програмування нової емоції потрібно лише змінювати значення коефіцієнтів перетворень. Експериментально визначено значення відповідних коефіцієнтів.

Результати роботи на тестових фотографіях показали достатню швидкість і високу точність роботи даного методу.

Список використаних джерел

1. Chai D., Bouzerdoum A. A Bayesian Approach to Skin Color Classification in YCbCr Color Space. In Proceedings of IEEE Region Ten Conference, vol. 2, 1999. – P. 421–414.
2. Chai D., Ngan K.N.. Face segmentation using skin-color map in videophone applications. / Chai D., and Ngan K.N. // IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology, June 1999 – № 9 (4) – P.551–564.
3. Kakumanu P., Makrogiannis S., Bourbakis N.. A Survey of Skin-Color Modeling and Detection Methods / P. Kakumanu, S. Makrogiannis, N. Bourbakis. Pattern Recognition № 40, 2007. – P.1106–1122., (available at www.sciencedirect.com.)
4. Vezhnevets V., Sazonov V., Andreeva A.. A survey on pixelbased skin color detection techniques. / V. Vezhnevets, V.Sazonov, and A. Andreeva. In GraphiCon, Moscow, Russia, Sept. 2003. (<http://cgm.graphicon.ru>).
5. Vezhnevets V., Soldatov S., Degtiareva A., Park In Kyu. Automatic extraction of frontal facial features (<http://cgm.graphicon.ru>)
6. M. H. Yang Detecting faces in images: A survey / Yang M. H., Kriegman D. J., Ahuja N. // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2002. – Vol. 24. – No. 1. – P.34–58.
7. Yilmaz Alper, Mubarak A. Shah Automatic Feature Detection and Pose Recovery for Faces / Alper Yilmaz, Mubarak A. Shah. ACCV2002: The 5th Asian Conference on Computer Vision, 23–25 January 2002, Melbourne, Australia – P. 134–146
8. <http://www.adobe.com/devnet/pixelbender.html>
9. <http://oddcast.com/technologies/photoface/>
10. <http://www.icaen.uiowa.edu/~djp/LECTURE/lecture.html>

Надійшла до редколегії 29.01.13

В. Бородин, канд. техн. наук, доц.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ МИМИКИ ЛИЦА В ФЛЕШ-ИГРАХ

Рассматривается задача автоматического распознавания лица по изображениям и формированию с помощью распознанного изображения анимации, которая отображала бы мимику лица. Предложен метод распознавания эллипса лица на фотографии и методы формирования реалистического изображения, отображающего мимику и движения лица.

V. Borodin, PhD (eng)

FACE MIMICS MOVEMENT MODELING METHOD FOR FLASH-GAMES

The problem of automatic face detection on images and forming the animation of face mimics from the recognized face. The methods of face ellipse extraction from photo and realistic face mimics movement visualization are proposed.

УДК 629.195

Б. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, І. Васильєв, канд. фіз.-мат. наук,
Я. Ткаченко, канд. фіз.-мат. наук, Л. Харитоновна, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: kifor@univ.kiev.ua

ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ ТЯГОЮ ЕЛЕКТРИЧНОГО РАКЕТНОГО ДВИГУНА З СОНЯЧНИМ ДЖЕРЕЛОМ ЕНЕРГІЇ

Розглянуто задачу керування рухом космічного апарату (КА) в центральному гравітаційному полі. Досліджено вплив вибору робочого тіла електричного ракетного двигуна (ЕРД) на час виконання міжорбітальних маневру і втрати робочої речовини, необхідні для його виконання. Проведено оцінку ефективності оптимального змінного і оптимального релейного керувань ЕРД, а також, запропонованого раніше квазіоптимального управління.

ВСТУП. Використання електричних ракетних двигунів як маршових двигунів для перспективних міжорбітальних транспортних апаратів (МТА) стимулює переосмислення класичних результатів оптимізації маневрування КА з ідеально-регульованим та нерегульованим двигунами та потребує математичного описання ЕРД більш адекватного існуючим та перспективним ракетним двигунам. В [3] запропоновано математичну модель плазменного ЕРД з енергоживленням від сонячної батареї, що враховує ряд обмежень, які характерні для реальних процесів генерування електричної тяги. Аналіз оптимального керування величиною та напрямком реактивної тяги двигуна, проведений в [3] з використанням принципу максимуму Л.С. Понтрягіна, дозволив провести інваріантне відносно крайових умов маневру КА звуження множини допустимих керувань, що у свою чергу спростило порівняння ефективності регульованого двигуна відносно двигуна сталої тяги.

В [4] підтверджено можливість описаного в [3] алгоритму керування. Зокрема, було показано єдиність розв'язку задачі визначення точки максимуму функції Л.С. Понтрягіна, що значно спрощує й скорочує витрати машинного часу на чисельне розв'язання цієї задачі. Крім того, було запропоновано третій спосіб керування величиною тяги – релейний з оптимально підібраним її рівнем на кожній активній дузі – котрий дозволяє отримувати економію робочого тіла, що витрачається на виконання маневру, майже таку ж, як і при оптимальному змінному керуванні, зберігаючи при цьому простоту реалізації програми керування, властиву керуванню релейному.

Зауважимо, що результати обчислень траєкторій та параметрів МТА в [3, 4] одержані для гіпотетичного робочого тіла ЕРД з атомною масою у 10 разів меншою, ніж у ксенона. У даній статті подано результати відповідних розрахунків для випадку, коли як робоче тіло використовуються реальні паливні компоненти, а саме: водень, літій, калій, криптон, ксенон, цезій, ртуть, вісмут. Зіставлення трьох вказаних режимів керування величиною тяги ЕРД проведено для ксенона.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Згідно з [2, 5–7] залежність тяги P та витрати робочої речовини ЕРД q від величини струму I та напруги U джерела потужності рушійної установки запишемо наступним чином:

$$P = \eta_b \mu I \sqrt{2U\eta(U)}, \quad q = \frac{\eta_b \cdot \mu^2}{\eta_c} I. \quad (1)$$

В формулі (1) η_c – сталий коефіцієнт, рівний відношенню анодної витрати до повної витрати робочої речовини у рушії, η_b – величина відношення іонного струму, що безпосередньо генерує тягу, до сумарного струму I , яка зазвичай вважається сталою. Величина μ визначається типом робочої речовини, що прискорюється у двигуні:

© Кіфоренко Б., Васильєв І., Ткаченко Я., Харитоновна Л., 2013

$$\mu = \sqrt{m_a/e},$$

де m_a – атомна маса робочого тіла, e – заряд електрона.

Приймаються такі уявлення вольтамперної характеристики сонячної батареї $I_v(U)$ [1]:

$$I_v = I_{kz} \left\{ 1 - \frac{U}{U_{xx}} \exp \left[\frac{U - U_{xx}}{U_* - U_{xx}} \ln \left(\frac{U_{xx}}{U_*} \left(1 - \frac{I_*}{I_{kz}} \right) \right) \right] \right\} \quad (2)$$

й коефіцієнта, що враховує витрати напруги у реальних рушіях:

$$\eta(U) = 1 - \alpha_\eta \exp \left(-\beta_\eta \frac{U}{U_{xx}} \right), \quad (3)$$

де U_{xx} – напруга холостого ходу, I_{kz} – струм закорочення, U_* і I_* – напруга і струм, що відповідають точці максимума потужності $N = IU$ сонячної батареї. Чисельні значення коефіцієнтів α_η та β_η отримані методом найменших квадратів з використанням експериментальних даних, що представлені у [7].

Рівняння руху центру мас КА в обраній інерціальній системі координат із врахуванням приведених вище співвідношень запишемо у вигляді:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = P(U, I)\vec{e} + \vec{R}(\vec{r}), \quad \dot{m} = -q(I). \quad (4)$$

Тут \vec{r} та \vec{v} – радіус-вектор та вектор швидкості центру мас КА відповідно, m – поточна маса апарату, \vec{e} – одиничний вектор напрямку реактивної тяги.

Для динамічної системи (4) в [3] сформульовано наступну задачу Майєра оптимального керування: необхідно визначити функції керування $I(t)$, $U(t)$, $e(t)$, які забезпечують перехід космічного апарату із заданого початкового положення у фазовому просторі $S_0(\vec{r}_0, \vec{v}_0, m_0)$ до заданого кінцевого положення $S_1(\vec{r}_1, \vec{v}_1, m_1)$ з максимальним значенням кінцевої маси m_1 за заданий час T . Керування задачі обмежені: $|\vec{e}(t)| = 1$, множина допустимих керувань I та U обмежена відрізками осей $[0, U_{xx}]$ і $[0, I_{kz}]$ та вольтамперною характеристикою $I = I_v(U)$.

В [3] з використанням принципу максимуму Л.С.Понтрягіна показано, що вздовж оптимальної траєкторії виконуються: $\vec{e}(t) = \vec{\psi}_v / \psi_v$ ($\psi_v = |\vec{\psi}_v|$), де $\vec{\psi}_v(t)$ – базис-вектор Лоудена. Оптимальні значення сили струму $I(t)$ задаються рівнянням вольтамперної характеристики (2), при цьому оптимальні значення напруги $U(t)$ визначаються з умови:

$$U(t) = \arg \max_{U \in [U_p, U_{xx}]} [P_v(U) - \frac{m\psi_m}{\psi_v} q_v(U)]. \quad (5)$$

Тут $P_v(U)$ та $q_v(U)$ – величини тяги та витрати, обчислені при $I = I_v(U)$, U_p – напруга, що відповідає максимальному значенню реактивної тяги, $\psi_m(t)$ – спряжена функція фазової змінної $m(t)$. Для обраного тлумачення величин $I_v(U)$ та $\eta(U)$ (див. (2), (3)) визначення оптимального $U(t)$ з умови (6) пов'язане з необхідністю розв'язання трансцендентного рівняння. В [4] доведено унімодальність функції, що мінімізується у (5) при виконанні наступних умов: $\eta'(U) > 0$, $\eta''(U) < 0$. Це дозволяє визначити функцію $U(t)$ з умови (5) за допомогою стандартних алгоритмів чисельного пошуку максимуму унімодальних функцій.

ТРИ СПОСОБИ УПРАВЛІННЯ ТЯГОЮ ЄРД. В [3, 4] детально проаналізовано три можливих способи керування реактивною тягою електричного ракетного двигуна малої тяги, що використовує як джерело енергії сонячну батарею. Нагадаємо, що такими є: 1) оптимальне керування величиною змінної тяги; 2) класичне релейне керування з максимальним рівнем тяги на активних дугах та 3) запропоноване релейне керування зі сталою величиною тяги ЄРД, що підбирається для кожної активної дуги.

Оцінку ефективності різних способів керування величиною тяги ЄРД проведемо користуючись результатами чисельного розв'язання задачі про виконання переходу КА з кругової орбіти радіусу 7218.8 км з нахилом 63.17 градуса на полярну орбіту з великою напіввіссю 11550 км та ексцентриситетом 0.1. Аргумент перигею кінцевої орбіти та довгота висхідного вузла – нульові. Параметри орбіт обрано такі, що забезпечується непотраплення КА при виконанні маневру в тінь Землі. Конструктивні параметри КА та ЄРД такі: початкова маса КА 776 кг, напруга холостого ходу

$U_{xx} = 900$ В, струм закорочення $I_{kz} = 675$ А, коефіцієнт $\eta_b = 0.75$, коефіцієнт $\eta_c = 0.9302$, параметр $m_\mu = 0.00116649284490$ (робоче тіло – ксенон), $\alpha_\eta = 0.2479$, $\beta_\eta = 2.3427$.

Найменший час виконання маневру при незаданій кінцевій масі виявився рівним 1.9264 діб. При цьому витрати робочого тіла склали 119.0539 кг. При збільшенні тривалості міжорбітального переходу витрата маси зменшується. Суцільна крива на рис.1 ілюструє залежність витрати маси на виконання маневру від завданого часу його виконання з використанням оптимального значення величини тяги. Так, при збільшенні часу переходу у 4 рази витрата маси робочого тіла зменшується до 75.7376 кг. Залежність величини оптимальної тяги від часу на перших трьох обертах представлена суцільною кривою на рис.2. На рис.3 проілюстровано динаміку повільних змінних задачі, які визначають розмір та положення оскулюючих орбіт КА: великої напіввісі $a(t)$, ексцентриситету $e(t)$ та нахилу $I(t)$ при оптимальному керуванні у випадку швидкодії, а також при збільшенні часу переходу відповідно у 2 й 4 рази.

Заміна оптимального режиму керування простішим релейним законом з оптимально підібраними моментами переключень між максимальною та нульовою тягою призводить до збільшення витрати до 79.9828 кг. Відповідні криві на рис. 2 й 3 дані пунктиром.

Зменшити величину витрати до 76.54446 кг можна скориставшись квазірелейним керуванням, запропонованим у [4] (штрих-пунктирні криві на рис. 2 та 3). Практична реалізація цього керування не набагато складніша класичного ре-

лейного, оскільки перерегулювання двигуна на нову величину тяги необхідно виконувати на достатньо тривалих пасивних дугах. При цьому витрати робочого тіла на квазірелейному режимі у порівнянні з оптимальним складають 0.8070 кг, в той час як на класичному релейному – 4.2447 кг.

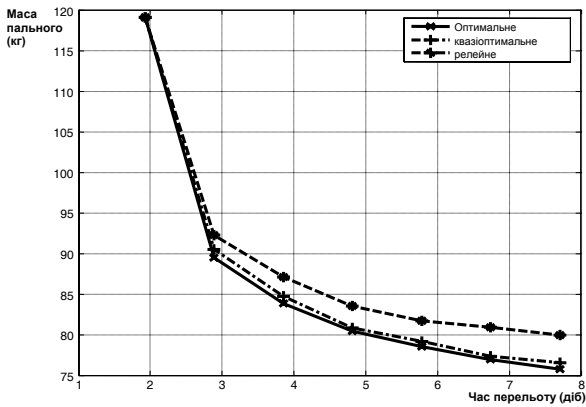


Рис. 1. Залежність витрат робочого тіла (ксенон) від повного часу перельоту для оптимального, квазіоптимального і релейного управління

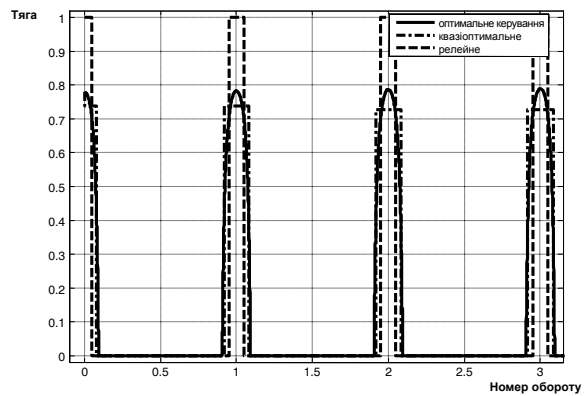


Рис. 2. Три режиму управління тягою на перших трьох оборотах

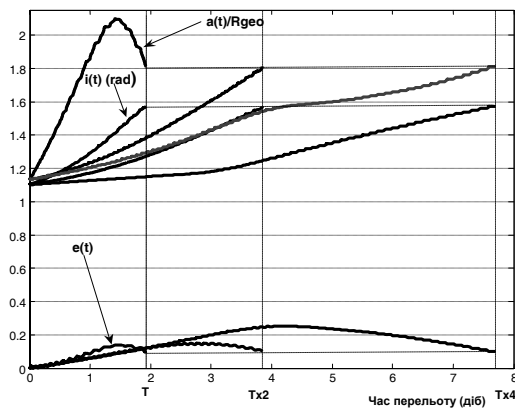


Рис. 3. Залежності великої півосі (а), способу (і) та ексцентриситету (е) від часу

Розглянемо вплив вибору робочого тіла ЕРД на мінімальний час виконання маневру й необхідні витрати робочого тіла. Відповідні залежності приведені на рис. 4 для маневру із вказаними вище крайовими умовами і на рис. 5 для маневру повороту площини орбіти того ж КА на 2 градуси ($I_0 = 88^\circ$, $I_f = 90^\circ$). Чисельні значення часу переходу у доб. та маси витрат робочого тіла приведені для таких маневрів у Таблицях 1 та 2 відповідно. У другому стовпчику таблиць приведені безрозмірні значення кінцевої маси КА (віднесена до початкової маси). У третьому стовпчику витрата маси робочого тіла (у кілограмах), у четвертому – час виконання маневру (в доб.).

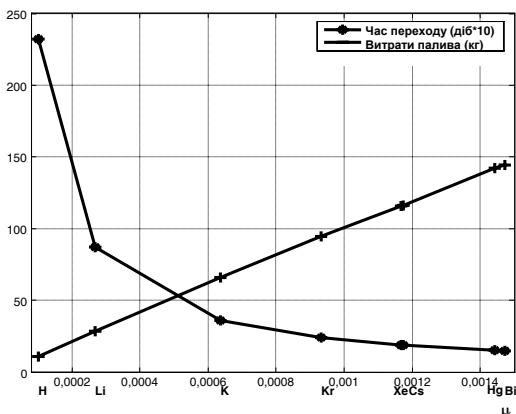


Рис. 4. Витрати палива та повний час перельоту в залежності від атомної маси робочого тіла. Великий перехід

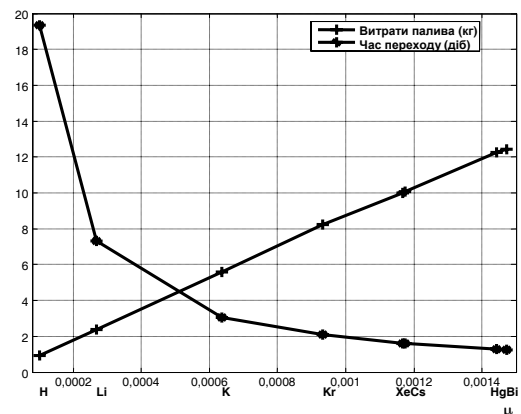


Рис. 5. Витрати палива та повний час перельоту в залежності від атомної маси робочого тіла. Маленький перехід

Таблиця 1

Чисельні дані великого перельоту

Тип робочого тіла	Кінцева маса КА (в долях початкової)	Витрати палива (кг)	Час перельоту (дів)
Водень (H)	0,985811795351098	11,010046807548000	23,206626597787900
Літій (Li)	0,963288539483957	28,488093360449400	8,719300267843320
Калій(K)	0,915066395181539	65,908477339125800	3,581187256322020
Криптон (Kr)	0,878304741577204	94,435520536089700	2,394041387850540
Ксенон (Xe)	0,850775293357005	115,798372354964000	1,873747649181450
Цезій (Cs)	0,850063223885732	116,350938264672000	1,859797230339570
Ртуть (Hg)	0,816648455898376	142,280798222860000	1,506875281620050
Вісмут (Bi)	0,813644987748402	144,611489507240000	1,470071197845180

Таблиця 2

Чисельні дані маленького перельоту

Тип робочого тіла	Кінцева маса КА (в долях початкової)	Витрати палива (кг)	Час перельоту (дів)
Водень (H)	0,99881606734652	0,91873173910207	1,936473548715430
Літій (Li)	0,99691313241443	2,39540924639920	0,733158664549277
Калій(K)	0,99279832345770	5,58850099682400	0,313593895089717
Криптон (Kr)	0,98936637693848	8,25169149574033	0,209189199661685
Ксенон (Xe)	0,98711050665107	10,00224683877280	0,161847581442952
Цезій (Cs)	0,98703576525403	10,06024616287660	0,160806764683657
Ртуть (Hg)	0,98421734203455	12,24734258118840	0,129709827549728
Вісмут (Bi)	0,98395980236831	12,44719336219140	0,126533932525826

ВИСНОВКИ. Порівняльний аналіз ефективності трьох розглянутих способів керування електричним ракетним двигуном малої тяги КА, що використовує як джерело живлення сонячну батарею, а як робоче тіло ксенон, підтвердив їх співставність, відмічену раніше у [3, 4] для випадку використання гіпотетичного робочого тіла. На ряді модельних прикладів виконання маневрів КА з мінімальними масовими витратами проілюстрована залежність тривалості виконання заданого маневру та необхідних масових витрат від вибору типу робочого тіла. Одержані результати вказують на істотне зменшення часу переходу при збільшенні атомної маси робочого тіла, що супроводжується деяким зростанням його витрати. Їх можна використати під час проектування міжорбітальних маневрів космічних апаратів, що використовують ЕРД малої тяги при розв'язанні дилеми ціна – якість (витрата – час швидкодії).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Безручко К.В. и др. Солнечные энергосистемы космических аппаратов. Физическое и математическое моделирование // Под ред. Конюхова С.Н., – Харьков, ХАИ, 2000, 515 с. 2. Глибицкий М.М. Системы питания и управления электрическими двигательными установками на базе стационарных плазменных двигателей. – М.: Машиностроение, 1981, 80с. 3. Кифоренко Б.Н., Васильев И.Ю., Ткаченко Я.В. Оценка эффективности оптимального управления тягой электрического ракетного двигателя с солнечным источником энергии // Проблемы управления и информатики. 2008, № 6. с. 99–105. 4. Кифоренко Б.Н., Васильев И.Ю., Ткаченко Я.В. Проблема оптимального управления величиной тяги реального электроракетного двигателя // Проблемы управления и информатики, 2010, № 4. – С. 119–129. 5. Теория и расчет энергосиловых установок космических летательных аппаратов. / Л.А. Квасников и др. – М.: Машиностроение, 1984, 332 с. 6. Шиняков Ю.А. и др. Способы управления электрореактивными двигательными установками на базе стационарных плазменных двигателей, используемых в качестве маршевых и тяговых двигателей КА // Известия Самарского научного центра РАН, т. 4, № 1, 2002, С. 150–155. 7. Hover R.R., Development and Characterization of High-Efficiency, High-Specific Impulse Xenon Hall Thrusters, // P.H.D. thesis, The University of Michigan, 2004, p 400.

Надійшла до редколегії 23.11.12

Б. Кифоренко, д-р физ. мат. наук, И. Васильев, канд. физ.-мат. наук,
Я. Ткаченко, канд. физ.-мат. наук, Л. Харитоновна, канд. физ.-мат. наук

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЯГОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ С СОЛНЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

Рассмотрена задача управления движением комического аппарата (КА) в центральном гравитационном поле. Исследовано влияние выбора рабочего тела электрического ракетного двигателя (ЭРД) во время выполнения межорбитального маневра и расход рабочего вещества, необходимого для его выполнения. Проведена оценка эффективности оптимального переменного и оптимального релейного управлений ЭРД, а также предложенного ранее квазиоптимального управления.

B. Kiforenko, Full Doctor, I. Vasil'ev, PhD, Y. Tkachenko, PhD, L. Kharytonova, PhD

OPTIMAL CONTROL OF THE ELECTRIC ROCKET ENGINE THRUST WITH SOLAR ENERGY SOURCE

The problem of motion control of the spacecraft in the central gravitational field is under consideration. We investigate the impact of the choice of the working body of electric propulsion (EP) on the duration of interorbital maneuver and the expenditures of working substances necessary for its implementation. The efficiency evaluation of optimal and relay control od EP as well as previously proposed quasi-optimal control is carried out.

ІНТЕГРОВНІСТЬ СИСТЕМ З МИТТЄВИМИ В'ЯЗЯМИ

Проведено дослідження руху стрижня в однорідному полі сил тяжіння при накладанні миттєвих в'язей. Доведено існування та руйнування інтегралів руху динамічної системи у випадку абсолютно пружного удару. Побудовано перерізи Пуанкаре для дослідження хаотичної поведінки системи.

ВСТУП. Явище удару представляє собою особливий випадок руху матеріальної системи. Удар характеризується тим, що швидкості та кількості руху точок матеріальної системи набувають скінченних приростів за малий проміжок часу, рівний тривалості удару. Відомо, що кінетична енергія системи у випадку абсолютно пружного удару не змінюється [3]. Для того, щоб визначити рух гамільтонової системи з n степенями вільності, необхідно знайти n незалежних інтегралів руху [4]. Неінтегровні системи, в свою чергу, не мають достатньої кількості збережних величин. Рух таких систем може характеризуватися виникненням хаосу [1]. Існує багато прикладів неінтегровних гамільтонових систем, в яких виникає хаос, наприклад, система Ено-Ейлеса [1] чи система Лоренца [2]. В дійсності, багато механічних систем демонструють хаотичну поведінку. Тому дослідження виникнення хаосу в неінтегровних системах є важливим завданням сучасної науки. У даній статті розглядається динамічна система з двома степенями вільності. Аналізується вплив явища удару на інтегровність системи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. У даній статті досліджується рух абсолютно твердого стрижня в однорідному полі сил тяжіння (рис. 1) під дією миттєвих в'язей, що накладаються в скінченні моменти часу. Під миттєвими в'язями будемо розуміти послідовність гладких ударів кінців стрижня (точки M_1 та M_2) об нерухому поверхню з коефіцієнтом відновлення K .

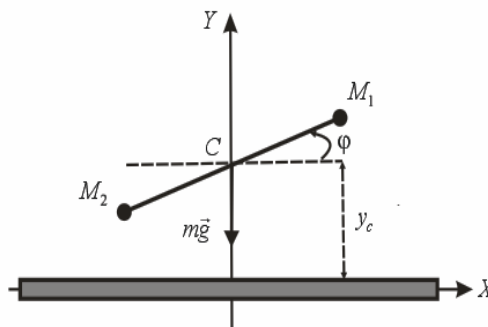


Рис. 1. Схема задачі

Відомі параметри абсолютно твердого стрижня: маса m , довжина L та момент інерції J ; параметр задачі – коефіцієнт відновлення після удару K . Диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\ddot{y}_c = -g, \quad J\ddot{\varphi} = 0.$$

Початкові умови руху системи:

$$y_c(t_0) = y_{c0}, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{y}_c(t_0) = V_{c0}, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega_{c0}.$$

ЗАКОНИ ТА ІНТЕГРАЛИ РУХУ СИСТЕМИ НА ПРОМІЖКАХ ЧАСУ МІЖ УДАРАМИ. Досліджувана система має дві степені вільності: y_c – вертикальна координата центра інерції та φ – кут повороту стрижня навколо осі, що проходить через центр інерції (точка C) ортогонально до площини рисунка задачі.

Нехай t_k^- – момент часу безпосередньо перед k -им ударом, t_k^+ – момент часу безпосередньо після k -го удару. Запишемо закони руху системи на проміжках часу між ударами:

$$y_c = -\frac{g}{2}(t - t_k^+)^2 + V_{ck}^+(t - t_k^+) + y_{ck}^+, \quad \varphi = \omega_k^+(t - t_k^+) + \varphi_k^+, \quad t \in [t_k^+, t_{k+1}^-), \quad (1)$$

де $V_{ck}^\pm = \dot{y}_c(t_k^\pm)$, $y_{ck}^\pm = y_c(t_k^\pm)$, $\omega_k^\pm = \dot{\varphi}(t_k^\pm)$, $\varphi_k^\pm = \varphi(t_k^\pm)$.

Момент удару визначається з умови:

$$y_c(t_k^-) = \frac{1}{2}L \left| \sin \varphi(t_k^-) \right|, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

На проміжках часу між ударами існують два перших інтеграли руху: інтеграл енергії (система є консервативною) $E = \frac{1}{2}m\dot{y}_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mgy_c$ та інтеграл кінетичного моменту $L_z = J\dot{\varphi}$. Система має дві степені вільності, для неї існує два збережних інтеграли руху, а отже, за теоремою Ліувілля вона є інтегрованою на проміжках часу між ударами.

ОПИС ЯВИЩА УДАРУ. Вважатимемо удар гладким з коефіцієнтом відновлення K . Оскільки $t_k^+ - t_k^- = \tau \ll 1$, то можна знехтувати приростами координат системи [3] і покласти $\varphi_k^+ = \varphi_k^- = \varphi_k$, $y_{ck}^+ = y_{ck}^- = y_{ck}$.

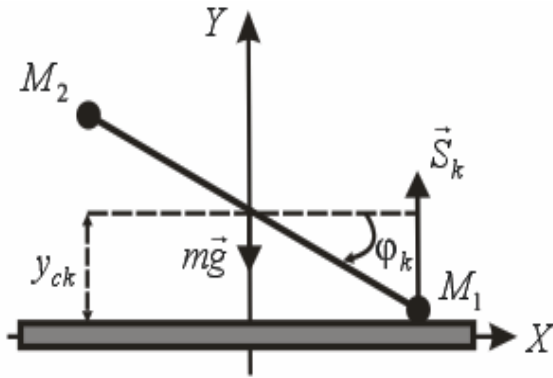


Рис. 2. Удар в точці M_1 ($\varphi_k < 0$).

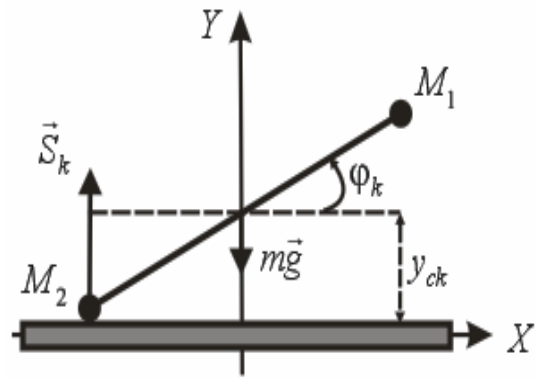


Рис. 3. Удар в точці M_2 ($\varphi_k > 0$).

Рівняння першого етапу удару мають вигляд:

$$m(V_{ck}^- - V_{ck}^+) = S_k^{(1)}, \quad J(\omega_{ck}^- - \omega_{ck}^+) = \pm \frac{1}{2} L S_k^{(1)} \cos \varphi_k. \tag{2}$$

Рівняння другого етапу удару:

$$m(V_{ck}^+ - V_{ck}^-) = S_k^{(2)}, \quad J(\omega_{ck}^+ - \omega_{ck}^-) = \pm \frac{1}{2} L S_k^{(2)} \cos \varphi_k. \tag{3}$$

де $S_k^{(1)}, S_k^{(2)}$ – ударні імпульси на першому та другому етапах удару відповідно; V_{ck}^-, ω_{ck}^- – швидкості центра інерції системи в момент зупинки. Умова зупинки:

$$V_{ck} = \mp \frac{1}{2} L \omega_{ck} \cos \varphi_k. \tag{4}$$

Верхній знак у формулах (2), (3), (4) відповідає випадку, коли $\varphi_k < 0$ (рис.2), нижній – випадку, коли $\varphi_k > 0$ (рис.3).

Коефіцієнт відновлення після удару:

$$K = S_k^{(2)} / S_k^{(1)}. \tag{5}$$

Відомі величини: $V_{ck}^-, \omega_{ck}^-, \varphi_k$. Маємо систему з 6-ти алгебраїчних рівнянь (2), (3), (4), (5). Невідомих величин також шість: $V_{ck}^+, \omega_{ck}^+, V_{ck}^-, \omega_{ck}^-, S_k^{(1)}, S_k^{(2)}$.

Отримано наступні вирази для невідомих швидкостей центра інерції системи після k -го удару:

$$V_{ck}^+ = \frac{1}{J + \frac{mL^2}{4} \cos^2 \varphi_k} \left(\mp (K+1) J \frac{L}{2} \omega_{ck}^- \cos \varphi_k - \left(JK - \frac{mL^2}{4} \cos^2 \varphi_k \right) V_{ck}^- \right),$$

$$\omega_{ck}^+ = \frac{1}{J + \frac{mL^2}{4} \cos^2 \varphi_k} \left(\left(J - K \frac{mL^2}{4} \cos^2 \varphi_k \right) \omega_{ck}^- \mp (K+1) \frac{mL}{2} V_{ck}^- \cos \varphi_k \right). \tag{6}$$

ІНТЕГРОВНІСТЬ СИСТЕМИ. Враховуючи закони руху системи (1), маємо

$$V_{ck+1}^- = -g(t_{k+1}^- - t_k^+) + V_{ck}^+, \quad \omega_{ck+1}^- = \omega_{ck}^+. \tag{7}$$

Із рівностей (6), (7) випливає, що

$$\omega_{ck+1}^+ = \Omega(V_{ck}^+, \omega_{ck}^+, t_{k+1}^- - t_k^+), \quad V_{ck+1}^+ = W(V_{ck}^+, \omega_{ck}^+, t_{k+1}^- - t_k^+).$$

Система має властивість запам'ятовувати свій попередній стан.

Використовуючи співвідношення (6) при умові $K = 1$, вдалося підтвердити, що $E_k^- = E_k^+ = E$, тобто інтеграл енергії зберігається.

Кінетичний момент системи не зберігається під час удару. Його існування вимагає виконання умови $\omega_{ck}^+ = \omega_{ck}^-$, що є можливим у таких вироджених випадках:

- 1) $S_k = 0$ – відсутність удару об нерухому поверхню,
- 2) $\omega_{ck}^- = \omega_{ck}^+ = 0$ – стрижень ударяється без кутового обертання.

Отже, після удару досліджувана система втрачає один з двох інтегралів руху і стає потенційно неінтегрованою. Така динамічна система в залежності від початкових умов руху може демонструвати хаотичну поведінку.

Побудуємо графік зміни кінетичного моменту системи L_z на проміжку часу, що містить $n = 60$ послідовних ударів кінців стрижня об нерухому поверхню при значенні коефіцієнта відновлення $K = 1$.

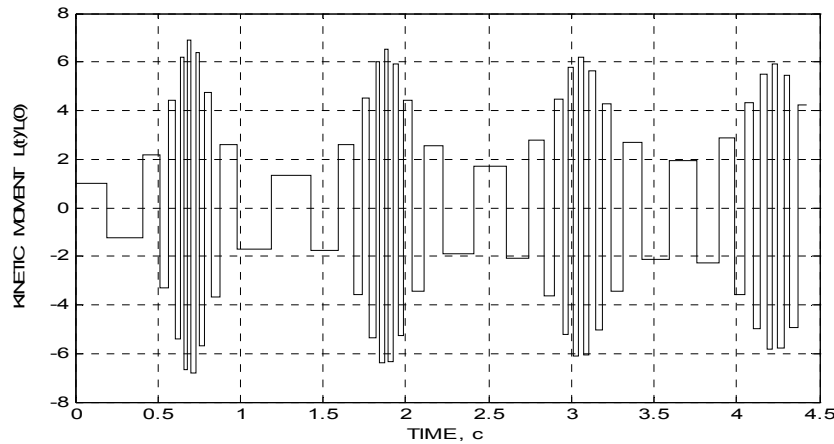


Рис. 4: Стрибки значень кінетичного моменту L_z в послідовні моменти удару.

ГАМІЛЬТОНІВ ОПИС СИСТЕМИ. Нехай y, φ – узагальнені координати системи, а p_y, p_φ – узагальнені імпульси, спряжені до узагальнених координат: $p_y = m\dot{y}, p_\varphi = J\dot{\varphi}$. Запишемо функцію Гамільтона для початкової системи:

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2J} + mgy.$$

Оскільки $H = H(p_y, p_\varphi, y)$, то координата φ – циклічна.

Функція дії у випадку сепарабельної системи [1] має вигляд: $W(y, \varphi) = W_y(y) + \beta_\varphi \varphi$. Введемо змінні дії:

$$J_y = \frac{1}{\pi} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{\partial W_y}{\partial y} dy, J_\varphi = \beta_\varphi.$$

Запишемо рівняння Гамільтона – Якобі: $\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2J} \beta_\varphi^2 + mgy = E$.

З рівняння маємо: $\frac{dW_y}{dy} = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2J} \beta_\varphi^2 - mgy \right)}$. Умова фізичності: $2m \left(E - \frac{1}{2J} \beta_\varphi^2 - mgy \right) \geq 0$. Дійсно $E \geq \frac{m\dot{y}_c^2}{2} + J \frac{\dot{\varphi}^2}{2} > 0$, $\frac{1}{2J} \beta_\varphi^2 = \frac{1}{2J} J^2 \dot{\varphi}^2$, а отже β_φ – кусково-постійний кінетичний момент. Функція Гамільтона для руху на торі:

$$H = \left(\frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{g}} J_y \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2J} \beta_\varphi^2.$$

Рівняння, що описують рух на поверхні тору: $\Phi = \omega_\varphi t + \tilde{\varphi}_0, Y = \omega_y t + \tilde{y}_0$,

де $\omega_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \beta_\varphi} = \frac{\beta_\varphi}{J}, \omega_y = \frac{\partial H}{\partial J_y} = \sqrt{\frac{m}{g}} \pi g \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{m}{g}} \pi g J_y \right)^{\frac{1}{3}}$ – частоти обертання, $\tilde{\varphi}_0, \tilde{y}_0$ – сталі інтегрування.

Між ударами J_y та β_φ є константами і стрибком змінюються під час удару. Якщо $\beta'_\varphi = -\beta_\varphi$, то J_y залишається незмінним. При цьому тор не руйнується, а траєкторія змінює напрям. Тому умова $\beta'_\varphi = -\beta_\varphi$ є достатньою для інтегровності системи.

Для демонстрації хаотичної поведінки матеріальної системи побудуємо перерізи Пуанкаре [2]. Перерізи Пуанкаре для досліджуваної системи за різних початкових умов мають наступний вигляд.

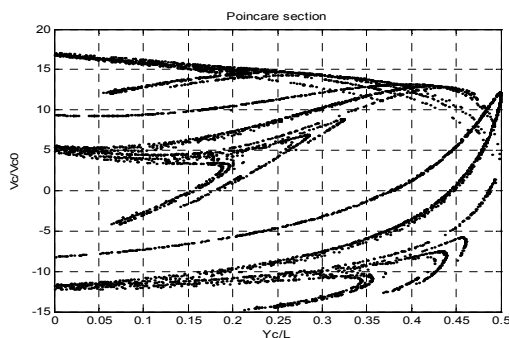


Рис. 5: Переріз Пуанкаре для енергії системи $E = 295$

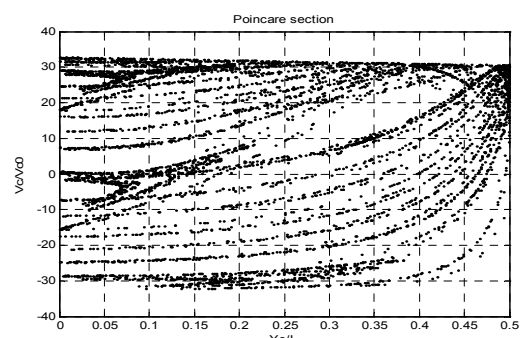


Рис. 6: Переріз Пуанкаре для енергії системи $E = 1079$

ВИСНОВКИ. Проведено аналіз руху абсолютно твердого стержня з послідовними співударями з нерухою поверхнею. У випадку відсутності дисипації енергії в системі ($K = 1$) показано, що інтеграл енергії системи не змінюється під час удару, тобто система є консервативною. Встановлено потенційну неінтегровність системи. Використавши формалізм Гамільтона, вихідний гамільтоніан системи за допомогою канонічного перетворення зведено до гамільтоніана, залежного лише від змінних дії. Отримано умову, за якої гіперповерхня, що обмежує фазові траєкторії розглядуваної динамічної системи, не руйнується. Для дослідження наявності хаотичних рухів побудовано перерізи Пуанкаре.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гаральд Іро. Класична механіка: переклад з німецької – Львів: ЛНУ, 1999.
2. Гринченко В.Т., Мацыгура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Издательство ЛКИ, 2010.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. – Т.2, М.: Наука, 1972.
4. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Перевод с англ. – М.: УРСС, 2001.

Надійшла до редколегії 31.10.12

Т. Климчук, студ.

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ С МГНОВЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

Проведено исследование движения стержня в однородном поле сил притяжения при наложении мгновенных связей. Доказано существование и разрушение интегралов движения динамической системы в случае абсолютно упругого удара. Построены сечения Пуанкаре для исследования хаотического поведения системы.

T. Klimchuk, BA

INTEGRABILITY OF SYSTEMS WITH INSTANTANEOUS CONSTRAINTS

Investigations of motion of the rod in the uniform field of gravity forces under the influence of instantaneous constraints were performed. The existence and destruction of motion integrals of the dynamic system in case of absolutely elastic impact were proved. Poincare sections were constructed for the study of chaotic behavior of the system.

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф.,
І. Лоос, канд. фіз.-мат. наук, П. Голуб, студ.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: Mo_LV@univ.kiev.ua, Loiri@univ.kiev.ua

ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОСТІ НА ЗГІННІ КОЛИВАННЯ СТЕРЖНЯ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

У статті проводиться оцінка впливу геометричної нелінійності при визначенні згинних коливань стержня під дією магнітного поля. Отримані оцінки для стержня характеризують якісну сторону поведінки гнучких пластин та оболонок під дією електромагнітного поля.

ВСТУП. На даний момент у механіці деформівного твердого тіла отримали значний розвиток дослідження з вивчення ефектів взаємодії механічних полів деформування з електромагнітними полями. Фізичні основи цих ефектів детально висвітлені у ряді курсів з класичної електродинаміки та фізики твердого тіла [3–5]. З класичної фізики відомо, що ефекти зв'язаності динамічних переміщень електропровідних тіл з електромагнітним полем зумовлені пондеромоторними силами Лоренца. Останні залежать від швидкості руху елементів провідного суцільного середовища і зовнішнього магнітного поля, а для струмонесучих елементів – від величини та орієнтації струму провідності відносно зовнішнього магнітного поля. Інша важлива обставина, яку необхідно врахувати при постановці і розв'язанні конкретних задач магнітопружності, залежить від того, що істотні ефекти пондеромоторної взаємодії мають місце для височастотних коливань електромагнітного поля, що вимагає застосування нелінійної теорії.

У даній статті вивчається вплив сталого магнітного поля та змінного електричного струму на нелінійні коливання ізотропного тонкого стержня сталого перетину, що знаходиться під дією електромагнітної сили Лоренца [1,2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГІННИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ. Розглянемо прямолінійний стержень в прямокутній системі координат (x, y, z) із алюмінію довжини l при шарнірному закріпленні його торців. Вважаємо, що гнучкий стержень знаходиться в постійному зовнішньому магнітному полі і є провідником електричного струму (рис. 1). В результаті взаємодії струму з магнітним полем у стержні виникають об'ємні сили Лоренца

$$\rho \vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}.$$

Густину струму задаємо виразом $\vec{J} = -J_0 \sin \omega t \vec{i}$, де ω – кругова частота, а вектор магнітної індукції приймається сталим, $\vec{B} = B_0 \vec{j}$. У цьому випадку сила Лоренца рівна $\rho \vec{F} = J_0 B_0 \sin \omega t \vec{k}$, тобто стержень навантажений симетрично до вертикальної площини симетрії xz .

Рівняння поперечного згину стержня у відповідності до рівноваги сил, які діють на елемент вздовж осі z , приймає вигляд

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = J_0 B_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

де σ_x – мембрана частина нормального напруження; w – прогин стержня; h – товщина стержня; E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу стержня.

Граничні умови при шарнірному закріпленні мають вигляд

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l. \quad (2)$$

Початкові умови

$$w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

Для випадку дії тільки поперечного навантаження ($\sigma_x = 0$, лінійний випадок) рівняння (1) приймає вигляд

$$\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = J_0 B_0 \sin \omega t. \quad (4)$$

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням вимушених згинних коливань стержня сталого перетину.

Розглянемо фізичний зміст членів рівняння (1). Їх знаки залежать від вибраного правила знака і не мають особливого фізичного змісту.

Перший член рівняння являє собою опір прогину, підрахований як варіація поперечної сили, момент якої урівноважує варіацію моменту згину, який виникає через зміну кривизни, тобто має згинний опір прогину, пропорційний згинній жорсткості стержня.

Другий член являє собою поперечну, обумовлену кривизною, компоненту деякої осьової сили N_x . Якщо сила N_x не залежить від прогину, обумовленого осьовим навантаженням, прикладеним на кінцях так, що вона залишається сталою при згині, то другий член лінійний відносно w . Осьова сила N_x може також викликатись прогином. Так буває, якщо опори стержня заважають руху кінців стержня назустріч один одному. Тоді, якщо стержень згинається поперечними силами, то осьова лінія буде розтягуватись, так як вона при цьому викривляється і стає довшою від початкової, а опори будуть створювати розтягуючу силу N_x , яка буде зростати пропорційно квадрату прогину. Другий член у цьому випадку буде зростати пропорційно третій степені прогину і рівняння стане нелінійним відносно w .

Третій член являє собою дію інерційного об'ємного навантаження. Четвертий член рівняння являє собою поперечне навантаження, яке викликає прогин. Вибираючи електромагнітне навантаження рівним

$$J_0 B_0 \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

розв'язок крайової задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді

$$w(x, t) = w_1 \sin \omega t \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (6)$$

де w_1 – прогин середини прогону стержня.

Перед тим як перейти до розв'язання поставленої задачі, визначимо нормальне напруження σ_x . Нехай Δl – різниця між довжинами вигнутої і не вигнутої осей стержня. Тоді

$$\sigma_x = E \frac{\Delta l}{l} = \frac{E}{l} \int_0^l \left(\sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2} - 1 \right) dx \approx \frac{E}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 E}{4l^2} w_1^2 \sin^2 \omega t. \quad (7)$$

Підставляючи в рівняння (1) вирази (6) і (7), після ділення на $\sin(\pi x / l)$ маємо

$$\frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 w_1 \sin \omega t + Eh \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 w_1^3 \sin^3 \omega t - \rho h \omega^3 w_1 \sin \omega t = J_0 B_0 \sin \omega t. \quad (8)$$

Враховуючи, що $\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$ і збираючи коефіцієнти при $\sin \omega t$, отримуємо наближене співвідношення відносно w_1 / h вигляду

$$\frac{w_1}{h} + 9 \left(\frac{w_1}{h} \right)^3 = \frac{12l^4}{Eh^4 \pi^4} \left(J_0 B_0 + \rho h^2 \omega^2 \frac{w_1}{h} \right). \quad (9)$$

Перший доданок співвідношення (9) характеризує опір навантаженню, обумовлений згином; другий доданок характеризує опір, обумовлений дією сили $\sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

На рис. 2 пунктиром показано опір обумовлений тільки згином, суцільною лінією показано сумарний опір, де P – права частина виразу (9), що поділена на $\frac{\pi^4 Eh^4}{12l^4}$.

З рис. 2 видно, що лінійна теорія дає хорошу апроксимацію до тих пір, поки прогин малий, тобто $w \leq 0,3h$ у порівнянні з висотою поперечного перерізу. Для більших прогинів частина навантаження, яке відповідає другій складовій $\sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, швидко зростає і тому повинна бути врахована.

Визначивши з (9) квадрат кругової частоти, маємо

$$\omega^2 = \frac{Eh^2 \pi^4}{12\rho l^4} \left[1 + 9 \left(\frac{w_1}{h} \right)^2 \right] - \frac{J_0 B_0}{\rho h^2} \left(\frac{h}{w_1} \right). \quad (10)$$

Для утворення процесу коливання, необхідно вимагати, щоб права частина співвідношення (10) була додатна. Виконання цієї вимоги дозволяє визначити границі зміни величини густини струму в залежності від w_1 / h при відомому B_0 . Невиконання цієї вимоги веде до того, що частина частот буде дорівнювати нулю або уявній величині. Амплітуди відповідних коливань зростатимуть необмежено. Це пов'язано з досягненням або перевищенням критичного значення по Ейлеру, коли стержень втрачає стійкість.

На рис. 3 наведені залежності J_0 від w_1/h у лінійному і нелінійному випадках. Пунктирною лінією позначено лінійний випадок $J_{0,lin}/(10^3 A/m^2)$, суцільною лінією – нелінійний випадок $J_{0,нелін}/(10^4 A/m^2)$. Тут вибрано $B_0 = 0,5 T$; $l = 0,5 m$; $h = 2 \cdot 10^{-3} m$; $E = 7,1 \cdot 10^{10} N/m^2$; $\rho = 2670 kg/m^3$.

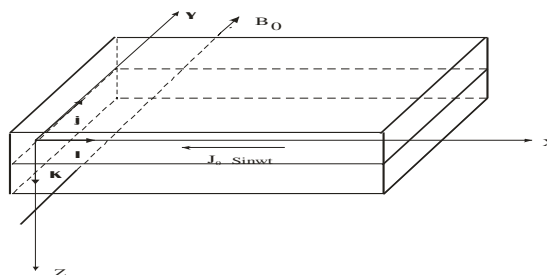


Рис.1 Струмopровідний алюмінієвий стержень

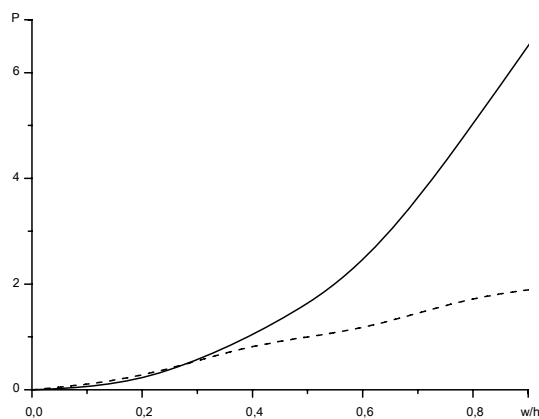


Рис. 2. Залежність прогину від механічного навантаження

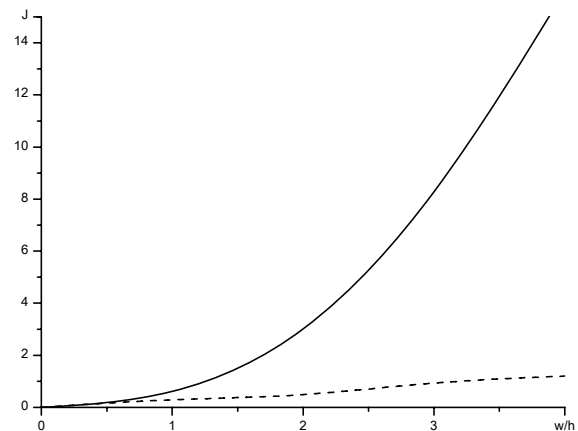


Рис. 3. Залежність густини струму від прогину

З графіків випливає, що для відповідних значень w_1/h процесу коливання складова вектора густини струму J_0 повинна приймати значення, які знаходяться під наведеними лініями. З цих же графіків випливає, що задаючись відповідними значеннями J_0 , можна визначити величини для відповідних відношень w_1/h .

ВИСНОВКИ. Відмітимо, що отримані результати дозволяють визначити максимальну густину струму при використанні лінійної і нелінійної теорій в залежності від відношень w_1/h . Отримані результати про якісну поведінку стержня можна узагальнити на випадок гнучких пластин і оболонок, що знаходяться у магнітному полі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977.
2. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин та оболонок з елементами магнітопружності. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010.
3. Страттон Д.А. Теория электромагнетизма. – М.: ГТТИ, 1948.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.
5. Moon F.C. Magnetosolid mechanics. – N. – Y.: Wiley, 1984.

Надійшла до редколегії 05.11.12

Л. Мольченко, д-р. физ.-мат. наук, проф.,
И. Лоос, канд. физ.-мат. наук, П. Голуб, студ.

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В статье приводится оценка влияния геометрической нелинейности при определении изгибных колебаний стержня под действием магнитного поля. Полученные оценки для стержня характеризуют качественную сторону поведения гибких пластин и оболочек под действием магнитного поля.

L. Molchenko, Full Doctor, I. Loos, PhD, P. Golub, BA

EFFECT OF NONLINEARITY ON THE BENDING VIBRATIONS OF THE ROD IN A MAGNETIC FIELD

The paper assesses the impact of geometric nonlinearity in determining the bending vibrations under the action of magnetic field. The estimates for the rod characterize qualitative aspects of behavior of flexible plates and shells under the action of the electromagnetic field.

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ НА ПОКАЗНИКИ СЕНСОРА ПРИ ГАРМОНІЧНИХ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ КОЛИВАННЯХ ПЛАСТИН

Розглянуто задачу про вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів при вимушених гармонічних коливаннях пасивних пластин. Представлено основні співвідношення для дослідження впливу розмірів сенсора та температури дисипативного розігріву на працездатність сенсорів. На основі варіаційних принципів запропоновано метод дослідження впливу дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів.

ВСТУП. Для активного демпфірування гармонічних коливань тонких пластин із пасивних матеріалів за допомогою сенсорів та актуаторів в її структуру вводяться п'єзоелектричні включення, що виконують роль сенсорів, які можуть бути розміщені як на її поверхні, так і у будь-якому місці по товщині. Вони можуть покривати всю область пластини, або наноситись у вигляді плям. Основна функція цих включень у наданні інформації про механічну поведінку пластини, зокрема про амплітуду резонансних коливань.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо постановку задачі про вплив температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора у декартовій системі координат. Прямокутна пластина товщиною h_0 , на поверхнях якої розміщені прямокутні сенсори товщиною $h_1 \ll h_0$ з протилежною поляризацією. На пластину діє рівномірний поверхневий тиск, що змінюється з часом по гармонічному закону. Матеріал пластини вважається в'язкопружним із залежними від температури комплексними характеристиками. Втрати у п'єзоактивному матеріалі та впливом сенсора на жорсткісні характеристики пластини нехтуємо із-за їх малої товщини порівняно з товщиною пасивної пластини. Нехтуємо також впливом на механічну поведінку тієї різниці потенціалів, яка виникає в сенсорі при деформуванні пластини. Вважається, що температура дисипативного розігріву постійна по товщині пластини. При цьому термомеханічна поведінка ізотропної в'язкопружної пластини описується нелінійною системою диференціальних рівнянь [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[2(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - (\gamma h) \omega^2 w - p_0(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} (T - T_C) + \frac{\omega E''(T) h^3}{24(1-\nu^2)(\lambda h)} \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0.$$

Тут w – поперечний прогин; $D = D' + iD''$ – комплексна згинна жорсткість; γ – густина матеріалу; ω – частота коливань; якщо нехтувати впливом п'єзочарів на згинну жорсткість, то $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν – комплексний модуль та коефіцієнт Пуассона; T – температура дисипативного розігріву, α – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем з температурою T_C , λ – коефіцієнт теплопровідності.

До системи рівнянь (1) необхідно приєднати традиційні механічні та теплові граничні умови.

Для розімкнутих електродів різницю потенціалів, яку показує сенсор при згинних коливаннях пластини, можна подати у вигляді:

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1) \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \frac{d_{31}}{s_{11}(1-\nu_S)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy}{2 \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \epsilon_{33} (1-k_p^2) dx dy}. \quad (2)$$

Тут використано позначення з монографії [2], $k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{S_{11}\epsilon_{33}(1-\nu_S)}$, C_1, C_2, D_1, D_2 – координати вершин прямокутного сенсора, центр якого співпадає з центром пластини. Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (2) приймає вигляд:

$$V_S = \frac{h_1(h_0 + h_1)}{2S} \frac{k_p^2}{d_{31}(1-k_p^2)} \int_{C_1}^{C_2} \int_{D_1}^{D_2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (3)$$

Вираз (3) залишиться без зміни і у випадку, коли характеристики сенсора залежать від осередненої по його площі температури. Надалі будемо вважати, що коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу ν – дійсна величина і не залежить від температури.

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ НА ПОКАЗНИКИ СЕНСОРА.

Для дослідження впливу температури дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсора необхідно спочатку

знайти показники сенсора без врахування температури дисипативного розігріву, потім розв'язати нелінійні диференціальні рівняння (1) з відповідними граничними умовами при дії тільки поперечного тиску, і підставити знайдені температуру та прогин у формулу (2) для розрахунку показників сенсора у залежності від температури дисипативного розігріву. Для розв'язку системи (1) можна використати варіаційні методи, задавши відповідні вирази для прогину і для температури з деякими невідомими параметрами, для яких шляхом мінімізації функціоналів знаходяться нелінійні алгебраїчні рівняння.

Як приклад застосування вказаного підходу розглянемо круглу пластину товщиною h_0 з жорстко закріпленим торцем при дії на неї гармонічного в часі поверхневого тиску. На поверхні пластини розміщено круглі сенсори малої товщини $h_1 = h_2$ з протилежною поляризацією. Матеріал пасивної пластини вважається в'язкопружним з комплексними характеристиками, які залежать від температури. Дійсна та уявна складові модуля зсуву змінюються з температурою за лінійним законом:

$$G = G' + iG'', \quad G' = G'_0 - G'_1 T, \quad G'' = G''_0 - G''_1 T, \quad (4)$$

Тут G'_0, G'_1, G''_0, G''_1 визначаються експериментально. Так, наприклад, подані у [3] експериментальні дані для поліетилену у діапазоні температур $20^0 C \leq \theta \leq 80^0 C$ з великою точністю апроксимуються виразом (4), в якому $G' = 968 - 8,69\theta$ (МПа), $G'' = 87,1 - 0,7\theta$ (МПа). Коефіцієнт Пуассона поліетилену $\nu = 0,3227$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,47$ Вт/(м·град), густина $\gamma = 938$ кг/м³. При врахуванні залежності властивостей п'єзоматеріалу від температури використаємо експериментальні дані для п'єзокераміки ЦТСТБС-2. Температура на контурі пластини підтримується постійною і дорівнює T_C . При коливаннях круглої пластини на першій резонансній частоті вираз для прогину вибираємо у стандартному для такої пластини вигляді: $w = A(1 - \rho^2)^2$.

Тоді температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з виразу, представленого в [4]:

$$T_1 = \frac{C_1 \tilde{x}}{C_0 + C_2 \tilde{x}}, \quad \tilde{x} = |A|^2, \quad (5)$$

$$\text{де } C_0 = 1 + \frac{1}{6} \psi_4, \quad C_1 = \left(1 + \frac{\nu}{12}\right) \psi_0, \quad C_2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{\nu}{10}\right) \psi_1, \quad \psi_0 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_0'', \quad \psi_1 = \frac{8 \omega}{\lambda h a^2} D_1'', \quad \psi_4 = \frac{2 \alpha a^2}{\lambda h}.$$

За допомогою стандартної варіаційної техніки знайдемо вираз для комплексної амплітуди коливань:

$$A = \frac{p_0}{A_1 + i A_2}, \quad (6)$$

$$\text{де } A_1 = B_1 - b_1 T_1, \quad A_2 = B_2 - b_2 T_1, \quad B_1 = \frac{64 D_0'}{a^4} - \frac{3}{5} (\gamma h) \omega^2, \quad B_2 = \frac{64 D_0''}{a^4}, \quad b_1 = \frac{96 D_1'}{a^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}\right), \quad b_2 = \frac{96 D_1''}{a^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}\right).$$

З (6) знайдемо такий вираз для квадрата амплітуди коливань:

$$x = \frac{p_0^2}{(B_1^2 + B_2^2) - 2(b_1 B_1 + b_2 B_2) T_0 + (b_1^2 + b_2^2) T_0^2}. \quad (7)$$

Виключаючи x з (5), (7), одержимо кубічне рівняння для визначення T_1 :

$$T_1^3 - d_2 T_1^2 + d_1 T_1 - d_0 = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } d_0 = \frac{C_1 p_0 / C_0}{b_1^2 + b_2^2}, \quad d_1 = \frac{B_1^2 + B_2^2 + C_2 p_0^2 / C_0}{b_1^2 + b_2^2}, \quad d_2 = 2 \frac{b_1 B_1 + b_2 B_2}{b_1^2 + b_2^2}.$$

Введемо безрозмірну температуру $y = T_1 / T_C$. Тоді з (8) маємо кубічне рівняння для y :

$$y^3 - e_2 y^2 + e_1 y - e_0 = 0,$$

$$\text{де } e_0 = \frac{d_0}{T_C^3}, \quad e_1 = \frac{d_1}{T_C^2}, \quad e_2 = \frac{d_2}{T_C}.$$

Після визначення температури дисипативного розігріву амплітуда коливань визначається згідно формули (7). Для коротко-замкнутих електродів заряд, що знімаємо з круглого сенсора, обчислюємо за формулою:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \int_0^{\rho_1} \gamma_{31} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (9)$$

Тут використано позначення монографії [2]. Якщо характеристики сенсора не залежать від температури, то вираз (9) приймає вигляд:

$$Q = 2\pi(h_0 + h_1) \gamma_{31} \int_0^{\rho_1} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) \rho d\rho. \quad (10)$$

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ. Як видно з (9), (10), на відміну від поведінки п'єзоактуатора [4], заряд, що знімається з сенсора, пропорційний амплітуді коливань, яка істотно залежить від температури дисипативного розігріву. Тому температура дисипативного розігріву суттєво впливає на показники сенсора при врахуванні залежності властивостей як пасивних, так і п'єзоактивних матеріалів. Це принципово відрізняє поведінку сенсора від поведінки актуатора [4]. Так як сенсор є основним елементом при активному демпфіруванні коливань пластин при сумісному використанні

сенсорів та актуаторів, можна припустити, що у цьому випадку дисипативний розігрів суттєво вплине на ефективність активного демпфірування вимушених резонансних коливань. Підставляючи $w = A(1 - \rho^2)^2$ в (10), одержимо

$$Q = -8\pi A(h_0 + h_1)\gamma_{31}\rho_1^2(1 - \rho_1^2). \tag{11}$$

Ефективність роботи сенсора оцінюється по величині Q при одній і тій же амплітуді коливань: той сенсор більш ефективний, у якого ця величина більше. Із виразу (11) слідує, що максимальне значення показник сенсора приймає при $\rho_1 = \sqrt{2}/2$. З іншого боку, при $\rho_1 \rightarrow 0$ та при $\rho_1 \rightarrow 1$ цей показник прямує до нуля. Таким чином, при повному покритті поверхні жорстко закріпленої пластини сенсором та при дуже малих його радіусах сенсор перестав виконувати своє функціональне призначення. Найбільш ефективне використання сенсора має місце при радіусі сенсора $\rho_1 = \sqrt{2}/2$. Залежність показника сенсора $Y = -\frac{1}{8\pi A h_1 (h_0 + h_1) \gamma_{31}}$ від його радіуса представлена на Рис. 1.

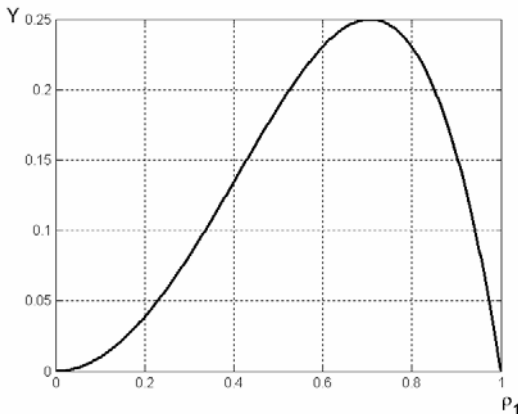


Рис. 1. Залежність показника сенсора від його радіуса

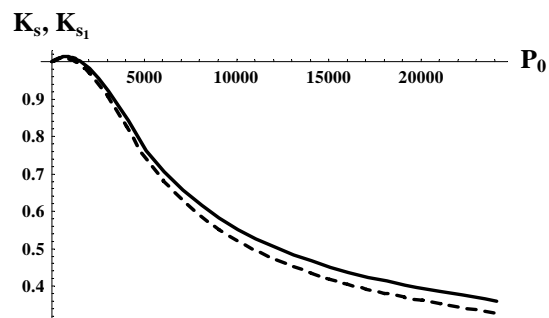


Рис. 2. Залежність K_{S1} від параметра навантаження

Як видно з цього рисунка, різниця потенціалів прямує до нуля як при наближенні радіуса сенсора до нульового, так і при його наближенні до радіуса пластини. З формули (11) видно, що при досягненні температурою точки Кюрі, коли $\gamma_{31}(T_K) = 0$, показник сенсора також стає рівним нулеві, тобто сенсор перестав виконувати своє функціональне призначення через втрату матеріалом п'єзоефекту. Нехай пластинка коливається на частоті лінійного резонансу. Якщо враховується тільки залежність від температури властивостей пасивного матеріалу, а властивості п'єзоматеріалу залежать від осередненої по площі температури, то із представлених вище формул одержуємо, що для коротко-замкнених електродів:

$$K_{S1} = \frac{|Q(\theta^0 C)|}{|Q(20^0 C)|} = \frac{\gamma_{31}(\theta^0 C)}{\gamma_{31}(20^0 C)} \cdot \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}.$$

Якщо ж від температури залежать тільки властивості пасивного матеріалу, то $K_S = \frac{|A(\theta^0 C)|}{|A(20^0 C)|}$. На Рис. 2 показано

залежність K_{S1} від параметра навантаження для круглї пластини з жорстким закріпленням торця. Тут штрихова лінія відповідає випадку, коли властивості п'єзоматеріалу не залежать від температури, а суцільна – випадку, коли вони залежать від осередненої по площі температури. Як видно з цих графіків, при врахуванні залежності властивостей пасивного матеріалу від температури у широкому діапазоні значень параметра навантаження показники сенсора погіршуються.

ВИСНОВКИ. На основі варіаційних принципів запропоновано метод дослідження впливу дисипативного розігріву на ефективність роботи сенсорів при вимушених гармонічних коливаннях пасивних пластин. Представлено основні співвідношення, які дозволяють досліджувати вплив розмірів сенсора та температури дисипативного розігріву на працездатність сенсорів. Як приклад розглянуто задачу про ефективність роботи сенсора, розміщеного на суцільній круглї пластині, що здійснює осесиметричні згинні резонансні коливання. З отриманих формул слідує, що при коливаннях на резонансній частоті розміри сенсора і температура дисипативного розігріву можуть суттєво впливати на ефективність роботи сенсорів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Карнаухова Т.В., Пятецька Е.В. Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами // Прикладная механика – 2009. – 45, № 6. – С. 100 – 112. 2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – Т.4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. 3. Свойства полимеров и нелинейная акустика. Физическая акустика/ Под ред. У.Мезона. Т.2. Ч.Б. – М.: Мир, 1969. – 420с. 4. Карнаухова Т.В., Пятецька Е.В. Основные соотношения термомеханики неупругих тонких пассивных пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении// Прикладная механика – 2009. – 45, №. 2 – С. 107–123.

О. Пятецкая, канд. физ.-мат. наук

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА НА ПОКАЗАТЕЛИ СЕНСОРА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН

Рассмотрена задача о влиянии температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров при вынужденных гармонических колебаниях пассивных пластин. Представлены основные соотношения для исследования влияния размеров сенсоров и температуры диссипативного разогрева на работоспособность сенсоров. На основе вариационных принципов предложен метод исследования диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров.

O. Pyatetska, PhD

INVESTIGATION OF INFLUENCE A TEMPERATURE OF DISSIPATIVE HEATING ON SENSOR'S FACTORS BY HARMONIC THERMO-MECHANICAL VIBRATIONS OF PLATES

The problem of influence a temperature of dissipative heating on efficiency sensors work by forced harmonic vibrations of passive plates is considered. The basic relations for investigation influence of the sensor dimensions and temperature of dissipative heating on sensors operability are presented. Based on the variation principles, the method to investigate the influence of dissipative heating on efficiency sensors work is proposed.

УДК 532.529: 532.517.4

Б. Рохман, д-р. техн. наук., В. Каліон, канд. фіз.-мат. наук., А. Худащов, студ. КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

Email: kalion@univ.kiev.ua, Lena56@mail.ru

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ МАСИ, ІМПУЛЬСУ Й ЕНЕРГІЇ У ВИСХІДНОМУ ПОЛІДИСПЕРСНОМУ ПОТОЦІ З ВРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ ДИСПЕРСНОЇ ФАЗИ Й ВЗАЄМОДІЇ ЧАСТИНОК МІЖ СОБОЮ

Побудовано замкнену систему рівнянь, що описує рух й фізико-хімічні процеси у висхідному полідисперсному потоці, з урахуванням обертання дисперсної фази, сил аеродинамічного опору, ваги та Магнуса, взаємодії частинок між собою та зі стінкою реактора. Замикання рівнянь руху й теплопереносу твердої фази здійснюється на рівні рівнянь для других моментів пульсацій. Пульсаційні характеристики несучого середовища обчислюються із рівняння для турбулентної енергії газу. Отримані результати порівнюються із результатами інших авторів.

ВСТУП. Математичному моделюванню аеродинаміки, тепло-масообміну й горінню полідисперсного ансамблю коксозольних частинок з метою одержання детальної інформації про розподіл швидкісних, концентраційних і температурних полів фаз, що необхідна для конструювання енергетичних установок, приділяється значна увага. Найбільше поширення одержали моделі, що включають рівняння переносу других моментів пульсацій швидкості і температури частинок. Однак у цих рівняннях не повною мірою враховані ефекти, що пов'язані з взаємодією частинок між собою (псевдотурбулентні ефекти), полідисперсністю, обертанням дисперсної фази і дією сили Магнуса [1, 4, 5].

У даній роботі для розрахунку аеродинаміки, теплових й фізико-хімічних процесів у рамках "дворідинної моделі" (ейлереве наближення) побудовано математичну модель, що враховує перенос других моментів пульсацій швидкості (лінійної та кутової), температуру частинок, променистий й конвективний теплообмін, гетерогенність реакцій, сили взаємодії фаз (аеродинамічний опір та силу Магнуса), а також сили взаємодії частинок між собою, турбулентні та псевдотурбулентні ефекти, полідисперсність та обертання частинок.

При побудові методики розрахунку приймаються наступні припущення: 1) процес стаціонарний; 2) стехіометрична схема реакцій містить у собі гетерогенну реакцію $C + O_2 = CO_2$, що протікає на зовнішній поверхні непроникних кулястих частинок; 3) зміна тиску газу в поперечному перерізі потоку не враховується; 4) розглядається двофазове гетерогенне середовище, що складається з несучого середовища (азоту, кисню, вуглекислого газу) й твердої фази, що представлена у вигляді двох ансамблів (кокс + зола), кожний з яких складається із кінцевого числа монодисперсних фракцій M_C та M_{ash} (тут M – кількість фракцій; індекси нижні: C – вуглець, ash – зола); 5) вектор кутової швидкості частинок спрямовано уздовж трансверсальної осі; 6) використовується наближення приміжового шару: $v \ll u, u' \ll u, v' \sim v, \partial/\partial z \ll \partial/\partial r$.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ. Система рівнянь, що описує рух, тепломасообмін й хімічне реагування висхідного полідисперсного потоку коксозольних частинок в осесиметричному каналі, має вигляд

$$\frac{\partial(C_{O_2} u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(C_{O_2} v_g + < C'_{O_2} v'_g >)]}{r \partial r} = -6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(C_{CO_2} u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(C_{CO_2} v_g + < C'_{CO_2} v'_g >)]}{r \partial r} = 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(C_{N_2} u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(C_{N_2} v_g + < C'_{N_2} v'_g >)]}{r \partial r} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_g u_g)}{\partial z} + \frac{\partial[r(\rho_g v_g + < \rho'_g v'_g >)]}{r \partial r} = 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{(\mu_{CO_2} - \mu_{O_2}) L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\beta_j u_{pj})}{\partial z} + \frac{\partial[r(\beta_j v_{pj} + < \beta'_j v'_{pj} >)]}{r \partial r} = -\frac{6 \mu_C L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j \rho_C}, \quad \frac{\partial(n_j u_{pj})}{\partial z} + \frac{\partial[r(n_j v_{pj} + < n'_j v'_{pj} >)]}{r \partial r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\beta_l u_{pl})}{\partial z} + \frac{\partial[r(\beta_l v_{pl} + < \beta'_l v'_{pl} >)]}{r \partial r} = 0, \quad \rho_g u_g \frac{\partial u_g}{\partial z} + (\rho_g v_g + < \rho'_g v'_g >) \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \rho_g (\eta_g \frac{\partial u_g}{\partial r} - < u'_g v'_g >) \right] -$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \sum_{i=1}^{M_C+M_{ash}} (F_{aiz} + F_{Miz}) + 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{(\mu_{CO_2} - \mu_{O_2}) L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j} (u_{pj} - u_g), \quad (5)$$

$$\rho_{pi} \left[\beta_i u_{pi} \frac{\partial u_{pi}}{\partial z} + (\beta_i v_{pi} + \langle \beta_i' v_{pi}' \rangle) \frac{\partial u_{pi}}{\partial r} \right] = -\frac{\rho_{pi}}{r} \frac{\partial (\beta_i r \langle u_{pi}' v_{pi}' \rangle)}{\partial r} + F_{aiz} + F_{Miz} + F_{coliz} - \rho_{pi} \beta_i g, \quad (6)$$

$$\rho_{pi} \left[\beta_i u_{pi} \frac{\partial v_{pi}}{\partial z} + (\beta_i v_{pi} + \langle \beta_i' v_{pi}' \rangle) \frac{\partial v_{pi}}{\partial r} \right] = -\frac{\rho_{pi}}{r} \frac{\partial [r(v_{pi} \langle \beta_i' v_{pi}' \rangle + \beta_i \langle v_{pi}'^2 \rangle)]}{\partial r} + F_{air} + F_{Mir} + F_{colir} + \rho_{pi} \beta_i \langle w_{pi}'^2 \rangle / r, \quad (7)$$

$$\beta_i u_{pi} \frac{\partial \omega_{\phi i}}{\partial z} + (\beta_i v_{pi} + \langle \beta_i' v_{pi}' \rangle) \frac{\partial \omega_{\phi i}}{\partial r} = -\frac{\partial (r \beta_i \langle \omega_{\phi i}' v_{pi}' \rangle)}{r \partial r} - \frac{\beta_i \langle \omega_{\phi i}' w_{pi}' \rangle}{r} - \gamma_i \beta_i \left(\omega_{\phi i} + \frac{\partial u_g}{2 \partial r} \right), \quad (8)$$

$$\rho_g u_g \frac{\partial k_g}{\partial z} + (\rho_g v_g + \langle \rho_g' v_g' \rangle) \frac{\partial k_g}{\partial r} = \frac{\partial}{r \partial r} \left[r \rho_g \left(\frac{\eta_{t,g}}{\sigma_k} + \eta_g \right) \frac{\partial k_g}{\partial r} \right] + \rho_g \eta_{t,g} \left(\frac{\partial u_g}{\partial r} \right)^2 - \rho_g (\varepsilon_g + \varepsilon_p) + G_g - 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{(\mu_{CO_2} - \mu_{O_2}) L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j} (2k_g - \langle u_{pj}' u_g' \rangle - \langle v_{pj}' v_g' \rangle - \langle w_{pj}' w_g' \rangle), \quad (9)$$

$$c_g \rho_g u_g \frac{\partial t_g}{\partial z} + c_g (\rho_g v_g + \langle \rho_g' v_g' \rangle) \frac{\partial t_g}{\partial r} = \frac{\partial}{r \partial r} \left[r c_g \rho_g \left(\frac{\eta_g}{Pr_g} \frac{\partial t_g}{\partial r} - \langle t_g' v_g' \rangle \right) \right] + 10^{-3} \left\{ u_g \frac{\partial P}{\partial z} + \sum_{i=1}^{M_C+M_{ash}} (F_{aiz} + F_{Miz}) (u_g - u_{pi}) \right\} + \sum_{i=1}^{M_C+M_{ash}} \alpha_{\Sigma i} (t_{pi} - t_g) \frac{6\beta_i}{\delta_i} + 6 \sum_{j=1}^{M_C} \frac{(\mu_{CO_2} - \mu_{O_2}) L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j} \left[c_{pj} t_{pj} - c_g t_g + \frac{0.5(u_g - u_{pj})^2}{10^3} \right] + 10^{-3} \rho_g \eta_{t,g} \left(\frac{\partial u_g}{\partial r} \right)^2 \quad (10)$$

$$c_{pi} \beta_i u_{pi} \frac{\partial t_{pi}}{\partial z} + c_{pi} (\beta_i v_{pi} + \langle \beta_i' v_{pi}' \rangle) \frac{\partial t_{pi}}{\partial r} = -\frac{\partial (r \beta_i c_{pi} \langle t_{pi}' v_{pi}' \rangle)}{r \partial r} - \alpha_{\Sigma i} (t_{pi} - t_g) \frac{6\beta_i}{\delta_i \rho_{pi}} + \frac{6\theta_i L_i S_i \beta_i C_{O_2} Q_i}{(L_i + S_i) \delta_i \rho_{pi}}, \quad (11)$$

$$\frac{dB_g}{dz} = 12\pi \int_0^{R_{M_C}} \frac{(\mu_{CO_2} - \mu_{O_2}) L_j S_j \beta_j C_{O_2}}{(L_j + S_j) \delta_j} r dr; \quad \rho_g = \frac{10^{-3} P}{(t_g + 273) H \sum_{\chi=1}^3 \frac{Z_\chi}{\mu_\chi}}, \quad \delta_j = \sqrt[3]{6\beta_j / \pi n_j} \quad (12)$$

де $F_{Mir} = -\lambda_{\omega i} \beta_i \rho_{pi} (u_g - u_{pi}) \left(\omega_{\phi i} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_g}{\partial r} \right), \quad \langle t_g' v_g' \rangle = -\frac{\eta_{t,g}}{Pr_{t,g}} \frac{\partial t_g}{\partial r}, \quad \langle n_j' v_{pj}' \rangle = -J_{pj} \frac{\partial n_j}{\partial r},$

$$F_{Miz} = \lambda_{\omega i} \beta_i \rho_{pi} \left[\langle \omega_{\phi i}' w_{pi}' \rangle - \langle \omega_{\phi i}' v_{pi}' \rangle + (v_g - v_{pi}) \left(\omega_{\phi i} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_g}{\partial r} \right) \right],$$

$$\langle C_\chi' v_g' \rangle = -J_g \frac{\partial C_\chi}{\partial r}, \quad \langle \beta_i' v_{pi}' \rangle = -J_{pi} \frac{\partial \beta_i}{\partial r}, \quad \langle u_{pi}' v_{pi}' \rangle = -\eta_{t,pi} \frac{\partial u_{pi}}{\partial r}, \quad \lambda_{\omega i} = \frac{3\rho_g}{4\rho_{pi}}, \quad \langle \rho_g' v_g' \rangle = -J_g \frac{\partial \rho_g}{\partial r},$$

$$\langle u_g' v_g' \rangle = -\eta_{t,g} \frac{\partial u_g}{\partial r}, \quad \gamma_i = \frac{60\rho_g \eta_g}{\rho_{pi} \delta_i^2}, \quad F_{air} = \frac{\rho_{pi} \beta_i}{\tau_i} (v_g - v_{pi}), \quad F_{aiz} = \frac{\rho_{pi} \beta_i}{\tau_i} (u_g - u_{pi}),$$

Тут B – витрата, кг/с; C – концентрація, кмоль/м³; c – теплоємність, кДж/(кг·К); F – сила, кг/(с²·м²); g – прискорення вільного падіння, м/с²; H – універсальна газова константа, кДж/(кмоль·К); J – коефіцієнт турбулентної дифузії, м²/с; k – кінетична пульсаційна енергія, м²/с²; L – константа швидкості реакції, м/с; n – злічена концентрація частинок; P – тиск газу, Н/м²; Pr – число Прандтля; Q – тепловий ефект реакції $C + O_2 = CO_2$, кДж/кмоль; R – радіус каналу, м; r, z – радіальна й поздовжня координати, м; S – коефіцієнт масообміну, м/с; t – температура, °С; u, v, w – осереднені складові вектора швидкості, м/с; Z – масова доля компоненти газової суміші; α – коефіцієнт теплообміну (променистий + конвективний) між газом й частинкою, кДж/(с·м²·К); β – істинна об'ємна концентрація частинок; γ – коефіцієнт, с⁻¹; δ – діаметр частинки, м; μ – молекулярна маса, кг/кмоль; ε – дисипація пульсаційної енергії, м²/с³; η – коефіцієнт кінематичної в'язкості, м²/с; θ, λ – коефіцієнти; ρ – густина, кг/м³; σ – емпірична стала; τ – час динамічної релаксації, с. Індекси нижні: a – сила аеродинамічного опору частинки; CO_2 – вуглекислий газ; col – співударіння; g – газ; $i = j, l: j = 1 \div M_C; l = 1 \div M_{ash}$; k – кінетична пульсаційна енергія газу; M – сила Магнуса; N_2 – азот; O_2 – кисень; t – пульсації; ϕ – трансверсальна координата; $\chi = 1 \div 3$ відносяться до O_2, CO_2, N_2 ; ω – кутова швидкість частинки; Σ – сума. Індекси верхні: l – пульсаційна складова при осередненні за часом; $\langle \rangle$ – осереднення за часом (по простору). Подвійні кореляції пульсацій швидкостей газу й частинок $\langle u_{pj}' u_g' \rangle, \langle v_{pj}' v_g' \rangle, \langle w_{pj}' w_g' \rangle$ визначаються згідно [3]. Праві частини рівнянь нерозривності фаз (1)–(4) врахову-

ють вплив гетерогенної реакції $C+O_2=CO_2$. У рівнянні руху газу (5) фігурують в'язкі й рейнольдсові напруги, градієнт тиску, сили аеродинамічного опору та Магнуса. Останній член рівняння враховує перехід згорілого вуглецю у газову фазу (тобто, його розгін від швидкості частинок j до швидкості газу). Рівняння (6), (7) містять у собі турбулентні напруги, сили тяжіння, взаємодії фаз та частинок між собою F_{coli} [2], а також відцентрову силу, що виникає за рахунок трансверсальних пульсацій швидкості частинок. У правій частині рівняння (9) перший член описує молекулярний й турбулентний перенос пульсаційної енергії, другий – її генерацію за рахунок енергії осередненого руху, третій – її дисипацію, що обумовлена в'язкістю газової фази й присутніх у ній частинок, четвертий – генерацію турбулентної енергії в слідах за частинками, останній – витрати пульсаційної енергії газу, що пов'язані з новою речовиною. У рівнянні (10) враховується молекулярний й турбулентний перенос газового потоку, робота рейнольдсових напруг, сил тиску й взаємодії фаз, променистий й конвективний теплообмін між газом та частинками, а також надлишок ентальпії й нестача кінетичної енергії тієї частини речовини частинок коксу, що переходить у газ за рахунок гетерогенної реакції. У рівнянні (11) фігурують члени, що враховують пульсаційний теплоперенос у твердій фазі, теплообмін між несучим середовищем й дисперсною фазою, тепловиділення за рахунок гетерогенної хімічної реакції.

Для замикання системи рівнянь (1)–(12) необхідно визначити невідомі другі моменти $\langle v_{pi}^{\prime 2} \rangle$, $\langle w_{pi}^{\prime 2} \rangle$, $\langle t_{pi}' v_{pi}' \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}' v_{pi}' \rangle$, $\langle \omega_{ri}' w_{pi}' \rangle$, які, у свою чергу, залежать від рейнольдсових напруг $\langle w_{pi}' v_{pi}' \rangle$, $\langle u_{pi}^{\prime 2} \rangle$, $\langle t_{pi}' w_{pi}' \rangle$, $\langle t_{pi}' \omega_{ri}' \rangle$, $\langle t_{pi}' \omega_{\phi i}' \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}' \omega_{ri}' \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}^{\prime 2} \rangle$, $\langle \omega_{ri}^{\prime 2} \rangle$, $\langle \omega_{ri}' v_{pi}' \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}' w_{pi}' \rangle$ й $\langle u_{pi}' \omega_{\phi i}' \rangle$

(див. нижче). Для обчислення зазначених змінних використовувалася спеціально розроблена методика розрахунку, що базується на побудові рівнянь переносу шуканих кореляцій [2]. На підставі цієї методики, у наближенні вузького каналу отримано систему рівнянь, що описує рух й теплоперенос дисперсної фази на рівні рівнянь для других моментів пульсацій швидкості (поступальної та кутової) й температури частинок. Отримана система рівнянь дуже громіздка, тому її винесено у Додаток, який можна отримати у авторів статті за вказанною вище електронною адресою.

Мішані моменти $\langle v_{pi}' v_g' \rangle$, $\langle w_{pi}' w_g' \rangle$, $\langle v_g' w_{pi}' \rangle$, $\langle v_{pi}' w_g' \rangle$, $\langle u_{pi}' u_g' \rangle$, $\langle t_g' v_{pi}' \rangle$, $\langle t_{pi}' v_g' \rangle$, $\langle t_{pi}' w_g' \rangle$ та $\langle t_g' w_{pi}' \rangle$, що присутні у цих рівняннях, визначаються через кореляції газу в локально-однорідному наближенні згідно із рекомендаціями [3]. Однак ця система рівнянь не є замкнутою, бо в ній фігурують додаткові члени нетурбулентного походження, що описують генерацію G_{pqi} й дисипацію D_{qi} псевдотурбулентності, й які обумовлені взаємодією моно- та полідисперсних частинок при їх хаотичному русі. Для визначення величин G_{pqi} й D_{qi} використовувалася спеціально розроблена методика розрахунку, що базується на аналізі динаміки процесу зіткнень [2].

Члени, що відповідають за генерацію псевдотурбулентності мають наступний вигляд:

$$G_{pqi} = \frac{\beta_i(1-K_\tau)}{21\delta_i} \left\{ \frac{(1-K_\tau)s_{qi}\delta_i^2\omega_{\phi i}^2}{14} - \frac{a_{qi} \left[\frac{1-K_n}{2} - \frac{1-K_\tau}{7} \right] \delta_m^2 \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial r} \right)^2}{144\beta_m^2} \right\} N_{\Sigma i, i} + \frac{4(1-K_\tau)}{21} \times \\ \times \sum_{\substack{i=1 \\ y \neq i}}^{M_C+M_{ash}} \frac{\beta_i m_y^2 N_{\Sigma y, i}}{(m_y + m_i)^2 \delta_i} \left\{ \frac{(1-K_\tau)(\delta_i \omega_{\phi i} + \delta_y \omega_{\phi y})^2 s_{qi}}{56} - a_{qi} \left[1-K_n - \frac{2(1-K_\tau)}{7} \right] (u_{py} - u_{pi})^2 \right\},$$

де $q = 1, 2$ відносяться до $\langle \omega_{ri}' w_{pi}' \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}' v_{pi}' \rangle$; $s_{1i} = 0$, $s_{2i} = 1$; $a_{1i} = -1$, $a_{2i} = 1$; $K_n < 0$,

$$G_{pqi} = \frac{\beta_i(1-K_\tau)^2}{s_{qi}\delta_i^2} \left[\frac{\delta_m^2 \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial r} \right)^2}{a_{qi}\beta_m^2} + \delta_i^2 \omega_{\phi i}^2 \right] N_{\Sigma i, i} + \sum_{\substack{i=1 \\ y \neq i}}^{M_C+M_{ash}} \frac{(1-K_\tau)^2 m_y^2 \beta_i N_{\Sigma y, i}}{3.92(m_y + m_i)^2 \delta_i^2} \times \\ \times \left[(u_{py} - u_{pi})^2 + (\delta_i \omega_{\phi i} + \delta_y \omega_{\phi y})^2 / f_{qi} \right],$$

де $q = 3, 4$ відносяться до $\langle \omega_{ri}^{\prime 2} \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}^{\prime 2} \rangle$; $s_{3i} = 94.08$, $s_{4i} = 62.72$; $a_{3i} = 48$, $a_{4i} = 72$; $f_{3i} = 24$, $f_{4i} = 16$,

$$G_{p5i} = - \frac{(1-K_\tau)\omega_{\phi i}\delta_m \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial r} \right)}{806.4\sqrt{2}\beta_m} \left[1-K_n + \frac{5(1-K_\tau)}{3.5} \right] \beta_i N_{\Sigma i, i} - \\ - \frac{(1-K_\tau)}{1.4} \sum_{\substack{i=1 \\ y \neq i}}^{M_C+M_{ash}} \frac{m_y^2 \beta_i N_{\Sigma y, i} (u_{py} - u_{pi})(\delta_i \omega_{\phi i} + \delta_y \omega_{\phi y})}{\delta_i (m_y + m_i)^2} \left[\frac{1-K_n}{24} + \frac{5(1-K_\tau)}{84} \right], \\ G_{pqi} = \left\{ \frac{\left[\frac{1-K_n}{2} - \frac{1-K_\tau}{7} \right] \delta_m^2 \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial r} \right)^2}{6912\beta_m^2} + \frac{s_{qi}\delta_i^2(1-K_\tau)^2\omega_{\phi i}^2}{a_{qi}} \right\} \beta_i N_{\Sigma i, i} + \sum_{\substack{i=1 \\ y \neq i}}^{M_C+M_{ash}} \frac{m_y^2 \beta_i N_{\Sigma y, i}}{(m_y + m_i)^2} \times$$

$$\times \left\{ \left[1 - K_n - \frac{2(1 - K_\tau)}{7} \right]^2 (u_{py} - u_{pi})^2 / 24 + s_{qi} (1 - K_\tau)^2 (\delta_i \omega_{\phi i} + \delta_y \omega_{\phi y})^2 / a_{qi} \right\}, \quad (13)$$

де $q = 6, 7, 8$ відносяться до $\langle v_{pi}'^2 \rangle$, $\langle w_{pi}'^2 \rangle$, $\langle u_{pi}'^2 \rangle$; $s_{6i} = 1$, $s_{7i} = 0$, $s_{8i} = 1$; $a_{6i} = 1764$, $a_{7i} = 0$, $a_{8i} = 392$.

Члени, що відповідають за дисипацію псевдотурбулентності мають наступний вигляд:

$$D_{qi} = U_q \sum_{i=1}^{M_C + M_{ash}} \beta_i N_{\Sigma y, i} \left\{ \frac{2(1 - K_\tau)^2 \langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle m_y^2 A_{qi}}{73.5 \delta_i (m_y + m_i)^2} - \frac{X_{qi} (1 - K_\tau) \sqrt{\langle \Omega_i'^2 \rangle \langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle} \cos \vartheta_{y, i} m_y}{21(m_y + m_i)} - W_{qi} (1 - K_\tau) \left[1 - K_n - \frac{2(1 - K_\tau)}{7} \right] m_y^2 \langle V_{py, i}'^2 \rangle / \left(5.25 \delta_i (m_y + m_i)^2 \right) \right\},$$

де $q = 1, 2$ відносяться до $\langle \omega_{ri}' w_{pi}' \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}' v_{pi}' \rangle$; $A_{1i} = 1$, $A_{2i} = -1$; $X_{1i} = 1$, $X_{2i} = -1$; $W_{1i} = 1$, $W_{2i} = -1$,

$$D_{qi} = U_q \sum_{i=1}^{M_C + M_{ash}} \beta_i N_{\Sigma y, i} \left\{ \frac{3(1 - K_\tau) \sqrt{\langle \Omega_i'^2 \rangle \langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle} \cos \vartheta_{y, i} m_y}{5.6 \delta_i (m_y + m_i)} - \frac{(1 - K_\tau)^2 m_y^2}{1.96(m_y + m_i)^2 \delta_i^2} \times \left[\frac{\langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle}{3} + \langle V_{py, i}'^2 \rangle \right] \right\},$$

де $q = 3, 4$ відносяться до $\langle \omega_{ri}'^2 \rangle$, $\langle \omega_{\phi i}'^2 \rangle$, $D_{5i} = 0$,

$$D_{qi} = U_q \sum_{i=1}^{M_C + M_{ash}} \frac{m_y^2 \beta_i N_{\Sigma y, i}}{(m_y + m_i)^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{1 - K_n}{2} - \frac{1 - K_\tau}{7} \right)^2 \right] \langle V_{py, i}'^2 \rangle / 3 - \frac{(1 - K_\tau)^2 \langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle}{196} \right\},$$

де $q = 6, 7, 8$ відносяться до $\langle v_{pi}'^2 \rangle$, $\langle w_{pi}'^2 \rangle$, $\langle u_{pi}'^2 \rangle$, (14)

$$\langle \Omega_i'^2 \rangle^{0.5} = \sqrt{\langle \omega_{\phi i}'^2 \rangle + \langle \omega_{ri}'^2 \rangle}, \quad \langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle^{0.5} = \frac{2}{\pi} (\delta_i \langle \Omega_i'^2 \rangle^{0.5} + \delta_y \langle \Omega_y'^2 \rangle^{0.5}) E_{y, i},$$

$$\cos \vartheta_{y, i} = \frac{\langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle + \delta_i^2 \langle \Omega_i'^2 \rangle - \delta_y^2 \langle \Omega_y'^2 \rangle}{2 \langle \omega_{\Sigma y, i}'^2 \rangle^{0.5} \delta_i \langle \Omega_i'^2 \rangle^{0.5}}.$$

Тут A, X, W, a, s, f – коефіцієнти; E – повний еліптичний інтеграл; K – коефіцієнт встановлення швидкості при ударі; m – маса частинки, кг; $N_{\Sigma i, i}$, $N_{\Sigma y, i}$ – сумарні частоти співударянь моно- й полідисперсних частинок, які включають співударяння за рахунок різниці осереднених аксіальних швидкостей частинок та їх хаотичного руху [2]; U – емпірична стала; $\langle V_{py, i}'^2 \rangle$ – квадрат середньої відносної швидкості частинок y та i при хаотичному русі [2]; V – вектор поступальної швидкості частинки; ϑ – кут; ω – сума векторів кутових швидкостей частинок; Ω – вектор кутової швидкості частинки. Індeksi нижні: m – середнє значення; n – нормальний; p – частинка;

$$q = 1 \div 8 : 1 - \langle \omega_{ri}' w_{pi}' \rangle, 2 - \langle \omega_{\phi i}' v_{pi}' \rangle, 3 - \langle \omega_{ri}'^2 \rangle, 4 - \langle \omega_{\phi i}'^2 \rangle, 5 - \langle u_{pi}' w_{\phi i}' \rangle, 6 - \langle v_{pi}'^2 \rangle, 7 - \langle w_{pi}'^2 \rangle, 8 - \langle u_{pi}'^2 \rangle;$$

$y = 1 \div M_C + M_{ash}$; m – тангенційний.

Крайові умови на осі потоку для рівнянь (1)–(12) й виразів (13)–(14) задаються із міркувань симетрії ($r = 0$):

$$\begin{aligned} \partial C_\chi / \partial r &= \partial u_g / \partial r = \partial k_g / \partial r = \partial \beta_i / \partial r = \partial n_j / \partial r = v_g = v_{pi} = \partial \langle t'_{pi} \omega'_{ri} \rangle / \partial r = \partial \langle t'_{pi} \omega'_{\phi i} \rangle / \partial r = 0, \\ \partial u_{pi} / \partial r &= \partial \langle v'_{pi} v'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle w'_{pi} w'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle u'_{pi} u'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle w'_{pi} v'_{pi} \rangle / \partial r = 0, \\ \partial \langle \omega'_{\phi i} \omega'_{ri} \rangle / \partial r &= \partial \langle \omega'_{ri} v'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle \omega'_{\phi i} w'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle \omega'_{ri} w'_{pi} \rangle / \partial r = 0, \\ \omega_{\phi i} &= \partial \langle \omega_{\phi i}'^2 \rangle / \partial r = \partial \langle \omega_{ri}'^2 \rangle / \partial r = \partial \langle \omega_{\phi i}' v'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle u'_{pi} \omega'_{\phi i} \rangle / \partial r = 0, \\ \partial t_g / \partial r &= \partial t_{pi} / \partial r = \partial \langle t'_{pi} v'_{pi} \rangle / \partial r = \partial \langle t'_{pi} w'_{pi} \rangle / \partial r = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

а на стінці реактору ($r = R$) – відношеннями:

$$\begin{aligned} v_{p, wi} &= u_{g, w} = k_{g, w} = (\partial \beta_i / \partial r)_w = (\partial n_j / \partial r)_w = (\partial C_\chi / \partial r)_w = (\partial t_{pi} / \partial r)_w = 0, \quad t_g = t_w, \\ (\partial \langle t'_{pi} v'_{pi} \rangle / \partial r)_w &= (\partial \langle t'_{pi} w'_{pi} \rangle / \partial r)_w = (\partial \langle t'_{pi} \omega'_{ri} \rangle / \partial r)_w = (\partial \langle t'_{pi} \omega'_{\phi i} \rangle / \partial r)_w = 0, \end{aligned}$$

$$u_{pi, w} = \frac{\delta_{iw}}{24 \sqrt{2} \beta_{iw} (1 - K_\tau)} \left(\frac{\partial u_{pi}}{\partial r} \right)_w (7K_n - 2K_\tau - 5) + \delta \omega_{\phi i, w} / 2, \quad \langle \omega_{\phi i}'^2 \rangle_w = \frac{[K_n - (2 + 5K_\tau)^2 / 49] \delta_{iw}}{12 \sqrt{2} \beta_{iw} [1 - (2 + 5K_\tau)^2 / 49]} \left(\frac{\partial \langle \omega_{\phi i}'^2 \rangle}{\partial r} \right)_w,$$

$$\langle v'_{pi} v'_{pi} \rangle_w = \frac{K_n \delta_{iw}}{12 \sqrt{2} \beta_{iw} (1 + K_n)} \left(\frac{\partial \langle v'_{pi} v'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \quad \langle w'_{pi} w'_{pi} \rangle_w = \frac{[K_n - (5 + 2K_\tau)^2 / 49] \delta_{iw}}{12 \sqrt{2} \beta_{iw} [1 - (5 + 2K_\tau)^2 / 49]} \left(\frac{\partial \langle w'_{pi} w'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w,$$

$$\begin{aligned}
\langle \omega'_{ri} w'_{pi} \rangle_w &= \frac{(2K_\tau - 7K_n + 5)\delta_{iw}}{24\sqrt{2}\beta_{iw}(K_\tau - 1)} \left(\frac{\partial \langle \omega'_{ri} w'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \quad \langle \omega'_{\phi i} \omega'_{ri} \rangle_w = \frac{(5K_\tau - 7K_n + 2)\delta_{iw}}{60\sqrt{2}\beta_{iw}(K_\tau - 1)} \left(\frac{\partial \langle \omega'_{\phi i} \omega'_{ri} \rangle}{\partial r} \right)_w, \\
\langle \omega'_{\phi i} v'_{pi} \rangle_w &= \frac{(9 + 5K_\tau)K_n \delta_{iw}}{12\sqrt{2}\beta_{iw}[7 + K_n(2 + 5K_\tau)]} \left(\frac{\partial \langle \omega'_{\phi i} v'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \quad \langle \omega'_{ri} v'_{pi} \rangle_w = \frac{K_n \delta_{iw}}{6\sqrt{2}\beta_{iw}(1 + K_n)} \left(\frac{\partial \langle \omega'_{ri} v'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \\
\langle w'_{pi} v'_{pi} \rangle_w &= \frac{K_n(6 + K_\tau)\delta_{iw}}{6\sqrt{2}\beta_{iw}[7 + K_n(5 + 2K_\tau)]} \left(\frac{\partial \langle w'_{pi} v'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \quad \omega_{\phi i, w} = \frac{(7K_n - 5K_\tau - 2)\delta_{iw}}{60\sqrt{2}\beta_{iw}(1 - K_\tau)} \left(\frac{\partial \omega_{\phi i}}{\partial r} \right)_w + \frac{2u_{pi, w}}{\delta_i}, \\
\langle u'_{pi} u'_{pi} \rangle_w &= \frac{[(5 + 2K_\tau)^2 / 49 - K_n] \delta_{iw}}{12\sqrt{2}\beta_{iw}[(5 + 2K_\tau)^2 / 49 - 1]} \left(\frac{\partial \langle u'_{pi} u'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \quad (\partial \langle \omega_{ri}^2 \rangle / \partial r)_w = 0, \\
\langle \omega'_{\phi i} w'_{pi} \rangle_w &= \frac{[(2 + 5K_\tau)(5 + 2K_\tau) - 49K_n] \delta_{iw}}{12\sqrt{2}\beta_{iw}[(2 + 5K_\tau)(5 + 2K_\tau) - 49]} \times \left(\frac{\partial \langle \omega'_{\phi i} w'_{pi} \rangle}{\partial r} \right)_w, \\
\langle u'_{pi} \omega'_{\phi i} \rangle_w &= \frac{[(2 + 5K_\tau)(5 + 2K_\tau) - 49K_n] \delta_{iw}}{12\sqrt{2}\beta_{iw}[(2 + 5K_\tau)(5 + 2K_\tau) - 49]} \times \left(\frac{\partial \langle u'_{pi} \omega'_{\phi i} \rangle}{\partial r} \right)_w, \quad (16)
\end{aligned}$$

де нижній індекс w відноситься до стінки каналу. Повна система рівнянь (1)–(12), з врахуванням виразів (13)–(14) й крайових умов (15)–(16), містить рівняння трьох типів. Параболічні й гіперболічні рівняння інтегрувалися маршовим методом у напрямку вздовж осі каналу. При цьому при розв'язанні рівнянь другого порядку використовувався неявний метод із прямою й зворотною прогонкою на нерівномірній сітці, що згущується біля стінки каналу, та із лінеаризацією нелінійних членів за методом ітерацій. Рівняння першого порядку розв'язувалися явним маршовим методом без застосування ітерацій. Рівняння нерозривності несучого середовища апроксимувалося за неявною чотириточковою схемою. Відповідно до описаного алгоритму розроблено програму для числового розрахунку.

ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВИХ РОЗРАХУНКІВ. Розглянемо результати розрахунків горіння полідисперсного ансамблю коксозольних часток антрацитового штибу в осесиметричному каналі при наступних вхідних даних:

$$Z_{O_2,0} = 0.12; R = 0.1 \text{ м}; \delta_{CO_1} = 0.3 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \delta_{CO_2} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\begin{aligned}
\delta_{CO_3} = 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \delta_{ash1} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \delta_{ash2} = 0.35 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \delta_{ash3} = 0.26 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \beta_{CO_1} = \beta_{CO_2} = \beta_{CO_3} = 0.0001, \beta_{ash1} = \beta_{ash2} = \\
\beta_{ash3} = 0.0002, B_{g0} = 359 \text{ кг/год}, \rho_C = 1000 \text{ кг/м}^3, \rho_{ash} = 1800 \text{ кг/м}^3, t_{pi0} = t_{g0} = 900 \text{ }^\circ\text{C}, t_w = 800 \text{ }^\circ\text{C}, u_{g,m0} = 10 \text{ м/с}.
\end{aligned}$$

На Рис. 1 показано профілі радіальних швидкостей полідисперсного ансамблю коксозольних частинок. Очевидно, що в значній частині поперечного перерізу реактора (за винятком зони поблизу стінки) $v_{pi} < 0$, внаслідок чого на осі потоку маємо максимум функції $\beta_i(r)$, а в периферійній зоні мінімум (Рис. 2). Таке поведіння кривої $\beta_i(r)$ приводить до того, що сила аеродинамічного опору в зоні біля осі $F_{aiz} \sim \beta_i(u_g - u_{pi})$ (див. (13)) стає більшою, ніж у периферійній. Тому швидкість газу біля осі зменшується, а в області поблизу стінки – зростає (Рис. 3, крива 1). З Рис.3 випливає, що криві 1, 2 й 3 подібні, а залежності 1 й 7 відрізняються одна від одної. Це пов'язано з тим, що дрібні коксові частинки, на відміну від великих інерційних золових частинок, добре втягуються у пульсаційний рух несучого середовища.

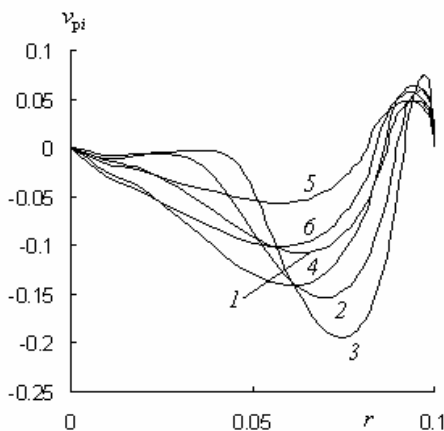


Рис. 1. Розподіл осереднених радіальних швидкостей частинок коксу діаметром δ_{CO} :
1 – $0.3 \cdot 10^{-3}$ м, 2 – $0.2 \cdot 10^{-3}$ м, 3 – $0.15 \cdot 10^{-3}$ м і золи δ_{ash} :
4 – $0.2 \cdot 10^{-3}$ м, 5 – $0.35 \cdot 10^{-3}$ м, 6 – $0.26 \cdot 10^{-3}$ м
при поперечному перерізі реактора на мітці $z = 6$ м

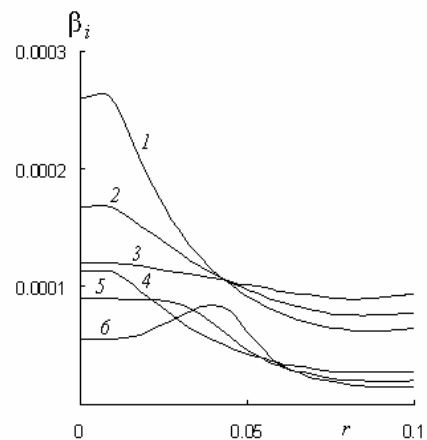


Рис. 2. Розподіл об'ємних концентрацій частинок при поперечному перерізі реактора на мітці $z = 6$ м:
1 – β_{ash1} , 2 – β_{ash3} , 3 – β_{ash2} , 4 – β_{CO1} , 5 – β_{CO2} , 6 – β_{CO3}

На Рис. 4 показані розподіли складових пульсаційної енергії поступального руху дисперсної фази й турбулентної енергії несучого середовища. Очевидно, що енергія хаотичного руху частинок $0.5(\langle v_{pi}'^2 \rangle + \langle w_{pi}'^2 \rangle + \langle u_{pi}'^2 \rangle)$ істотно перевищує величину k_g . Це свідчить про переважаючий внесок псевдо-турбулентного механізму переносу у механіку руху полідисперсних висококонцентрованих потоків.

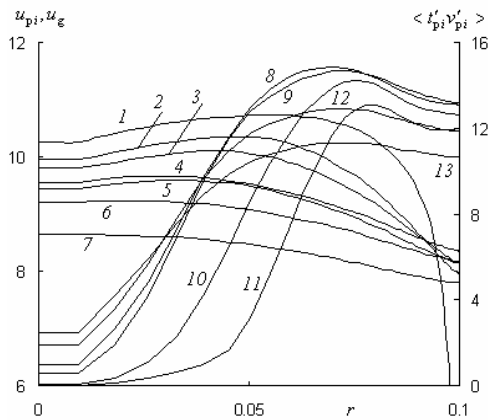


Рис. 3. Розподіл осереднених аксіальних швидкостей фаз і других моментів пульсації температури і радіальної швидкості частинок при поперечному перерізі реактора на мітці $z = 6$ м :
 1 – u_g ; 2 – u_{C3} , 3 – u_{C2} , 4 – u_{ash1} , 5 – u_{C1} , 6 – u_{ash3} ,
 7 – u_{ash2} , 8 – $\langle t'_{C1}v'_{C1} \rangle$, 9 – $\langle t'_{ash1}v'_{ash1} \rangle$,
 10 – $\langle t'_{C2}v'_{C2} \rangle$, 11 – $\langle t'_{C3}v'_{C3} \rangle$, 12 – $\langle t'_{ash3}v'_{ash3} \rangle$,
 13 – $\langle t'_{ash2}v'_{ash2} \rangle$

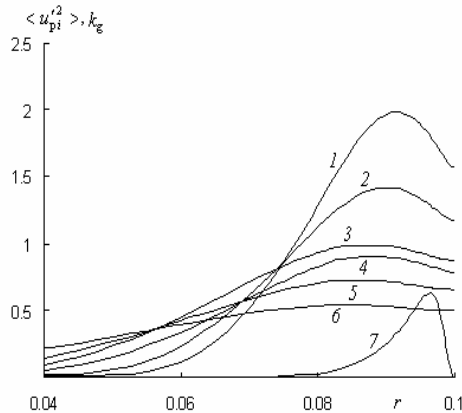


Рис. 4. Розподіл аксіальної складової пульсаційної енергії частинок коксу діаметром δ_{CO} : 1 – $0.15 \cdot 10^{-3}$ м, 2 – $0.2 \cdot 10^{-3}$ м, 4 – $0.3 \cdot 10^{-3}$ м, золи δ_{ash} : 3 – $0.2 \cdot 10^{-3}$ м, 5 – $0.26 \cdot 10^{-3}$ м, 6 – $0.35 \cdot 10^{-3}$ м і турбулентної енергії газу 7 – K_g при поперечному перерізі реактора на мітці $z = 6$ м

ВИСНОВКИ. Запропонована модель дозволяє коректно визначити аеродинамічні й фізико-хімічні характеристики коксозольного висхідного полідисперсного потоку частинок. Це дає підставу використовувати її при розробці хімічних реакторів на стадіях технічного та робочого проектування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Кондратьев Л. В., Шор В. В. Исследование турбулентного течения газозвеси в трубе с учетом соударений со стенкой и вращения частиц // Изв.АН СССР. – МЖГ. – 1990. – № 1. С. 56–64. 2. Рохман Б. Б., Шрайбер А. А. Математическое моделирование аэродинамики и физико-химических процессов в надслоевом пространстве топки с циркулирующим кипящим слоем // Инженерно-физический журнал. – 1994. – 66. – № 2. – С. 159–167. 3. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газозвеси.- К.: Наукова думка. – 1987. – 268с. 4. Zaichik L. I., Pershukov V. A., Kozelev M. V., Vinberg A. A. Modeling of Dynamics, Heat Transfer, and Combustion in Two-Phase Turbulent Flows. Isothermal Flow // Experimental Thermal and Fluid Science. – 1997. – 15. – P.291–310. 5. Zaichik L. I., Pershukov V. A., Kozelev M. V., Vinberg A. A. Modeling of Dynamics, Heat Transfer, and Combustion in Two-Phase Turbulent Flows. Flows with heat transfer and combustion // Experimental Thermal and Fluid Science. – 1997. – 15. – P. 311–322.

Надійшла до редколегії 01.11.12

Б. Рохман, д-р. техн. наук., В. Калион, канд. физ.-мат.наук., А. Худашов, студ.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ В ВОСХОДЯЩЕМ ПОЛИДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ МЕЖДУ СОБОЙ

Построена замкнутая система уравнений, описывающих движение и физико-химические процессы в восходящем полидисперсном потоке с учетом вращения дисперсной фазы, сил аэродинамического сопротивления, веса и силы Магнуса, взаимодействия частиц между собой и со стенками реактора. Замыкание уравнений движения и теплопереноса твердой фазы осуществляется на уровне уравнений для вторых моментов пульсаций. Пульсационные характеристики несущей среды вычисляются из уравнения для турбулентной энергии газа. Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов.

B. Rokhman, Full Doctor (eng), V. Kalion, PhD, A. Khudashchov, BA

MODELLING OF MASS, IMPULSE AND ENERGY TRANSFER IN ASCENDING POLYDISPERSE STREAM ACCOUNTING ROTATION OF THE DISPERSE PHASE AND PARTICLE INTERACTION

The closed system of the equations, describing motion and physical and chemical processes in ascending polydisperse stream is constructed accounting rotation of the disperse phase, aerodynamic resistance and Magnus forces, gravity, particle-particle interactions and particles interactions with the wall of a reactor. Closing of the solid phase motion and heat transfer equations is derived at a level of the equations for the second moments of fluctuations. Fluctuation characteristics of carrying environment are calculated from the equation for turbulent gas energy. The results compare with results other authors.

УДК 534 +531.7+53.082.5

Л. Яровой, канд. техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: yarovoi@univ.kiev.ua

ВИМІРЮВАННЯ НАНОАМПЛІТУДНИХ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЛАЗЕРНИМ ДОППЛЕРІВСЬКИМ ВІБРОМЕТРОМ З МОДУЛЯЦІЄЮ ЗОНДУВАЛЬНОЇ ХВИЛІ

Пропонується підвищити чутливість лазерних віброметрів для вимірювання механічних коливань з малими амплітудами шляхом застосування додаткової високочастотної фазової модуляції в одному з оптичних каналів віброметра з трихвильовим фотозмішуванням. Результатом є додаткове підсилення вихідного сигналу віброметра, котре пропорційне частоті та індексу модуляції. Показано, що в наближенні малих амплітуд вихідний сигнал віброметра пропорційний миттєвому переміщенню коливання. Обґрунтовано параметри оптимального режиму вимірювання коливань з надмалими амплітудами. В експерименті підтверджено збільшення чутливості, продемонстровано підвищення відношення сигнал/шум.

ВСТУП. Лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) – це один з сучасних засобів експериментальної механіки. За допомогою ЛДВ розв'язують задачі неруйнівного контролю [7], розподілу напружень [5], вібродіагностики, у тому числі і в об'єктах, які обертаються [8], досліджують акустичні та інші механічні хвильові процеси [4], тощо. Саме для таких завдань можуть бути застосовані ЛДВ з додатковим оптичним каналом – ЛДВ з трихвильовим фотозмішуванням (ТХФ) [6, 9]. Використання ТХФ призводить до аномального збільшення вихідного сигналу ЛДВ без застосування додаткових електронних підсилювачів, створюючи можливість для підвищення чутливості [3]. Так, застосування ТХФ в ЛДВ з довгими світловодними трактами дозволяє критично зменшувати вплив оточуючого середовища на зондувальну хвилю в світловоді, і, таким чином, позбуватися завад, притаманних ЛДВ з світловодами [1].

Але недоліком такого типу лазерного віброметра є те, що чутливість до механічних коливань з малою амплітудою буде тим вищою, чим краще відбувається компенсація зондувального променя протифазною додатковою хвилею. При цьому, зрозуміло, критично зменшується загальний рівень корисного оптичного сигналу, що врешті-решт призводить до зриву роботи електронного процесора ЛДВ [2].

Нами запропоновано підхід, який дозволяє оминати цю вразливу особливість та отримати аномальне підсилення сигналу поза зоною мінімуму оптичного сигналу на фотодетекторі ЛДВ.

АНАЛІЗ СИГНАЛІВ ЛАЗЕРНОГО ВІБРОМЕТРА З ВЧ МОДУЛЯЦІЄЮ В ЗОНДУВАЛЬНОМУ КАНАЛІ. Розглянемо гетеродинний спосіб детектування когерентних сигналів, котрий використовується у лазерних доплерівських віброметрах, анемометрах та інших інтерференційних приладах, що досліджують механічні процеси. При гетеродинному прийомі одна з двох хвиль (нехай це буде опорна хвиля), що інтерферують на поверхні фотодетектора, має зсув на частоту гетеродину f_G . При трихвильовому фотозмішуванні, коли на поверхні фотодетектору інтерферують три когерентні хвилі, **миттєва частота** складової фотоструму i_{detG} на частоті гетеродину в загальному випадку має вигляд [5]:

$$\omega(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (\Phi_1(t)) + (\Phi_2(t)) \right] + \frac{\frac{1}{2} (\eta^2 - 1) \cdot \left[\frac{d}{dt} (\Phi_1(t)) - (\Phi_2(t)) \right]}{2 \eta \cdot \cos((\Phi_1(t)) - (\Phi_2(t))) + \eta^2 + 1}, \quad (1)$$

де Φ_1, Φ_2 – фази зондувальної та третьої хвиль.

Слід звернути увагу на те, що у цьому співвідношенні відсутні параметри першої хвилі, яка виконує роль гетеродина і лише зміщує спектр сигналу на частоту f_G .

Як правило, фаза Φ_1 зондувальної хвилі визначається параметрами коливання досліджуваної поверхні. Наприклад, для гармонічного коливання $x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t)$ фаза $\Phi_1 = 2kX_1 \cos(\Omega t) + \phi_1$, де k – хвильовий вектор зондувального випромінювання, X_1 – амплітуда, Ω – частота досліджуваних коливань, ϕ_1 – початкова фаза зондувальної хвилі. Найбільш досліджена конфігурація ЛДВ з ТХФ така, коли фаза третьої хвилі є сталою величиною $\Phi_2 = \phi_2$, де ϕ_2 – початкова фаза у третьому каналі [5, 7]. Для цих умов миттєва частота (1) записується, як:

$$\omega(t) = -kX_1\Omega \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2 \eta \cdot \cos(2k \cdot X_1 \cdot \cos(\Omega t) + \Delta\phi) + \eta^2 + 1} \right] \sin(\Omega t), \quad (2)$$

де $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, $\eta = \frac{E_1}{E_2}$, а E_1, E_2 – амплітуди зондувальної та додаткової третьої хвилі.

У загальному випадку вихідний сигнал ЛДВ є також періодичним, але його форму деформують нелінійні спотворення. Для певних співвідношень між параметрами процесу, а саме для амплітуд коливань таких, що $X_1 < 0.2 \cdot \frac{\eta - 1}{k}$, нелінійні спотворення практично зникають [2]. Поблизу точки $\Delta\phi = \pi$ амплітуда коливань на виході ЛДВ стрімко зростає при тих же параметрах підсилення доплерівського процесору. В точці $\Delta\phi = \pi$ величина вихідного сигналу сягає своєї максимальної величини [2] $\omega_M = kX_1\Omega \cdot \left[1 + \frac{(\eta + 1)}{(\eta - 1)} \right]$.

Варто зауважити, що, хоча вихідний сигнал ЛДВ є напругою, він фактично відображає зміну миттєвої частоти. У "класичному" двопроменевому віброметрі миттєва частота на виході процесора дорівнює доплерівській частоті, яка

пов'язана з миттєвою швидкістю $v(t)$ співвідношенням $\omega(t) = \omega_{dop}(t) = 2kv(t)$. У вібротрі з ТХФ, як свідчать формули (1), (2), це не так. Тому природно розглядати миттєву частоту, як вихідний сигнал ЛДВ, оскільки напруга на виході доплерівського процесора пропорційна саме миттєвій частоті. При періодичному процесі амплітуда вихідного сигналу буде пропорційна девіації миттєвої частоти. Щоб не вводити незвичне словосполучення "девіація вихідного сигналу", ми будемо надалі використовувати термін "амплітуда вихідного сигналу ЛДВ" у розумінні максимального відхилення миттєвої частоти.

На рис.1А зображено залежність (2) для умов, коли $\Delta\phi = \pi$ (неперервна лінія), та $\Delta\phi = 2.89$ радіан. На рис.1Б представлено розрахунок амплітуди I_G складової фотоструму на частоті гетеродина $I_G = \propto E_0 E_2 \sqrt{2\eta \cdot \cos(2k \cdot X_1 \cdot \cos(\Omega t) - \Delta\phi) + \eta^2 + 1}$. Ця величина впливає на стабільність роботи доплерівського процесора, тому її критичне зменшення при досягненні найкращих умов для підсилення сигналу при $\Delta\phi = \pi$ (рис. 1Б) може зашкодити роботі вимірювача. Тому не слід встановлювати початкову фазову різницю рівною $\Delta\phi = \pi$, хоча це і зменшую чутливість системи.

Щоб компенсувати втрату чутливості можна підняти підсилення за допомогою параметра η . Але це матиме наслідком знов таки зменшення амплітуди сигналу гетеродина I_G , що може призвести до зривів в роботі доплерівського процесору. Зауважимо також, що при наближенні η до одиниці разом з підсиленням зростають і нелінійні спотворення вихідного сигналу.

Для того, щоб вирішити цю проблему, розглянемо залежність амплітуди $\omega_M(\Delta\phi)$ вихідного сигналу ЛДВ від фазової різниці в каналах 1 та 2. При умові $X_1 < 0.2 \cdot \frac{\eta-1}{k}$, коли сигнал на виході процесорі ЛДВ залишається підсиленим, але неспотвореним, з формули (2) витікає співвідношення для амплітуди вихідного сигналу ЛДВ з ТХФ [6]:

$$\omega_M(\Delta\phi) = -2kX_1\Omega\eta \cdot \left(\frac{\eta + \cos(\Delta\phi)}{1 + 2\eta \cdot \cos(\Delta\phi) + \eta^2} \right). \quad (3)$$

На рис. 2А зображено залежність (3) для $\eta = 1.3$, $\Omega = 2\pi \cdot 120 \text{ Hz}$ та двох амплітуд коливань $X_1 = 3.15 \text{ nm}$ ($X_1 < 0.2 \cdot \frac{\eta-1}{k} \approx 6.0 \text{ nm}$, для сигналу зберігається лінійний режим підсилення) та $X_1 = 6.3 \text{ nm}$. Криву для $X_1 = 15.75 \text{ nm}$, що знаходиться за межами лінійного режиму, отримано шляхом аналізу співвідношення (2).

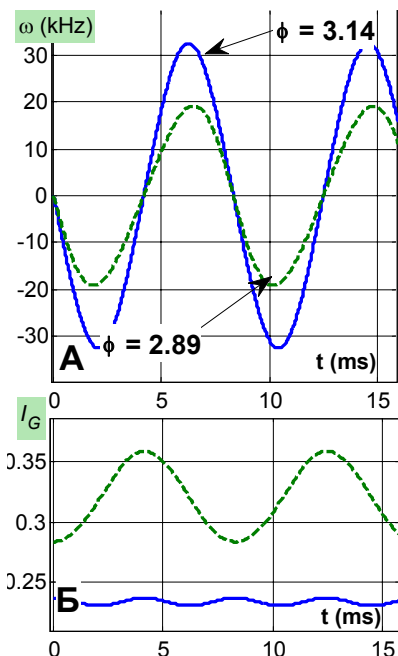


Рис. 1. Розрахунок вихідних сигналів ЛДВ з ТХФ: А – сигнали миттєвої швидкості; Б – амплітуда складової фотоструму на частоті гетеродина

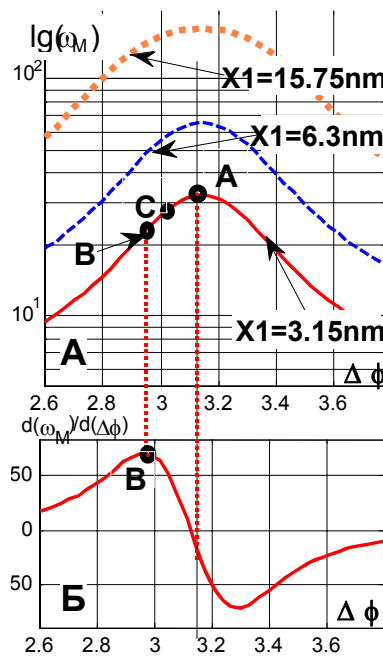


Рис. 2: А – залежність аномального підсилення як функція фазової різниці; Б – похідна аномального підсилення від фази $\Delta\phi$

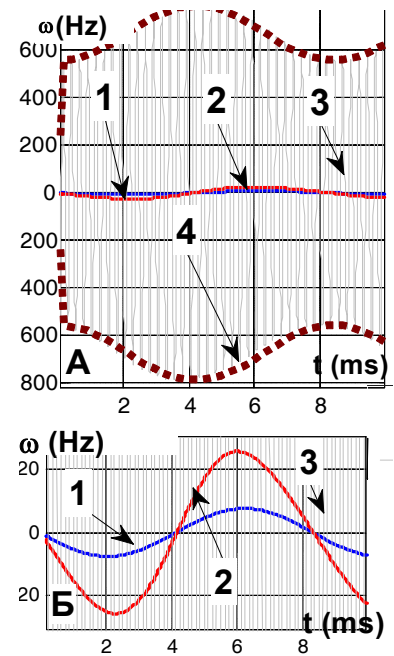


Рис. 3. Розрахунок: А – вихідні сигнали ЛДВ з ТХФ та ВЧ модуляцією; Б – збільшена область поблизу вісі абсцис

На рис. 2Б, зображено похідну від функції $\omega_M(\Delta\phi)$, яка в точці В досягає свого максимуму. У цій точці система найбільш чутлива до зміни фази вхідного сигналу, похідна $\frac{d(\omega_M(\Delta\phi))}{d(\Delta\phi)}$ в її околі сягає величини 80 Гц/рад. У той же

час, при відхиленні фази від точки А ($\Delta\phi = \pi$) до точки В ($\Delta\phi = 2.95$) амплітуда вихідного сигналу втрачає лише 1.4 від максимально можливої величини.

Таким чином, якщо, в точці В амплітуда сигналу (максимальне відхилення миттєвої частоти) приблизно 23 Гц, то в точці С, що відстоїть від В приблизно на 0.1 рад, амплітуда сигналу вже буде складати 27 Гц. Приріст 4 Гц – це небагато, але слід звернути увагу, що амплітуда вихідного сигналу ЛДВ лінійно залежить від частоти Ω (3). Хоча, частотою досліджуваного механічного коливального процесу ми керувати не можемо, але можна ввести додаткову високочастотну фазову модуляцію, що дозволить опосередковано керувати підсиленням сигналу.

Покажемо, як за допомогою ВЧ модуляції можна впливати на рівень вихідного сигналу. Для цього розрахуємо вихідний сигнал у випадку, коли в одному з каналів, що інтерферують (нехай це буде зондувальний канал), існує додаткова ВЧ модуляція: $\phi_m(t) = m \cdot \cos(\Omega_m t)$, де m – індекс, Ω_m – частота ВЧ модуляції. У цьому випадку фаза зондувальної хвилі $\Phi_1 = 2kX_1 \cos(\Omega t) + \phi_m(t) + \phi_1$, а вихідний сигнал віброметра набуває вигляду

$$\omega'(t) = - \left(kX_1 \Omega \sin(\Omega t) + \frac{m}{2} \Omega_m \sin(\Omega_m t) \right) - \frac{(\eta^2 - 1) \cdot \left(kX_1 \Omega \sin(\Omega t) - \frac{m}{2} \Omega_m \sin(\Omega_m t) \right)}{2\eta \cdot \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) - m \sin(\Omega_m t) - \Delta\phi) + \eta^2 + 1}. \quad (4)$$

Для симуляції вихідного сигналу виберемо ті ж параметри досліджуваного процесу, як і в попередньому випадку: $\eta = 1.3$, $X_1 = 3.15 \text{ nm}$, $\Omega = 2\pi \cdot 120 \text{ Hz}$. Задамо також початкову фазову різницю $\Delta\phi - \pi = 0.19$ (точка В на діаграмі рис. 2А). Для високочастотної модуляції виберемо $m = 0.1$ та $\Omega_m = 2\pi \cdot 4k \text{ Hz}$.

На рис. 3 зображено епюри вихідних сигналів віброметра для таких випадків: 1 – сигнал вібрації без ТХФ (класичний двоканальний віброметр); 2 – сигнал вібрації при наявності аномального підсилення в режимі ТХФ; еюра 3 – це вихідний сигнал віброметра з ТХФ при наявності додаткової високочастотної модуляції; 4 – обвідна сигналу високочастотної модуляції, що і є шуканий вихідний сигнал в досліджуваному випадку.

З цих результатів бачимо, що максимальна величина продетектованого сигналу ЛДВ на виході частотного дискримінатора (епюра 4) складає 112 Hz, що в чотири з половиною рази перевищує "амплітуду" вихідного сигналу без модуляції (23 Hz) і майже в 15 разів перевищує вихідний сигнал віброметра без ТХФ. Таким чином, завдяки додатковій модуляції досягається підсилення в 23.5 дБ, що на 10 дБ більше ніж в ЛДВ з ТХФ без модуляції, але за умови $\Delta\phi = \pi$. Слід зауважити, що таке підсилення досягається лише за рахунок особливої конфігурації системи віброметра, без застосування додаткових ланцюгів електронного підсилення. Це означає, що і рівень електронних завод в новій схемі буде залишатися таким же, як і в класичному ЛДВ, і, таким чином, чутливість до коливань з малою амплітудою буде покращуватися. Зазначимо, що при цьому амплітуда складової фотоструму на частоті гетеродина не досягає критично малої величини.

Аналітичне дослідження сигналу ЛДВ з ТХФ і модуляцією (скорочено ТХФМ) у загальному випадку – формула (4) – громіздка задача. Але, якщо аномальне підсилення віброметра знаходиться в межах лінійного режиму підсилення $m < 0.4(\eta - 1)$, а частота ВЧ модуляції набагато вища, ніж можлива частота коливання об'єкту, то замість формули (4) можна застосовувати формулу (3). У цьому випадку фазова різниця $\Delta\phi$, яка відповідає розташуванню на контурі підсилення початкової фази (дивись рис. 2Б) є фазою оптичного сигналу зондувального каналу $\Phi_1(t)$, яка змінюється повільно і пов'язана з миттєвим зміщенням досліджуваного об'єкту $\Phi_1 = 2kx(t) + \phi_1$:

$$\omega_M = -m\Omega_m \eta \cdot \left(\frac{\eta + \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + \phi_1)}{1 + 2\eta \cdot \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + \phi_1) + \eta^2} \right). \quad (5)$$

На перший погляд співвідношення (5) майже співпадає з (3), але суттєвою відмінністю є те, що множники перед дужками відносяться не до параметрів коливання, а до параметрів модуляції.

У припущенні малих фаз під знаком косинуса формулу (5) можна спростити. Для цього розкладемо в ряд функцію $\omega_M(\Delta\phi)$ за $\Delta\phi$ в точці В (див. рис. 2) та обмежимося першим лінійним членом. Тоді (5) запишеться, як:

$$\omega_M = -\frac{m}{2} \Omega_m \left[\frac{\eta + \cos(\Delta\phi_B)}{1 + 2\eta \cos(\Delta\phi_B) + \eta^2} + \frac{2\eta(\eta^2 - 1)}{(1 + 2\eta \cos(\Delta\phi_B) + \eta^2)} (2kX_1 \cos(\Omega t) + \phi_1) \right]. \quad (6)$$

Аналізуючи формулу (6) бачимо, що величина вихідного сигналу прямо пропорційна частоті Ω_m ВЧ модуляції, тобто сигнал також можна підсилити за рахунок підвищення частоти модуляції. Теж саме стосується індексу модуляції. Зауважимо, що сукупний індекс модульованого коливання залишався в межах $m + 2kX_1 < \Delta\phi(A) - \Delta\phi(B)$. Співвідношення (6) також свідчить, що вихідний сигнал ТХФМ є пропорційним миттєвому зміщенню $x(t)$ коливального процесу $x(t) = X_1 \cos(\Omega t)$, а не його миттєвій швидкості $v(t) = -X_1 \Omega \sin(\Omega t)$, як це притаманно класичним ЛДВ. Це пояснюється тим, що саме миттєва фаза коливального процесу $\phi(t) = 2kx(t)$ спричиняє рух робочої точки по контуру підсилення $\omega_M(\Delta\phi)$ (рис.2А) і впливає таким чином на підсилення амплітуди ВЧ модулюючого сигналу. Епюри на рис.3 підтверджують, що обвідна 4 (продетектований сигнал) ВЧ модуляції і сигнал миттєвої швидкості (як в звичайному віброметрі так і в віброметрі з ТХФ) зміщені один відносно одного на чверть періоду (рис. 3).

Важливо зауважити, що в багатьох задачах експериментальної механіки, наприклад, при визначенні деформацій [5, 7], є необхідним саме переміщення об'єкту. Тому вихідний сигнал ЛДВ, що є еквівалентним, як відомо,

миттєвій швидкості, інтегрують апаратними або програмними засобами, що вносить додаткову похибку. Таким чином, високоточний лазерний віброметр, що вимірює безпосередньо миттєве переміщення, буде ефективним вимірювальним засобом.

Зазначимо також на симетричний вплив другої та третьої хвиль на роботу ЛДВ з ТХФ. Звідси випливає, що результат аналогічний отриманому можна отримати при ВЧ модуляції в третьому, а не в другому каналі.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ. Для перевірки отриманих результатів було змонтовано експериментальну систему, схема якої зображена на рис. 4. Основа системи – класичний двопроменевий лазерний віброметр CLV-S. Перша – опорна хвиля циркулює всередині лазерної головки віброметра **1**, а друга (зондувальна) виходить назовні. Третій промінь сформовано за рахунок відхилення частини зондувального променя в додатковому інтерферометрі **2**. Зондувальний промінь (друга оптична хвиля) спрямовується на досліджуваний об'єкт **3**, відбиваючись на шляху до нього від дзеркальної поверхні модулятора **4**, котра вібрує з високою частотою, і забезпечує, таким чином, високочастотну модуляцію фази $\phi_m(t) = m \cdot \cos(\Omega_m t)$. Поверхня модулятора **4** розташована майже нормально до зондувального променя, щоб звести нанівець його можливий рух в поперечному напрямі. Вздовж зондувального променя розміщено керований рідкокристалічний фільтр нейтральної щільності **5**, за допомогою якого регулюють величину η . Систему фотодетекторів **8**, диференційного підсилювача **9** зі зворотнім зв'язком та фільтра **5** призначено для автоматичного підтримання заданої величини параметра η . Третій промінь спрямовано на відбиваючу поверхню **6**. Тонку скляну пластину **7**, встановлено з можливістю її обертання в проміні на заданий кут, що дозволяє регулювати початкову фазову різницю $\Delta\phi$. Для тонкої зміни фази, приблизно в межах 0.3 радіан, застосовано змінну напругу від блоку живлення **12**. Генератори **10** та **11** подають сигнали на об'єкт, що вібрує, та модулятор фази **4**. Сигнали віброметра досліджуються на цифровому осцилоскопі RIGOL 1102E **13**. Детектування сигналу (для визначення обвідної) здійснювалось програмними засобами на комп'ютері **14**.

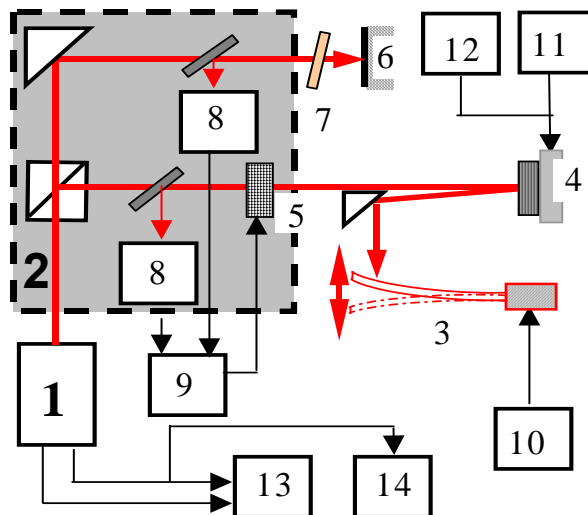


Рис. 4. Оптична схема експериментальної установки модифікованого віброметра з ТХВ

На рис. 5 зображено сигнали осцилоскопу **13** на виході віброметра **1** для випадку коливального процесу з такими параметрами: $X_1 = 16 \text{ nm}$, $\Omega = 2\pi \cdot 350 \text{ Hz}$, $\Omega_m = 2\pi \cdot 3.9 \text{ kHz}$, $m = 0.3$. Верхня еюра відображає високочастотну складову сигналу гетеродину, тобто інтенсивність сигналу, котрий поступає з фотоприймача для обробки електронним процесором. Цей сигнал відфільтрований від складової на частоті модуляції Ω_m . Як можна бачити з цієї еюри, робота віброметра проходить на схилі кривої аномального підсилення $\omega_M(\Delta\phi)$, не заходячи за точку максимального підсилення **A** (рис. 2А).

Нижня еюра на рис.5 описує пропорційний миттєвій швидкості сигнал, який містить досліджуваний коливальний процес та додаткову ВЧ модуляцію. Відповідно до розвиненого вище підходу, шуканий підсилений сигнал – це обвідна ВЧ сигналу віброметра. Детектування піковим детектором вихідного сигналу ЛДВ виконується програмними засобами. Результат наведено на еюрі рис. 6А; амплітуда вихідного сигналу складає 65 mV.

На рис. 6Б, з метою порівняння, подано еюру вихідного сигналу віброметра без додаткового каналу, тобто сигнал класичного ЛДВ, який отримано при тих же самих параметрах коливального процесу. Його амплітуда складає лише 7 mV. Таким чином, без додаткових елементів електронного підсилювання досягнуто приріст вихідного сигналу майже в 18 дБ.

Необхідно зазначити, що сигнал прототипу на рис. 6Б має більш високий рівень шумів, ніж сигнал обвідної в ЛДВ з ТХФМ (рис.6А). Ця різниця ще краще стає помітною при зменшенні амплітуди коливальних. Дві еюри, котрі наведено на рис.7, відповідають коливанням з амплітудою $X_1 = 4.5 \text{ nm}$. Верхня еюра – це сигнал ЛДВ з ТХФМ, а нижня еюра показує сигнал класичного двопроменевого ЛДВ. Додаткове підсилення в цьому експерименті склало близько 20 дБ, але більш важливим є те, що вихідний сигнал ЛДВ з ТХФМ має значно нижчий рівень шумів. Якщо в сигналі двопроменевого віброметра відношення сигнал/шум становить приблизно 3, то у віброметрі з модуляцією відношення сигнал/шум $\gg 1$. Це дає можливість точного вимірювання коливальних з субнанометровими амплітудами.

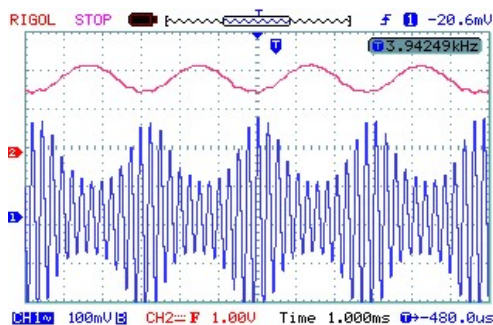


Рис. 5 Осцилограми сигналів ЛДВ з ТХФМ: зверху – амплітуда складової фотоструму на частоті гетеродина; знизу – сигнал миттєвої швидкості

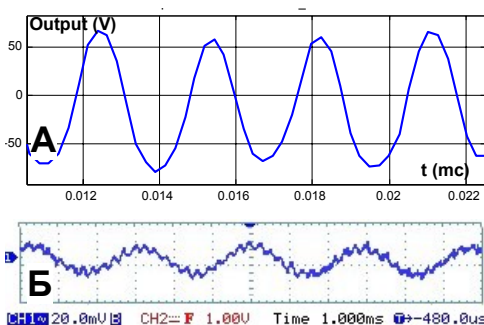


Рис. 6: А – обвідна ВЧ сигналу ЛДВ з ТХФМ (рис.5), $X_1 = 16 \text{ nm}$; Б – осцилограма сигналу миттєвої швидкості у двопробеному віброметрі

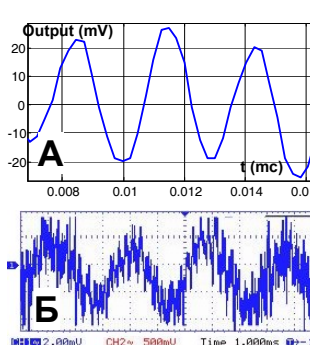


Рис. 7. А – обвідна ВЧ сигналу в ЛДВ з ТХФМ, $X_1 = 4.5 \text{ nm}$; Б – класичний ЛДВ, сигнал миттєвої швидкості

ВИСНОВКИ. Проведена робота дозволяє зробити наступні висновки. По-перше, для забезпечення стабільності роботи доплерівського процесору в віброметрі з ТХФ слід вибирати початкову фазу відмінною від $\Delta\phi = \pi$, найкраще – в максимумі похідної

$$\frac{d(\omega_M(\delta\phi))}{d(\delta\phi)}$$
. По-друге, високочастотна фазова модуляція в одному з каналів призводить

до додаткового підсилення вихідного сигналу віброметра, яке пропорційне частоті та індексу модуляції. Вихідний сигнал віброметра в цьому випадку розуміється, як обвідна ВЧ модуляції на виході приладу. Третє, вихідний сигнал лазерного віброметра з ТХФ та високочастотною фазовою модуляцією є пропорційним миттєвому переміщенню, а не миттєвій швидкості, як це має місце у класичних лазерних віброметрах. Четверте, експеримент підтвердив наявність підсилення сигналу до 20 дБ і поліпшення відношення сигнал/шум до 10 дБ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Іващенко Д.О., Яровой Л.К., Розумнюк В.І. Світловодний сенсор механічних коливань з підвищеною чутливістю в нанометровому діапазоні // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – Випуск 4. – С. 43–51.
2. Яровой Л. К. Особливості роботи лазерного доплерівського віброметра з трихвильовим фотозмішуванням в нанометровому діапазоні // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. – 2011– Випуск. 26. – С. 39–43.
3. Пат. 94564 Україна МПК G 01 B 9/02 Спосіб вимірювання миттєвої віброшвидкості / Яровой Л. К.; заявник власник патенту Київ Нац. Унів. ім. Тараса Шевченка. – №201013706 заяв. 18.11.10; друк. 10.05.2011, Бюл. № 9.
4. Jianhua Shang, Yan He, Dan Liu. Huaguo Zang and Weibiao Chen. Laser Doppler Vibrometer for real-time speech-signal acquirement // Chinese Optics Letters. – 2009. – V.7. – No.8// – P. 732–733.
5. Olijnyk A., Robur I. Yarovoi L. Determination of Stress-deformation state of Vibrating Construction by Fiber Laser Doppler Anemometer. Proc. of Third International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques// – 1998. – V.3411. – P. 404–408.
6. Ombeline de La Rochefoucauld, Shyam M., Khana S., Olson E. Recording depth and signal competition in heterodyne interferometry // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – V. 117, № 3. – P. 1267–1284.
7. Pai P.F., Jin S. Locating structural damage by detecting boundary effects // Journal of Sound and Vibration. – 2000 – V. 231, N4. – P. 1079–1110.
8. Vekteris V., Cereska A. Nondestructive vibrodiagnostic of rotors systems with lasers// Proc. SPIE IV Intern. Conf. on Vibration Measurements by Laser Techniques. – 2006. – V.46345. – P. 63450I-1 – 63450I-6.
9. Yarovoi L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – V. 15. – P. 2150–2156.

Надійшла до редколегії 07.02.13

Л. Яровой, канд. техн. наук

ИЗМЕРЕНИЯ НАНОАМПЛИТУДНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЛАЗЕРНЫМ ДОПЛЕРОВСКИМ ВИБРОМЕТРОМ С МОДУЛЯЦИЕЙ ЗОНДИРУЮЩЕЙ ВОЛНЫ

Предлагается повысить чувствительность лазерных виброметров для измерения механических колебаний с малыми амплитудами путем использования дополнительной частотной фазовой модуляции в одном из оптических каналов виброметра с трехволновым фотосмещением. Результатом является дополнительное усиление выходного сигнала виброметра, которое пропорционально частоте и индексу модуляции. Показано, что, в приближении малых амплитуд, выходной сигнал виброметра пропорционален мгновенному перемещению колебания. Обоснованы параметры оптимального режима измерения колебаний с сверхмалыми амплитудами. В эксперименте подтверждено усиление чувствительности, продемонстрировано повышение отношения сигнал/шум

L. Yarovoi, Phd (eng)

THE MEASUREMENT OF THE NANOSCALE VIBRATION BY THE LASER DOPPLER VIBROMETER WITH THE MODULATED PROBING CHANNEL

We studied work of the LDV with additional optical channel and HF phase modulation in the probing channel for the situation when phase difference between probing and third waves is close, but is not equal π . For such layout the detected output LDV signal is proportional to instantaneous displacement, instead of instantaneous velocity as in classical two channels LDV.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/visnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

Загальні вимоги

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

– текст має бути поданий у вигляді файлу формату **MS WORD for Windows (*.doc)** без застосування **стильової розмітки**;

– поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.

– комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:

- шрифт статті – Arial, розмір 9;
- інтервал між рядками – одинарний;
- перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
- відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;

– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:

- **класифікаційний індекс Універсальної десятикової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);**
- **відомості про авторів, що містять такі елементи**

перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);

- назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку); (Arial Black, 10 pt, звичайний);
- **анотація, резюме** (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."; **анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії**); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
- основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
- список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
- дата надходження до редколегії, наприклад, "Стаття надійшла до редколегії 09.11.05". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 pt, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

– кожен аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;

– джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

– усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;

- не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
- на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
- усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
- усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
- формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:			Define Size:		
Text	Times New Roman		Full		9 pt
Function	Times New Roman		Subscript/Superscript		7 pt
Variable	Times New Roman	italic	Sub-Subscript/Superscript		6 pt
L.C.Greek	Symbol		Symbol		14 pt
U.C.Greek	Symbol		Sub-Symbol		9 pt
Vector-matrix	Times New Roman	bold			
Number	Times New Roman				

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; **пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовок бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80);** не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. **Пристатейним бібліографічним спискам передує рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Назва, Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність дотримання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск (2)30

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,2. Наклад 300. Зам. № 213-6742.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М2.
Підписано до друку 15.10.13

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02