

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М. Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula (United Kingdom) д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko (United Kingdom), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, акад. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov (Sweden), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Sushansky (Poland), д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk (Chile), д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Ф. Улітко, чл.-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Futorny (Brazil), д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 25.06.15 (протокол № 13)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством юстиції України.
Засновник та видавець	Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

Городній М., Гончар І. Про сумовні розв'язки одного різницевого рівняння	5
Конет І., Пилипюк Т. Інтегральне зображення розв'язку крайової задачі для системи еволюційних параболічних рівнянь на кусково-однорідній полярній осі з м'якими межами.....	9
Плюхін О. Умовна інваріантність (1+1) – вимірного рівняння реакції-дифузії-конвекції відносно алгебр Галілея	17
Серов М., Омелян О. Галілеївська інваріантність n-вимірної системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії	21
Плахотник М. Диференційовність гомеоморфізму спряження для пари тентоподібних відображень інтервалу в себе	28
Пришляк О., Сердечнюк К. Топологія функцій висоти на доповненні до тривимірного диска в тривимірному просторі.....	35
Зельдіч М. Про цілочисельну еквівалентність двох форм, асоційованих із сагайдаком	39
Богданов В. Плоска задача про удар жорсткого циліндра по пружному шару.....	42
Курилко О. Аналіз процесу перемішування в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини	48
Семенова І. Алгоритм визначення частот коливань нестисливої рідини в гіперболоїді обертання.....	54
Федорченко Л. Деформування гнучкої ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю з діа- та парамагнітних матеріалів	57
Яровой Л. Визначення оптимальної фази в лазерному доплерівському віброметрі з трихвильовим фото змішуванням	61
Андрій Феофанович Улітко (28.11.1934 – 24.06.2015)	66

СОДЕРЖАНИЕ

Городний М., Гончар И. О суммируемых решениях одного разностного уравнения.....	5
Конет И., Пилипюк Т. Интегральное представление решения краевой задачи для системы эволюционных параболических уравнений на кусочно-однородной полярной оси с мягкими границами	9
Плюхин А. Условная инвариантность (1+1)-мерного уравнения реакции-диффузии-конвекции относительно алгебр Галилея	17
Серов Н., Омелян А. Галилеевская инвариантность n-мерной системы нелинейных уравнений реакции-диффузии.....	21
Плахотник М. Дифференцируемость гомеоморфизма сопряжения для пары тентообразных отображений интервала в себя.....	28
Пришляк А., Сердечнюк К. Топология функций высоты на дополнении к трехмерному диску в трехмерном пространстве.....	35
Зельдич М. О целочисленной эквивалентности двух форм, ассоциированных с колчаном	39
Богданов В. Плоская задача удара жесткого цилиндра по упругому слою.....	42
Курилко А. Анализ процесса перемешивания вязкой жидкости внутри прямоугольной области	48
Семенова И. Алгоритм определения частот колебаний несжимаемой жидкости в гиперболоиде вращения.....	54
Федорченко Л. Деформирование гибкой ортотропной сферической оболочки с учетом ортотропной электропроводности с диа- и парамагнитных материалов.....	57
Яровой Л. Определение оптимальной фазы лазерном доплеровском виброметре с трехволновым фотосмещением.....	61
Андрей Феофанович Улитко (28.11.1934 – 24.06.2015)	66

Gorodnii M., Gonchar I. On the summable solutions of one difference equation.....	5
Konet I., Pylypiuk T. The integral representation of the solution of boundary value problem for system of evolutionary parabolic equations in piece-homogeneous polar axis with soft limits	9
Pliukhin O. Conditional invariance of (1+1)-dimensional reaction-diffusion-convection equation with respect to Galilean algebras	17
Serov M., Omelyan O. The Galilei invariance of the n-dimensional system of nonlinear reaction-diffusion equations	21
Plakhotnyk M. Differentiability of the homeomorphism of conjugateness for the pair of tentlike interval itself mappings.....	28
Prishlyak A., Serdechniuk K. Topology of height functions in addition to three-dimensional disk in three-dimensional space.....	35
Zeldich M. On integer equivalence of two forms associated with a quiver	39
Bogdanov V. The plane problem of an impact of a hard cylinder elastic layer.....	42
Kurylko O. The analysis of the stirring process of a viscous fluid inside a rectangular cavity	48
Semenova I. The algorithm for determining the frequencies of oscillations of an incompressible liquid in the hyperboloid of revolution.....	54
Fedorchenko L. Deformation of flexible orthotropic spherical shell with ortotropic electroconductivity with dia- and paramagnetic materials	57
Yarovoi L. Determination of optimal phase in laser vibrometer with three wave interference.....	61
Andriy Feofanovych Ulitko (28.11.1934 – 24.06.2015)	66

ПРО СУМОВНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

Досліджується питання про існування єдиного сумовного розв'язку одного різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом у банаховому просторі.

ВСТУП. Нехай \mathbb{B} – скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B – лінійні, а отже, і обмежені оператори в \mathbb{B} , для яких існують обернені оператори A^{-1}, B^{-1} ; I – одиничний оператор в \mathbb{B} . Покладемо

$$l_1(\mathbb{B}) = \left\{ \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{B} \mid \|\bar{x}\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Тоді $l_1(\mathbb{B})$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_1$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ – задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ – шукана послідовність.

Мета цієї статті – отримати необхідні та достатні умови на оператори A, B , при виконанні яких справджується така умова.

Умова 1. Для довільної послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_1(\mathbb{B})$.

Аналогічне питання щодо існування єдиного обмеженого розв'язку досліджувалося, зокрема, в [3–5] для різницевого рівняння зі сталими i в [1, 4, 6, 7] зі змінними операторними коефіцієнтами, а єдиного розв'язку у просторі $l_p, 1 \leq p < \infty$, – у [1, 2]. У [7, с. 250] доведено, що для різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

умова існування єдиного обмеженого розв'язку виконується тоді і тільки тоді, коли для послідовності лінійних обмежених операторів виконується умова дискретної дихотомії. Цю умову важко перевірити. Інший підхід до дослідження різницевого рівняння (2), за допомогою якого для (2) отримано достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку, запропоновано в [4, с. 25]. Цей підхід розвивається та використовується і в даній роботі.

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ. Розглянемо множини

$$G_- = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|A^k z\| < \infty \right\}; G_-^m = G_-, m \geq 0; \quad G_-^m = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|A^k B^m z\| < \infty \right\}, m \geq 1;$$

$$G_+ = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|B^{-k} z\| < \infty \right\}; G_+^{-n} = G_+, n \geq 0; \quad G_+^n = \left\{ z \in \mathbb{B} \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|B^{-k} A^{-n} z\| < \infty \right\}, n \geq 1.$$

Усі ці множини лінійні, а тому є підпросторами скінченновимірного простору \mathbb{B} . У подальшому використовуються наступні леми.

Лема 1. Якщо виконується умова 1, то $G_- \cap G_+ = \{\bar{0}\}$.

Доведення. Припустимо, що існує $u \neq \bar{0}, u \in G_- \cap G_+$. Тоді однорідне рівняння $\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n, n \leq 0, \end{cases}$ має окрім ну-

льового ненульовий розв'язок $\left\{ \dots, B^{-2}u, B^{-1}u, \underset{1}{u}, Au, A^2u, \dots \right\}$ у просторі $l_1(\mathbb{B})$, що суперечить умові 1.

Лему 1 доведено.

Лема 2. Якщо виконується умова 1, то $\mathbb{B} = G_- \dot{+} G_+$, тобто \mathbb{B} є прямою сумою G_- та G_+ .

Доведення. Зафіксуємо $u \in \mathbb{B}$ і доведемо, що існують такі $\alpha \in G_-, \beta \in G_+$, що $u = \alpha + \beta$. Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} u_{n+1} = Au_n, n \geq 1, \\ u_1 = Bu_0 + u_0, \\ u_{n+1} = Bu_n, n \leq -1. \end{cases}$$

Згідно умови 1 це рівняння має єдиний розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ в $l_1(\mathbb{B})$. Тоді $u_0 \in G_+$, оскільки $u_{-k} = B^{-k}u_0, k \geq 1$.

Також із умови $u_0 \in G_+$ випливає, що $Bu_0 \in G_+$. Нарешті $u_1 \in G_+$, оскільки $u_{k+1} = A^k u_1, k \geq 1$. Отже, $u = \alpha + \beta$, де $\alpha = u_1, \beta = -Bu_0$.

Доведемо єдиність розкладу. Припустимо, що $u = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$. Тоді $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$, причому $\alpha_1 - \alpha_2 \in G_-, \beta_2 - \beta_1 \in G_+$. З леми 1 випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$. Лему 2 доведено.

Лема 3. Якщо $\mathbb{B} = G_- + G_+$, то $\mathbb{B} = G_-^{-n} + G_+ = G_- + G_+^n$ для кожного $n \geq 1$.

Доведення. Зафіксуємо $n \geq 1$ і покажемо, що $\mathbb{B} = G_-^{-n} + G_+$. Якщо припустити існування елемента $u \neq \bar{0}, u \in G_-^{-n} \cap G_+$, то отримаємо $B^n u \neq \bar{0}, B^n u \in G_- \cap G_+$. Маємо протиріччя.

Зафіксуємо тепер $u \in \mathbb{B}$ і покажемо, що u зображується у вигляді $u = u_{-n}^- + u_{-n}^+$, де $u_{-n}^- \in G_-^{-n}, u_{-n}^+ \in G_+$. Оскільки $\mathbb{B} = G_- + G_+$, то існують такі $w^\pm \in G_\pm$, що $B^n u = w^- + w^+$. Покладемо $u_{-n}^- = B^{-n} w^-$. Тоді $u_{-n}^- \in G_-^{-n}$, а також $(u - u_{-n}^-) \in G_+$, оскільки $B^n(u - u_{-n}^-) = w^+ \in G_+$.

Аналогічно перевіряється, що $\mathbb{B} = G_- + G_+^n$. Лему 3 доведено.

Лема 4. Якщо виконується умова 1, то спектри $\sigma(A), \sigma(B)$ операторів A, B не перетинаються з одиничним колом $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \neq 1\}$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай існує $\lambda \in S \cap \sigma(A)$. Зафіксуємо базис в \mathbb{B} , у якому A має жорданову нормальну форму. Нехай простір \mathbb{B} m – вимірний, а числу λ відповідає клітина Жордана розміру $k \times k$. Базис $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ в \mathbb{B} вибираємо так, щоб у цьому базисі оператору A відповідала матриця

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & & & & \\ - & - & - & - & - & - & & & & \\ & & & & & & & & & M \end{array} \right).$$

Тут M – квадратна матриця розмірності $(m-k) \times (m-k)$ (відсутня при $m = k$) і на незаповнених місцях розташовані нулі.

Покладемо $u = e_k$ і розглянемо послідовність

$$y_n = \frac{\lambda^n}{n^2} u, n \geq 1; \quad y_n = \bar{0}, n \leq 0. \tag{3}$$

Ця послідовність належить простору $l_1(\mathbb{B})$, а отже за умовою 1 їй відповідає єдиний розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_1(\mathbb{B})$. З (1), (3) випливає, що для всіх $n \geq 1$ маємо

$$x_{n+1} = A^n x_1 + \lambda A^{n-1} u + \dots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)^2} A u + \frac{\lambda^n}{n^2} u. \tag{4}$$

Нехай $x_1 = \sum_{j=1}^m t_j e_j$. Тоді у вибраному базисі маємо

$$x_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{k-1} \\ t_k \\ t_{k+1} \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & \dots & C_n^{k-1} \lambda^{n-k+1} & & & & & & \\ 0 & \lambda^n & & \dots & C_n^{k-2} \lambda^{n-k+2} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n & & & & & & \\ - & - & - & - & - & - & & & & \\ & & & & & & & & & M^n \end{pmatrix}, n \geq 1$$

Тут k -та координата вектора u дорівнює 1.

Тому внаслідок (4) k -та координата $(x_{n+1})_k$ вектора x_{n+1} записується у вигляді

$$(x_{n+1})_k = \lambda^n t_k + \lambda^n \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right),$$

що суперечить включенню $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_1(\mathbb{B})$. Таким чином, $\sigma(A) \cap S = \emptyset$.

За допомогою аналогічних міркувань перевіряється, що і $\sigma(B) \cap S = \emptyset$. Лему 4 доведено.

Нехай $\sigma_-(A), \sigma_-(B)$ – частини спектрів операторів A, B , які лежать всередині, а $\sigma_+(A), \sigma_+(B)$ – ззовні S . Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A), \sigma_\pm(B)$ непорожні. Зауважимо, що усі отримані нижче результати залишаються правильними і у випадку, коли серед них є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Внаслідок леми 4 при виконанні умови 1 простір \mathbb{B} розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $\mathbb{B} = \mathbb{B}_+(A) + \mathbb{B}_-(A)$ (див., наприклад, [4, с. 6]) таким чином, що звуження A_\pm оператора A на $\mathbb{B}_\pm(A)$ мають спектри $\sigma_\pm(A)$. Аналогічно $\mathbb{B} = \mathbb{B}_+(B) + \mathbb{B}_-(B)$ і звуження B_\pm оператора B на $\mathbb{B}_\pm(B)$ мають такі ж властивості. Відзначимо, що при цьому ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n\|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|B_+^{-n}\|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|B_-^n\| \quad (5)$$

збігаються.

Лема 5. $G_- = \mathbb{B}_-(A), G_+ = \mathbb{B}_+(B)$.

Доведення. Із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n\|$ для кожного $z \in \mathbb{B}_-(A)$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n z\|$, а отже, $\mathbb{B}_-(A) \subset G_-$.

Також у випадку, коли $z \in \mathbb{B}_+(A) \cap G_-$, маємо $\|z\| = \|A_+^{-n} A_+^n z\| \leq \|A_+^{-n}\| \|A_+^n z\| \leq \|A_+^{-n}\| \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^k z\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, оскільки ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\|$ збігається. Таким чином, $z = \bar{0}$ і $G_- = \mathbb{B}_-(A)$. Аналогічно встановлюємо, що $G_+ = \mathbb{B}_+(B)$. Лему 5 доведено.

Нехай виконується умова 1. Зафіксуємо послідовність $\bar{u} = \{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$. Внаслідок лем 2, 3 її елементи єдиним чином зображуються у такому вигляді:

$u_0 = u_0^- + u_0^+$, де $u_0^- \in G_-, u_0^+ \in G_+$;

якщо $n \geq 1$, то $u_n = u_n^- + u_n^+$, де $u_n^- \in G_-, u_n^+ \in G_+$;

якщо $n \leq -1$, то $u_n = u_n^- + u_n^+$, де $u_n^- \in G_-, u_n^+ \in G_+$.

Лема 6. Якщо виконується умова 1, то відповідний послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$x_1 = u_0^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} B^{|\nu|} u_\nu^- - \sum_{\nu=1}^{\infty} A^{-\nu} u_\nu^+, \quad (6)$$

$$x_n = u_{n-1}^- + \sum_{k=0}^{n-2} A^{n-1-k} u_k^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} A^{n-1} B^{|\nu|} u_\nu^- - \sum_{\nu=n}^{\infty} A^{-\nu+n-1} u_\nu^+, \quad n \geq 2, \quad (7)$$

$$x_n = u_{n-1}^- + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} B^{|\nu|+n-1} u_\nu^- - \sum_{\nu=n}^{\infty} B^{n-1-\nu} u_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^{\infty} B^{n-1} A^{-\nu} u_\nu^+, \quad n \leq 0, \quad (8)$$

Тут усі ряди з (6–8) збігаються за нормою простору \mathbb{B} .

Доведення. Нехай $y_0 = u_0^- \in G_-, y_n = \bar{0}, n \neq 0$. Тоді рівняння (1) записується у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n, n \geq 1, \\ x_1 = Bx_0 + u_0^-, \\ x_{n+1} = Bx_n, n \leq -1. \end{cases} \quad (9)$$

Єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок рівняння (9) явно визначається, а саме $x_n = \bar{0}, n \leq 0; x_1 = u_0^-, x_n = A^n u_0^-, n \geq 1$, і зображується у вигляді (6)–(8) при $y_0 = u_0^-, y_n = \bar{0}, n \neq 0$.

Аналогічно перевіряється, що для довільного фіксованого $m \in \mathbb{Z}$ відповідні послідовностям $y_m = u_m^-, y_n = \bar{0}, n \neq m$, та $y_m = u_m^+, y_n = \bar{0}, n \neq m$, єдині у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язки різницевого рівняння (1) також задаються формулами (6) – (8), записаними для цих послідовностей.

Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$, і покладемо $\bar{u}_p = \{\dots, \bar{0}, u_{-p}, u_{-p+1}, \dots, u_p, \bar{0}, \dots\}$. Тоді $\bar{u}_p \in l_1(\mathbb{B})$. Скориставшись лінійністю різницевого рівняння (1) і додавши отримані вище розв'язки, що відповідають послідовностям $y_m = u_m^\pm, y_n = \bar{0}, n \neq m, |m| \leq p$, отримуємо, що відповідний елементу \bar{u}_p єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок рівняння (1) записується у такому вигляді:

$$x_1^p = u_0^- + \sum_{\nu=-p}^{-1} B^{|\nu|} u_\nu^- - \sum_{\nu=1}^p A^{-\nu} u_\nu^+, \quad (10)$$

$$x_n^p = u_{n-1}^- + \sum_{k=0}^{n-2} A^{n-1-k} u_k^- + \sum_{\nu=-p}^{-1} A^{n-1} B^{|\nu|} u_\nu^- - \sum_{\nu=n}^p A^{-\nu+n-1} u_\nu^+, \quad 2 \leq n \leq p, \quad (11)$$

$$x_{p+1}^p = u_p^- + \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k} u_k^- + \sum_{\nu=-p}^{-1} A^p B^{|\nu|} u_\nu^-, \quad (12)$$

$$x_n^p = \sum_{k=0}^p A^{n-1-k} u_k^- + \sum_{\nu=-p}^{-1} A^{n-1} B^{|\nu|} u_\nu^-, \quad n \geq p+2, \quad (13)$$

$$x_n^p = u_{n-1}^- + \sum_{\nu=-p}^{n-2} B^{|\nu|+n-1} u_\nu^- - \sum_{\nu=n}^0 B^{n-1-\nu} u_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^p B^{n-1} A^{-\nu} u_\nu^+, \quad -p+2 \leq n \leq 0, \quad (14)$$

$$x_{-p+1}^p = u_{-p}^- - \sum_{\nu=n}^0 B^{-p-\nu} u_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^p B^{-p} A^{-\nu} u_\nu^+, \quad (15)$$

$$x_n^p = - \sum_{\nu=-p}^0 B^{n-1-\nu} u_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^p B^{n-1} A^{-\nu} u_\nu^+, \quad n \leq -p. \quad (16)$$

Зауважимо тепер, що $\bar{u}_p \rightarrow \bar{u}, p \rightarrow \infty$, у просторі $l_1(\mathbb{B})$.

Розглянемо оператор $T : l_1(\mathbb{B}) \rightarrow l_1(\mathbb{B})$, що якщо покласти $\bar{w} = \{w_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_1(\mathbb{B})$, то координати $T\bar{w} = \{(T\bar{w})_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_1(\mathbb{B})$ визначаються за допомогою рівностей $(T\bar{w})_n = w_{n+1} - Aw_n, n \geq 1, (T\bar{w})_n = w_n - Bw_n, n \leq 0$.

Зауважимо, що $T \in L(l_1(\mathbb{B}))$ і рівняння (1) за допомогою оператора T записується у вигляді $T\bar{x} = \bar{y}$. Із умови 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що для T існує обернений оператор $T^{-1} \in L(l_1(\mathbb{B}))$. Тому $\bar{x}_p = \{x_p^n, n \in \mathbb{Z}\} = T^{-1}\bar{u}_p \rightarrow T^{-1}\bar{u} = \bar{x}, p \rightarrow \infty$, де координати \bar{x}_p та \bar{x} визначаються відповідно за формулами (6)–(8) та (10)–(16). Оскільки із збіжності в $l_1(\mathbb{B})$ випливає покоординатна збіжність, то, перейшовши в (10), (11), (14) до границі при $p \rightarrow \infty$, робимо висновок, що твердження леми 6 виконується.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ. Основний результат статті сформульований у вигляді наступних теорем.

Теорема 1. Якщо виконується умова 1, то :

a1) $\mathbb{B} = G_- + G_+$;

a2) для довільної послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ відповідний їй єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) визначається за допомогою формул (6)–(8).

Теорема 1 виконується внаслідок лем 2, 6.

Теорема 2. Нехай виконується умова a1) теореми 1, а також відповідна кожній послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ побудована за допомогою формул (6)–(8) послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ належить простору $l_1(\mathbb{B})$. Тоді справджується умова 1 і за допомогою формул (6)–(8) визначено відповідний послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний у просторі $l_1(\mathbb{B})$ розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1).

Доведення. Із умови a1) і леми 3 випливає існування зображень $u_m = u_m^- + u_m^+, m \in \mathbb{Z}$. Отже, послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ визначена коректно і за припущенням теореми 2 належить до $l_1(\mathbb{B})$.

Перевіримо виконання рівностей (1). Внаслідок (6) матимемо:

$$Ax_1 = Au_0^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} AB^{|\nu|} u_\nu^- - \sum_{\nu=1}^{\infty} AA^{-\nu} u_\nu^+ = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} AB^{|\nu|} u_\nu^- - \sum_{\nu=1}^{\infty} A^{1-\nu} u_\nu^+ - u_1^+ - u_1^- + u_1^- + Au_0^- = x_2 - u_1.$$

При $n \neq 1$ рівності (1) перевіряються аналогічно.

Якщо припустити, що рівняння (1) має два різні розв'язки у просторі $l_1(\mathbb{B})$, то їхня різниця, яку позначимо $\{v_n, n \in \mathbb{Z}\}$, є ненульовим розв'язком однорідного рівняння (1), тобто

$$\begin{cases} v_{n+1} = Av_n, n \geq 1, \\ v_{n+1} = Bv_n, n \leq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Із (17) випливає, що $v_{n+1} = A^n v_1, v_{-n+1} = B^{-n} v_1$ для всіх $n \geq 1$. Тому $v_1 \neq 0$ і, одночасно, $v_1 \in G_- \cap G_+$. Маємо протиріччя. Теорему 2 доведено.

Наслідок. Нехай A, B – такі оборотні оператори, що $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset, \mathbb{B}_-(A) = \mathbb{B}_-(B), \mathbb{B}_+(A) = \mathbb{B}_+(B)$. Тоді виконується умова 1.

Доведення. З леми 5 і умов наслідку випливає, що $G_- + G_+ = \mathbb{B}_-(A) + \mathbb{B}_+(A) = \mathbb{B}$. Зафіксуємо $u \in \mathbb{B}, m \in \mathbb{N}$. Елемент u єдиним чином зображується у вигляді

$$u = u^- + u^+, \quad (18)$$

де $u^- \in G_-, u^+ \in G_+$. При цьому, з урахуванням інваріантності $\mathbb{B}_-(B)$ відносно оператора B , при фіксованому $m \geq 1$ отримаємо, що $B^m u^- \in G_-$, а отже, $u^- \in G_-^{-m}$. Тому (18) визначає розклад u відносно G_-^{-m} та G_+ . Аналогічно перевіряється, що (18) задає розклад u відносно G_- та G_+^m .

Таким чином, коли позначити через P_{\pm} проєктори на G_{\pm} , то для фіксованої послідовності $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset l_1(\mathbb{B})$ при виконанні умов наслідку, у формулах (6)–(8) матимемо $u_m^- = P_- u_m$, $u_m^+ = P_+ u_m$ для кожного $m \in \mathbb{Z}$. Тому із (6)–(8) випливає, що

$$\|x_1\| \leq \sum_{\nu=-\infty}^0 \|B_-^{|\nu|}\| \|P_-\| \|u_{\nu}\| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \|P_+\| \|u_{\nu}\|, \quad (19)$$

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|A_-^{n-1-k}\| \|P_-\| \|u_k\| + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \|A_-^{n-1}\| \|B_-^{|\nu|}\| \|P_-\| \|u_{\nu}\| + \sum_{\nu=n}^{\infty} \|A_+^{n-1-\nu}\| \|P_+\| \|u_{\nu}\|, \quad n \geq 2, \quad (20)$$

$$\|x_n\| \leq \sum_{\nu=-\infty}^{n-1} \|B_-^{|\nu|+n-1}\| \|P_-\| \|u_{\nu}\| + \sum_{\nu=n}^0 \|B_+^{|\nu|+n-1}\| \|P_+\| \|u_{\nu}\| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \|B_+^{n-1}\| \|A_+^{-\nu}\| \|P_+\| \|u_{\nu}\|, \quad n \leq 0. \quad (21)$$

Внаслідок (19)–(21) і збіжності рядів (5) справджується включення $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_1(\mathbb{B})$. Отже, виконуються усі умови теореми 2. Наслідок доведено.

ВИСНОВКИ. Отримано необхідні та достатні умови існування єдиного сумовного розв'язку різницевого рівняння (1). Отримані результати узагальнюють і доповнюють для рівняння (1) твердження теореми 7 з [4, с. 25].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Баскаков А. Г., Пастухов А. И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журнал. – 2001. – 42, №6. – С. 1231–1243.
2. Городний М. Ф. l_p -розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. матем. журн. – 2003. – 55, №3. – С. 425–430.
3. Городний М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. матем. журн. – 1991. – 43, №1. – С. 42–46.
4. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992. – 319 с.
5. Ким В. С. Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Диффер. уравнения. – 1967. – 3, №12. – С. 2151–2160.
6. Слюсарчук В. Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на \mathbb{Z} функций // Мат. заметки. – 1985. – 37, вып. 5. – С. 662–666.
7. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

Стаття надійшла до редколегії 09.06.15

Городний М., д-р физ.-мат. наук., Гончар И., асп.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

О СУММИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуется вопрос о существовании единственного суммируемого решения одного разностного уравнения с переменным операторным коэффициентом в банаховом пространстве.

Gorodnii M., Full Doctor, Gonchar I., PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ON THE SUMMABLE SOLUTIONS OF ONE DIFFERENCE EQUATION

We study the problem of existence of the unique summable solution of the difference equation with variable operator coefficient in Banach space.

УДК 517.946

I. Konet, Full Doctor, T. Pylypiuk, teacher
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky
e-mail: konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEM OF EVOLUTIONARY PARABOLIC EQUATIONS IN PIECE-HOMOGENEOUS POLAR AXIS WITH SOFT LIMITS

By means of method of Laplace integral transform in combination with the method of Cauchy functions the integral representation of exact analytical solution of mixed problem for the system of evolutionary parabolic equations modeled by hybrid differential operator of Bessel-Euler-(Kontorovich-Lebedev) in the piece-homogeneous polar axis $r \geq 0$ with soft limits is obtained.

INTRODUCTION. Parabolic boundary value problems in homogeneous environments (simply connected domains) make up a significant theoretical and practical interest because they are used in the mathematical modeling of various processes and phenomena of natural science, technique, various technologies [1, 15].

In the last decades much attention is given to the investigation of parabolic boundary value problems in nonhomogeneous media [3, 16]. In this case, the coefficients of equations are piecewise continuous or, in particular, piecewise constant. For these problems it is difficult to apply classical method of separation of variables [18]. But for rather wide class of similar problems in the construction of exact solutions the method of integral or hybrid integral transforms [2, 6, 7, 11] can be effectively used.

In theoretical studies and applied problems most often the differential operators of 2nd order are used, in particular it is Fourier differential operator [17]

$$F = \frac{d^2}{dr^2},$$

Euler differential operator [10]

$$B_{\alpha}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2,$$

Bessel differential operator [13]

$$B_{\nu, \alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2},$$

Legendre differential operator [5]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r},$$

generalized Legendre differential operator [5]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr} \right), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2)$$

and Kontorovich-Lebedev differential operator [12]

$$B_{\alpha} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1)r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2.$$

If $\theta(x)$ is the Heaviside step function [19], and L_j is one of listed differential operators, then we can always create the hybrid differential operator that corresponds to the geometric structure of piecewise homogeneous domain.

For example, for the piecewise homogeneous interval $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R)$ it is possible to create hybrid differential operator

$$M = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 L_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 L_2 + \theta(r - R_2)\theta(R - r)a_3^2 L_3; \quad a_j^2 = const.$$

It is obvious that operator L_1 is defined in the interval (R_0, R_1) , operator L_2 is defined in the interval (R_1, R_2) , and operator L_3 is defined in the interval (R_2, R) .

It is clear, that if we change the order of operators L_1, L_2, L_3 we get other hybrid differential operator.

We propose in this paper the exact solution of the initial-boundary value problem for a system of evolution equations of parabolic type, modeled by hybrid differential operator of Bessel-Euler-(Kontorovich-Lebedev) on piecewise homogeneous polar axis $(0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)$ with soft limits.

FORMULATION OF THE PROBLEM. We consider the problem of the structure of bounded in the set $D_2^+ = \{(t, r) : t \in (0; +\infty); r \in I_2^+ = (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)\}$ solution for separate system of partial differential equations of the parabolic type of 2nd order

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t, r) - a_1^2 B_{\nu, \alpha_1} [u_1(t, r)] &= f_1(t, r), \quad r \in (0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t, r) - a_2^2 B_{\alpha_2}^* [u_2(t, r)] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t, r) - a_3^2 B_{\alpha_3} [u_3(t, r)] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, +\infty), \end{aligned} \tag{1}$$

with initial conditions

$$\begin{aligned} u_1(t, r)|_{t=0} &= g_1(r), \quad r \in (0, R_1); \quad u_2(t, r)|_{t=0} = g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2); \\ u_3(t, r)|_{t=0} &= g_3(r), \quad r \in (R_2, \infty), \end{aligned} \tag{2}$$

boundary conditions

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^k u_1(t, r)}{\partial r^k} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\partial^k u_3(t, r)}{\partial r^k} = 0; \quad k = 0, 1 \tag{3}$$

and conjugate conditions

$$\left(L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j, k = 1, 2, \tag{4}$$

here $B_{\nu, \alpha_1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_1 + 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha_1^2}{r^2}$ is Bessel differential operator, $B_{\alpha_2}^* = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_2 + 1)r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2^2$ is Euler differential operator, $B_{\alpha_3} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_3 + 1)r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_3^2 - \lambda^2 r^2$ is Kontorovich-Lebedev differential operator.

In equations (4) there are the differential operators

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}; \quad j, m, k = 1, 2.$$

We assume that conditions on the coefficients are true: $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\gamma_{jm}^k \geq 0$; $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$; $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$; $c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$, $\alpha_{11}^k \gamma_{21}^k - \alpha_{21}^k \gamma_{11}^k = \beta_{11}^k \delta_{21}^k - \beta_{21}^k \delta_{11}^k$, $\alpha_{12}^k \gamma_{22}^k - \alpha_{22}^k \gamma_{12}^k = \beta_{12}^k \delta_{22}^k - \beta_{22}^k \delta_{12}^k$, $j, k = 1, 2$.

Remark 1. The presence of the differentiation operator in time in the conjugate conditions we interpret based on physical reasons about heat waves as softness of boundary of domain on reflection of waves.

Remark 2. In the case of hard boundary of domain on reflection of waves ($\delta_{jm}^k = \gamma_{jm}^k = 0$), we have mixed problem with classic conjugate conditions, solution of which is obtained from the solution of the problem (1)–(4) as a particular case.

THE MAIN PART. To solve the problem (1)–(4) let's attract integral Laplace transform relative to the variable t on the assumption that the given functions $f_j(t, r)$ ($j = \overline{1,3}$), $\omega_{jk}(t)$ ($j, k = 1, 2$) and the required function $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\}$ are the originals by Laplace [9].

In the Laplace image for the problem (1)–(4) it corresponds the boundary value problem to construct solution which is bounded in the set I_2^+ for the separate system of differential equations of Bessel, Euler and Kontorovich-Lebedev for modified functions

$$\begin{aligned} (B_{\nu, \alpha_1} - q_1^2)u_1^*(p, r) &= -F_1^*(p, r), & r \in (0, R_1), \\ (B_{\alpha_2}^* - q_2^2)u_2^*(p, r) &= -F_2^*(p, r), & r \in (R_1, R_2), \\ (B_{\alpha_3} - q_3^2)u_3^*(p, r) &= -F_3^*(p, r), & r \in (R_2, +\infty) \end{aligned} \tag{5}$$

with boundary conditions

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^k u_1^*(p, r)}{dr^k} = 0; \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{d^k u_3^*(p, r)}{dr^k} = 0; \quad k = 0, 1 \tag{6}$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j1}^k \right) u_k^*(p, r) - \left(\bar{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{j2}^k \right) u_{k+1}^*(p, r) \right] \Big|_{r=R_k} = \bar{\omega}_{jk}^*(p); \quad j, k = 1, 2. \tag{7}$$

In the equalities (5)–(6) we accept the denotation:

$$q_j^2 = a_j^{-2}(p + \gamma_j^2)^{1/2}, \quad F_j^*(p, r) = [f_j^*(p, r) + g_j(r)] a_j^{-2}, \quad \bar{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + p \delta_{jm}^k, \quad \bar{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + p \gamma_{jm}^k,$$

$$\bar{\omega}_{jk}^*(p) = \omega_{jk}^*(p) + \psi_{jk}; \quad \psi_{jk} = [\delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k)] - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)]; \quad u_j^*(p, r) = \int_0^\infty u_j(t, r) e^{-pt} dt,$$

$$f_j^*(p, r) = \int_0^\infty f_j(t, r) e^{-pt} dt, \quad \omega_{jk}^*(p) = \int_0^\infty \omega_{jk}(t) e^{-pt} dt, \quad p = \sigma + is, \quad \sigma > \sigma_0,$$

here σ_0 is the abscissa of convergence of the Laplace integral $s \in (-\infty, +\infty)$.

We can assume that $\psi_{jk} = 0$, $j, k = 1, 2$. Otherwise, let's proceed to the new initial data $\bar{g}_j(r)$ using formulas:

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \bar{g}_1(r) + b_1, & r \in (0, R_1), & \quad g_2(r) = \bar{g}_2(r) + a_2 r + b_2, & r \in (R_1, R_2), \\ g_3(r) &= \bar{g}_3(r) + b_3, & r \in (R_2, +\infty); & \quad a_2 > 0, \quad b_j > 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Let's find the values a_2 and b_j ($j = \overline{1,3}$) from the equalities

$$\begin{aligned} \gamma_{j1}^1 b_1 - [(\delta_{j2}^1 + \gamma_{j2}^1 R_1) a_2 + \gamma_{j2}^1 b_2] &= \psi_{j1}, \quad j = 1, 2; \\ (\delta_{j1}^2 + \gamma_{j1}^2 R_2) a_2 + \gamma_{j1}^2 b_2 - \gamma_{j2}^2 b_3 &= \psi_{j2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{8}$$

We have got inhomogeneous algebraic linear system of four equations for four unknown quantities b_1, a_2, b_2, b_3 . If the conditions on the coefficients are satisfied, than system (8) has a unique solution that can be obtained by Cramer rules [8]:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\Psi_{11}}{\Delta} [\gamma_{21}^1 \bar{a}_{12}^2 - \delta_{21}^1 \bar{a}_{22}^2 + \gamma_{22}^1 \bar{a}_{22}^2 (R_2 - R_1)] + \frac{\Psi_{21}}{\Delta} [\gamma_{12}^1 \bar{a}_{12}^2 - \delta_{12}^1 \bar{a}_{22}^2 + \gamma_{12}^1 \bar{a}_{22}^2 (R_2 - R_1)], \\ a_2 r + b_2 &= -\frac{\Psi_{11}}{\Delta} \gamma_{21}^1 [\bar{a}_{12}^2 + \bar{a}_{22}^2 (R_2 - r)] + \frac{\Psi_{21}}{\Delta} \gamma_{11}^1 [\bar{a}_{12}^2 + \bar{a}_{22}^2 (R_2 - r)] + \\ &+ \frac{\Psi_{12}}{\Delta} \gamma_{22}^2 [\bar{a}_{21}^1 - \bar{a}_{22}^1 (r - R_1)] - \frac{\Psi_{22}}{\Delta} \gamma_{12}^2 [\bar{a}_{21}^1 - \bar{a}_{22}^1 (r - R_1)], \\ b_3 &= \frac{\Psi_{12}}{\Delta} [\bar{a}_{21}^1 \gamma_{21}^2 - \bar{a}_{22}^1 \delta_{21}^2 - \bar{a}_{22}^1 \gamma_{21}^2 (R_2 - R_1)] + \frac{\Psi_{22}}{\Delta} [\bar{a}_{22}^1 \delta_{11}^2 - \bar{a}_{21}^1 \gamma_{11}^2 + \bar{a}_{22}^1 \gamma_{11}^2 (R_2 - R_1)], \end{aligned} \tag{9}$$

here

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}^k &= \delta_{11}^k \delta_{22}^k - \delta_{21}^k \delta_{12}^k, & \bar{a}_{21}^k &= \gamma_{11}^k \delta_{22}^k - \gamma_{21}^k \delta_{12}^k, \quad k = 1, 2; & \bar{a}_{12}^k &= \delta_{11}^k \gamma_{22}^k - \delta_{21}^k \gamma_{12}^k, & \bar{a}_{22}^k &= \gamma_{11}^k \gamma_{22}^k - \gamma_{21}^k \gamma_{12}^k, \\ \Delta &= \bar{a}_{21}^1 \bar{a}_{22}^2 - \bar{a}_{22}^1 \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{22}^1 \bar{a}_{22}^2 (R_2 - R_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Be note that the numbers ψ_{jk} appear as a result of soft lines of conjugation $r = R_k$ on wave reflection, such as heat which arise during distributing of the initial temperature.

The fundamental system of solutions for Bessel differential equation $(B_{\nu, \alpha_1} - q_1^2)v = 0$ is formed by modified Bessel functions of the 1st kind $I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r)$ and the 2nd kind $K_{\nu, \alpha_1}(q_1 r)$ [13]; the fundamental system of solutions for Euler differential equation

$(B_{\alpha_2}^* - q_2^2)v = 0$ is formed by functions $r^{-\alpha_2 - q_2}$ and $r^{-\alpha_2 + q_2}$ [14]; the fundamental system of solutions for Kontorovich-Lebedev differential equation $(B_{\alpha_3} - q_3^2)v = 0$ is formed by modified Bessel functions $I_{q_3, \alpha_3}(\lambda r)$ and $K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r)$ [12].

The presence of fundamental system of solutions allows us to construct the solution of boundary value problem (5)–(7) by the method of Cauchy functions [17] by the formulas

$$\begin{aligned} u_1^*(p, r) &= A_1 I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) + \int_0^{R_1} E_1^*(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1 + 1} d\rho, \\ u_2^*(p, r) &= A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho, \\ u_3^*(p, r) &= B_3 K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_3 - 1} d\rho, \end{aligned} \tag{10}$$

here $E_j^*(p, r, \rho)$ are the Cauchy functions:

$$\begin{aligned} E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p, r, \rho) \Big|_{r=\rho-0} &= 0, \quad j = \overline{1, 3}, \\ \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \Big|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j^*(p, r, \rho)}{dr} \Big|_{r=\rho-0} &= -\rho^{-(2\alpha_j + 1)}, \quad 2\alpha_j + 1 > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Let's suppose that the Cauchy function $E_1^*(p, r, \rho)$ is defined by the formula:

$$E_1^*(p, r, \rho) = \begin{cases} E_1^* \equiv C_1 I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) & , \quad 0 < r < \rho < R_1, \\ E_1^* \equiv C_2 I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) + D_2 K_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) & , \quad 0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Properties (11) of Cauchy function give us algebraic system of two equations:

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1) I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) + D_2 K_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) &= 0, \\ (C_2 - C_1) I'_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) + D_2 K'_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) &= -(q_1 \rho^{2\alpha_1 + 1})^{-1}, \end{aligned}$$

whence we obtain the ratio:

$$C_2 - C_1 = -q_1^{2\alpha_1} K_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho), \quad D_2 = q_1^{2\alpha_1} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho). \tag{12}$$

Let's complement the equalities (12) by algebraic equation

$$\left(\bar{\alpha}_{11} \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11} \right) E_1^* \Big|_{r=R_1} = 0: \quad U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1) C_2 + U_{\nu, \alpha_1; 11}^{12}(q_1 R_1) D_2 = 0. \tag{13}$$

From system of equations (12), (13) we find that

$$\begin{aligned} C_1 &= [U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1)]^{-1} q_1^{2\alpha_1} \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho), \\ \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho) &= U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1) K_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) - U_{\nu, \alpha_1; 11}^{12}(q_1 R_1) I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho), \\ U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1) &= \left(\frac{\nu - \alpha_1}{R_1} \bar{\alpha}_{11}^1 + \bar{\beta}_{11}^1 \right) I_{\nu, \alpha_1}(q_1 R_1) + \bar{\alpha}_{11}^1 q_1^2 R_1 I_{\nu+1, \alpha_1+1}(q_1 R_1), \\ U_{\nu, \alpha_1; 11}^{12}(q_1 R_1) &= \left(\frac{\nu - \alpha_1}{R_1} \bar{\alpha}_{11}^1 + \bar{\beta}_{11}^1 \right) K_{\nu, \alpha_1}(q_1 R_1) - \bar{\alpha}_{11}^1 q_1^2 R_1 K_{\nu+1, \alpha_1+1}(q_1 R_1). \end{aligned}$$

So Cauchy function $E_1^*(p, r, \rho)$ is defined and due to symmetry about the diagonal $r = \rho$ has the structure:

$$E_1^*(p, r, \rho) = \frac{q_1^{2\alpha_1}}{U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1)} \begin{cases} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 r), & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{14}$$

Let Cauchy function $E_2^*(p, r, \rho)$ is defined by the formula:

$$E_2^*(p, r, \rho) = \begin{cases} E_2^* \equiv C_1 r^{-\alpha_2 - q_2} + D_1 r^{-\alpha_2 + q_2}, & R_1 < r < \rho < R_2, \\ E_2^* \equiv C_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + D_2 r^{-\alpha_2 + q_2}, & R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

Properties (11) of Cauchy function give us algebraic system of equations

$$\begin{aligned} (C_2 - C_1) \rho^{-\alpha_2 - q_2} + (D_2 - D_1) \rho^{-\alpha_2 + q_2} &= 0, \\ (C_2 - C_1)(\alpha_2 + q_2) \rho^{-\alpha_2 - q_2} + (D_2 - D_1)(\alpha_2 - q_2) \rho^{-\alpha_2 + q_2} &= \rho^{-2\alpha_2}, \end{aligned}$$

whence we obtain the ratio

$$C_2 - C_1 = (2q_2)^{-1} \rho^{-\alpha_2 + q_2}, \quad D_2 - D_1 = -(2q_2)^{-1} \rho^{-\alpha_2 - q_2}. \tag{15}$$

Let's complement the equalities (15) by algebraic equations

$$\begin{aligned} \left(\bar{\alpha}_{12}^{-1} \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{12}^{-1}\right) E_2^* \Big|_{r=R_1} = 0: \quad Z_{\alpha_2;12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha_2;12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0, \\ \left(\bar{\alpha}_{11}^{-2} \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{11}^{-2}\right) E_2^* \Big|_{r=R_2} = 0: \quad Z_{\alpha_2;11}^{21}(q_2, R_2)C_2 + Z_{\alpha_2;11}^{22}(q_2, R_2)D_2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Because of (15) algebraic system (16) takes the form

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_2;12}^{11}(q_2, R_1)C_1 + Z_{\alpha_2;12}^{12}(q_2, R_1)D_1 = 0, \\ Z_{\alpha_2;11}^{21}(q_2, R_2)C_1 + Z_{\alpha_2;11}^{22}(q_2, R_2)D_1 = \frac{1}{2q_2} \Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, \rho). \end{aligned} \tag{17}$$

Hence we find that

$$C_1 = -\frac{Z_{\alpha_2;12}^{12}(q_2, R_1)\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, \rho)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}(q_2; R_1, R_2)}, \quad D_1 = \frac{Z_{\alpha_2;12}^{11}(q_2, R_1)\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, \rho)}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}(q_2; R_1, R_2)}.$$

So Cauchy function $E_2^*(p, r, \rho)$ is defined and due to symmetry about the diagonal $r = \rho$ has the structure:

$$E_2^*(p, r, \rho) = -\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_2;11}(q_2; R_1, R_2)} \begin{cases} \Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2, r)\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Psi_{\alpha_2;12}^{1*}(q_2, \rho)\Psi_{\alpha_2;11}^{2*}(q_2, r), & R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \tag{18}$$

In formulas (16)–(18) there are functions:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha;jk}^{m1}(q, R_m) = [(\bar{\beta}_{jk}^m - \alpha R_m^{-1}\bar{\alpha}_{jk}^m) - \bar{\alpha}_{jk}^m q R_m^{-1}]R_m^{-\alpha-q}, \quad Z_{\alpha;jk}^{m2}(q, R_m) = [(\bar{\beta}_{jk}^m - \alpha R_m^{-1}\bar{\alpha}_{jk}^m) + \bar{\alpha}_{jk}^m q R_m^{-1}]R_m^{-\alpha+q}, \\ \Psi_{\alpha;jk}^{m*}(q, r) = Z_{\alpha;jk}^{m2}(q, R_m)r^{-\alpha_2-q} - Z_{\alpha;jk}^{m1}(q, R_m)r^{-\alpha_2+q}, \quad j, k = 1, 2, \\ \Delta_{\alpha_2;jk}(q_2; R_1, R_2) = Z_{\alpha_2;j2}^{11}(q_2, R_1)Z_{\alpha_2;k1}^{22}(q_2, R_2) - Z_{\alpha_2;j2}^{12}(q_2, R_1)Z_{\alpha_2;k1}^{21}(q_2, R_2). \end{aligned}$$

Let's suppose that the Cauchy function $E_3^*(p, r, \rho)$ is defined by the formula:

$$E_3^*(p, r, \rho) = \begin{cases} E_3^* \equiv C_1 I_{q_3, \alpha_3}(\lambda r) + D_1 K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r), & R_2 < r < \rho < \infty, \\ E_3^* \equiv D_2 K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r), & R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases}$$

Properties (11) of Cauchy function give us algebraic system of equations

$$\begin{aligned} -C_1 I_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho) + (D_2 - D_1)K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho) = 0, \\ -C_1 I'_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho) + (D_2 - D_1)K'_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho) = -(\lambda \rho^{2\alpha_3+1})^{-1}, \end{aligned}$$

whence we obtain the ratio:

$$C_1 = \lambda^{2\alpha_3} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho), \quad D_2 - D_1 = \lambda^{2\alpha_3} I_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho). \tag{19}$$

Let's complement the equalities (19) by algebraic equation

$$\left(\bar{\alpha}_{12}^{-2} \frac{d}{dr} + \bar{\beta}_{12}^{-2}\right) E_3^* \Big|_{r=R_2} = 0: \quad U_{q_3, \alpha_3;12}^{12}(\lambda R_2)C_1 + U_{q_3, \alpha_3;12}^{22}(\lambda R_2)D_1 = 0. \tag{20}$$

From algebraic system of equations (19), (20) we find that

$$D_2 = -\left(U_{q_3, \alpha_3;12}^{22}(\lambda R_2)\right)^{-1} \lambda^{2\alpha_3} \Psi_{q_3, \alpha_3;12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho).$$

So Cauchy function $E_3^*(p, r, \rho)$ is defined and due to symmetry about the diagonal $r = \rho$ has the structure:

$$E_3^*(p, r, \rho) = -\frac{\lambda^{2\alpha_3}}{U_{q_3, \alpha_3;12}^{22}(\lambda R_2)} \begin{cases} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho)\Psi_{q_3, \alpha_3;12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r), & R_2 < r < \rho < +\infty, \\ K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r)\Psi_{q_3, \alpha_3;12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho), & R_2 < \rho < r < +\infty. \end{cases} \tag{21}$$

The conjugate conditions (7) to determine the values A_1, A_2, B_2, B_3 give us algebraic inhomogeneous system of four equations:

$$\begin{aligned} U_{\nu, \alpha_1; j1}^{11}(q_1 R_1)A_1 - Z_{\alpha_2; j2}^{11}(q_2, R_1)A_2 - Z_{\alpha_2; j2}^{12}(q_2, R_1)B_2 = \bar{\omega}_{j1}^*(p) + \delta_{j2} G_{12}^*, \quad j = 1, 2, \\ Z_{\alpha_2; j1}^{21}(q_2, R_2)A_2 + Z_{\alpha_2; j1}^{22}(q_2, R_2)B_2 - U_{q_3, \alpha_3; j2}^{22}(\lambda R_2)B_3 = \bar{\omega}_{j2}^*(p) + \delta_{j2} G_{23}^*. \end{aligned} \tag{22}$$

In system (22) there are functions

$$\begin{aligned} G_{12}^* = \frac{c_{11}^*}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_0^{R_1} \frac{I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho)}{U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1)} F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho + \frac{c_{21}^*}{R_1^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha_2; 11}^{2*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha_2; 11}(q_2; R_1, R_2)} F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho, \\ G_{23}^* = -\frac{c_{12}^*}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi_{\alpha_2; 12}^{1*}(q_2, \rho)}{\Delta_{\alpha_2; 11}(q_2; R_1, R_2)} F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho + \frac{c_{22}^*}{R_2^{2\alpha_3+1}} \int_{R_2}^{\infty} \frac{K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho)}{U_{q_3, \alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2)} F_3^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_3-1} d\rho \end{aligned}$$

and Kronecker symbol $\delta_{j2} (\delta_{12} = 0, \delta_{22} = 1)$.

Let us introduce functions for consideration:

$$\begin{aligned} A_{\nu, \alpha_1; j}^{\alpha_2}(p) &= U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1) \Delta_{\alpha_2; 2j}(q_2; R_1, R_2) - U_{\nu, \alpha_1; 21}^{11}(q_1 R_1) \Delta_{\alpha_2; 1j}(q_2; R_1, R_2); \\ B_{(\alpha); j}(p) &= U_{q_3, \alpha_3; 22}^{22}(\lambda R_2) \Delta_{\alpha_2; j1}(q_2; R_1, R_2) - U_{q_3, \alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2) \Delta_{\alpha_2; j2}(q_2; R_1, R_2); \\ \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, r) &= U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1) \Psi_{\alpha_2; 22}^{1*}(q_2, r) - U_{\nu, \alpha_1; 21}^{11}(q_1 R_1) \Psi_{\alpha_2; 12}^{1*}(q_2, r), \quad j = 1, 2; \\ \Theta_{(\alpha); 2}(p, r) &= U_{q_3, \alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2) \Psi_{\alpha_2; 21}^{2*}(q_2, r) - U_{q_3, \alpha_3; 22}^{22}(\lambda R_2) \Psi_{\alpha_2; 11}^{2*}(q_2, r). \end{aligned}$$

Let's assume that the condition of unique solvability of boundary value problem (5)-(7) is satisfied: for $p = \sigma + is$ with $Re p = \sigma > \sigma_0$, here σ_0 is the abscissa of convergence of the Laplace integral and $Im p = s \in (-\infty, +\infty)$, determinant of algebraic system (22) is different from zero:

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p) &\equiv U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1) B_{(\alpha); 2}(p) - U_{\nu, \alpha_1; 21}^{11}(q_1 R_1) B_{(\alpha); 1}(p) = \\ &= U_{q_3, \alpha_3; 22}^{22}(\lambda R_2) A_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p) - U_{q_3, \alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2) A_{\nu, \alpha_1; 2}^{\alpha_2}(p) \neq 0, \quad (\alpha) = (\alpha_2, \alpha_3). \end{aligned} \tag{23}$$

Let's define the main solutions of boundary value problem (5)-(7):

1) Green's functions generated by inhomogeneity of the conjugate conditions (7)

$$\begin{aligned} R_{\nu, \alpha_1; 11}^{(\alpha), 1*}(p, r) &= \frac{B_{(\alpha); 2}(p)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r), \quad R_{\nu, \alpha_1; 21}^{(\alpha), 1*}(p, r) = -\frac{B_{(\alpha); 1}(p)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r), \\ R_{\nu, \alpha_1; 12}^{(\alpha), 1*}(p, r) &= -\frac{2q_2 c_{21}^* U_{q_3, \alpha_3; 22}^{22}(\lambda R_2)}{R_1^{2\alpha_2+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r), \quad R_{\nu, \alpha_1; 22}^{(\alpha), 1*}(p, r) = \frac{2q_2 c_{21}^* U_{q_3, \alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2)}{R_1^{2\alpha_2+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r), \\ R_{\nu, \alpha_1; 11}^{(\alpha), 2*}(p, r) &= -\frac{U_{\nu, \alpha_1; 21}^{11}(q_1 R_1)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{(\alpha); 2}(p, r), \quad R_{\nu, \alpha_1; 21}^{(\alpha), 2*}(p, r) = \frac{U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{(\alpha); 2}(p, r), \\ R_{\nu, \alpha_1; 12}^{(\alpha), 2*}(p, r) &= -\frac{U_{q_3, \alpha_3; 22}^{22}(\lambda R_2)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, r), \quad R_{\nu, \alpha_1; 22}^{(\alpha), 2*}(p, r) = \frac{U_{q_3, \alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, r), \\ R_{\nu, \alpha_1; 11}^{(\alpha), 3*}(p, r) &= -\frac{2q_2 c_{12}^* U_{\nu, \alpha_1; 21}^{11}(q_1 R_1)}{R_2^{2\alpha_2+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r), \quad R_{\nu, \alpha_1; 21}^{(\alpha), 3*}(p, r) = \frac{2q_2 c_{12}^* U_{\nu, \alpha_1; 11}^{11}(q_1 R_1)}{R_2^{2\alpha_2+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r), \\ R_{\nu, \alpha_1; 12}^{(\alpha), 3*}(p, r) &= \frac{A_{\nu, \alpha_1; 2}^{\alpha_2}(p)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r), \quad R_{\nu, \alpha_1; 22}^{(\alpha), 3*}(p, r) = -\frac{A_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r); \end{aligned}$$

2) the influence functions generated by the inhomogeneity of system (5)

$$\begin{aligned} H_{\nu, \alpha_1; 11}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) &= \frac{q_1^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \begin{cases} I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r) [B_{(\alpha); 2}(p) \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho) - B_{(\alpha); 1}(p) \Psi_{\nu, \alpha_1; 21}^{1*}(q_1 R_1, q_1 \rho)], & 0 < r < \rho < R_1 \\ I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho) [B_{(\alpha); 2}(p) \Psi_{\nu, \alpha_1; 11}^{1*}(q_1 R_1, q_1 r) - B_{(\alpha); 1}(p) \Psi_{\nu, \alpha_1; 21}^{1*}(q_1 R_1, q_1 r)], & 0 < \rho < r < R_1 \end{cases}, \\ H_{\nu, \alpha_1; 12}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{21}^*(p) I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r)}{R_1^{2\alpha_2+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{(\alpha); 2}(p, \rho), \quad H_{\nu, \alpha_1; 13}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) = \frac{2q_2 c_{21}^* c_{22}^* I_{\nu, \alpha_1}(q_1 r)}{R_1^{2\alpha_2+1} R_2^{2\alpha_3+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho), \\ H_{\nu, \alpha_1; 21}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{11}^*(p) I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho)}{R_1^{2\alpha_1+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{(\alpha); 2}(p, r), \\ H_{\nu, \alpha_1; 22}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) &= \frac{1}{2q_2 \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \begin{cases} \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, r) \Theta_{(\alpha); 2}(p, \rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, \rho) \Theta_{(\alpha); 2}(p, r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \\ H_{\nu, \alpha_1; 23}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) &= \frac{c_{22}^*(p) \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, r)}{R_2^{2\alpha_3+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho), \quad H_{\nu, \alpha_1; 31}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) = \frac{c_{11}^*(p) 2q_2 c_{12}^*}{R_1^{2\alpha_1+1} R_2^{2\alpha_2+1}} \times \\ &\times \frac{I_{\nu, \alpha_1}(q_1 \rho)}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r), \quad H_{\nu, \alpha_1; 32}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) = \frac{c_{12}^*(p) K_{q_3, \alpha_3}(\lambda r)}{R_2^{2\alpha_2+1} \Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \Theta_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p, \rho), \\ H_{\nu, \alpha_1; 33}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) &= \frac{\lambda^{2\alpha_3}}{\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(p)} \begin{cases} K_{q_3, \alpha_3}(\lambda \rho) [A_{\nu, \alpha_1; 2}^{\alpha_2}(p) \Psi_{q_3, \alpha_3; 12}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r) - A_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p) \Psi_{q_3, \alpha_3; 22}^{2*}(\lambda R_2, \lambda r)], & R_2 < r < \rho < \infty \\ K_{\nu, \alpha_3}(q_3 r) [A_{(\alpha); 2}(p) \Psi_{\nu, \alpha_3; 12}^{2*}(q_3 R_2, q_3 \rho) - A_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(p) \Psi_{q_3, \alpha_3; 22}^{2*}(\lambda R_2, \lambda \rho)], & R_2 < \rho < r < \infty \end{cases}. \end{aligned}$$

As a result of unique of solvability of algebraic system (22), substituting the obtained values of variables A_1, A_2, B_2 and B_3 by Cramer rules in equations (10) and a number of elementary transformations, we have the unique solution of boundary value problem (5)–(7):

$$u_j^*(p, r) = \sum_{m,k=1}^2 R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j*}(p, r) \bar{\omega}_{mk}^*(p) + \int_0^{R_1} H_{\nu, \alpha_1; j1}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) F_1^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\nu, \alpha_1; j2}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) F_2^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho + \int_{R_2}^{+\infty} H_{\nu, \alpha_1; j3}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) F_3^*(p, \rho) \rho^{2\alpha_3-1} d\rho, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{24}$$

Returning to the original in formulas (24), we get the only exact solution of mixed parabolic conjugation problem (1)–(4):

$$u_j(t, r) = \sum_{m,k=1}^2 \int_0^t R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j}(t-\tau, r) \bar{\omega}_{mk}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{R_1} H_{\nu, \alpha_1; j1}^{(\alpha)}(t-\tau, r, \rho) a_1^{-2} [f_1(\tau, \rho) + g_1(\rho) \delta_+(\tau)] \rho^{2\alpha_1+1} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H_{\nu, \alpha_1; j2}^{(\alpha)}(t-\tau, r, \rho) [f_2(\tau, \rho) + g_2(\rho) \delta_+(\tau)] a_2^{-2} \rho^{2\alpha_2-1} d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_2}^{+\infty} H_{\nu, \alpha_1; j3}^{(\alpha)}(t-\tau, r, \rho) [f_3(\tau, \rho) + g_3(\rho) \delta_+(\tau)] \times \times a_3^{-2} \rho^{2\alpha_3-1} d\rho d\tau, \quad j = \overline{1, 3}, \tag{25}$$

here $\delta_+(\tau)$ is Dirac delta function, that is focused in the point $\tau = +0$ [19].

In formulas (25) we apply the Green's functions

$$R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j}(t, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j*}(p, r) e^{pt} dp, \quad m, k = 1, 2, \quad j = \overline{1, 3} \tag{26}$$

and influence functions

$$H_{\nu, \alpha_1; jk}^{(\alpha)}(t, r, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} H_{\nu, \alpha_1; jk}^{(\alpha)*}(p, r, \rho) e^{pt} dp, \quad j, k = \overline{1, 3}. \tag{27}$$

Let's find expressions for the Green's functions $R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j}(t, r)$ and influence functions $H_{\nu, \alpha_1; jk}^{(\alpha)}(t, r, \rho)$ that are convenient for use in theoretical studies and applications.

Branch points $p = -\gamma_1^2, p = -\gamma_2^2, p = -\gamma_3^2$ and $p = \infty$ are the particular points of functions $R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j*}(p, r)$ and $H_{\nu, \alpha_1; jk}^{(\alpha)*}(p, r, \rho)$. Let's put $q_j = ib_j \equiv ia_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j^2 \geq 0, j = \overline{1, 3}$. We obtain: $p + \gamma_j^2 = (\beta^2 + k_j^2); p = -(\beta^2 + k_j^2 + \gamma_j^2) = -(\beta^2 + \gamma^2)$, here $\gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}$. If $\gamma^2 = \gamma_1^2 > 0$, then $k_1^2 = 0, k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; if $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$, then $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = 0, k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$; if $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$, then $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0, k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0, k_3^2 = 0$.

Let's use the known functional relations:

$$U_{\nu, \alpha_1; j1}^{11}(ib_1 R_1) = u_{\nu, \alpha_1; j1}^{11}(b_1 R_1) \exp\left[\frac{\pi i}{2}(\nu - \alpha_1)\right], \quad U_{\nu, \alpha_1; j1}^{12}(ib_1 R_1) = -\frac{\pi i}{2} \exp\left[-\frac{\pi i}{2}(\nu + \alpha_1)\right] \times \times [u_{\nu, \alpha_1; j1}^{11}(b_1 R_1) - iu_{\nu, \alpha_1; j1}^{12}(b_1 R_1)]; \quad \Psi_{\nu, \alpha_1; jk}^{1*}(ib_1 R_1, ib_1 r) = -\frac{\pi}{2} e^{-\pi i \alpha_1} \Psi_{\nu, \alpha_1; jk}^1(b_1 R_1, b_1 r) = = -\frac{\pi}{2} e^{-\pi i \alpha_1} [u_{\nu, \alpha_1; jk}^{11}(b_1 R_1) N_{\nu, \alpha_1}(b_1 r) - u_{\nu, \alpha_1; jk}^{12}(b_1 R_1) J_{\nu, \alpha_1}(b_1 r)]; \Delta_{\alpha_2; jk}(ib_2; R_1, R_2) = 2i \delta_{\alpha_2; jk}(b_2; R_1, R_2) \equiv 2i [Y_{\alpha_2; j2}^{11}(b_2, R_1) Y_{\alpha_2; k1}^{22}(b_2, R_2) - Y_{\alpha_2; j2}^{12}(b_2, R_1) Y_{\alpha_2; k1}^{21}(b_2, R_2)]; A_{\nu, \alpha_1; j}^{\alpha_2} \left(e^{\pi i} (\beta^2 + \gamma^2) \right) = 2i \exp\left[\frac{\pi i}{2}(\nu - \alpha_1)\right] [u_{\nu, \alpha_1; j1}^{11}(b_1 R_1) \delta_{\alpha_2; 2j}(b_2; R_1, R_2) - u_{\nu, \alpha_1; j2}^{11}(b_1 R_1) \delta_{\alpha_2; 1j}(b_2; R_1, R_2)] \equiv 2ie^{\frac{\pi i}{2}(\nu - \alpha_1)} a_{\nu, \alpha_1; j}^{\alpha_2}(\beta); U_{ib_3, \alpha_3; j2}^{22}(\lambda R_2) = \frac{\pi}{sh(\pi b_3)} X_{\alpha_3; j2}^{22}(\lambda R_2, b_3) \equiv \frac{\pi}{sh(\pi b_3)} \left[\left(\tilde{\alpha}_{j2}^2 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^2 \right) D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3) \right]_{r=R_2}.$$

As a result of elementary calculations we get that

$$\Delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)} \left(e^{\pi i} (\beta^2 + \gamma^2) \right) = \frac{2i\pi}{sh(\pi b_3)} e^{\frac{\pi i}{2}(\nu - \alpha_1)} [X_{\alpha_3; 22}^{22}(\lambda R_2, b_3) a_{\nu, \alpha_1; 1}^{\alpha_2}(\beta) - X_{\alpha_3; 12}^{22}(\lambda R_2, b_3) a_{\nu, \alpha_1; 2}^{\alpha_2}(\beta)] \equiv \frac{2\pi i}{sh(\pi b_3)} e^{\frac{\pi i}{2}(\nu - \alpha_1)} \delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(\beta).$$

If $\delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(\beta) \neq 0$, then functions $R_{\nu, \alpha_1; mk}^{(\alpha), j}(t, r) \equiv 0$ and $H_{\nu, \alpha_1; jk}^{(\alpha)}(t, r, \rho) \equiv 0$ according to formulas (26) and (27). Functions $u_j(t, r) \equiv 0$ according to formulas (25). So, the solution of the parabolic problem $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\} \equiv 0$, which is impossible. It follows that $\delta_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)}(\beta) = 0$. We obtained the transcendental equation for calculating the eigenvalues of the hybrid differential operator $M_{\nu, \alpha_1}^{(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)a_1^2 B_{\nu, \alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 B_{\alpha_2}^* + \theta(r - R_2)a_3^2 B_{\alpha_3}$.

Let's determine values and functions:

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2} R_1^{2\alpha_2+1} R_2^{2\alpha_3+1}}{c_{21,1} c_{21,2} R_1^{2\alpha_1+1} R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2} R_2^{2\alpha_3+1}}{c_{21,2} R_2^{2\alpha_2+1}}, \quad a_3^2 \sigma_3 = 1, \quad V_{v,\alpha_1;1}(r, \beta_n) = q_{\alpha_2;1}(\beta_n) X_{\alpha_3;12}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) J_{v,\alpha_1}(b_{1n} r),$$

$$q_{\alpha_2;1} = \frac{c_{21,1} b_{2n}}{R_1^{2\alpha_2+1}}, \quad V_{v,\alpha_1;2}(r, \beta_n) = X_{\alpha_3;12}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) \left[u_{v,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n} R_1) \Psi_{\alpha_2;22}^1(b_{2n}, r) - u_{v,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n} R_1) \Psi_{\alpha_2;12}^1(b_{2n}, r) \right];$$

$$\Psi_{\alpha_2;j2}^1(b_{2n}, r) = Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_{2n} R_1) r^{-\alpha_2} \cos(b_{2n} \ln r) - Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_{2n} R_1) r^{-\alpha_2} \sin(b_{2n} \ln r); \quad V_{v,\alpha_1;3}(r, \beta_n) = -a_{v,\alpha_1;1}^{\alpha_2}(\beta_n) D_{\alpha_3}(\lambda r, b_{3n}),$$

$$b_{jn} = a_j^{-1} (\beta_n^2 = k_j^2)^{1/2}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Let us introduce to consideration the weight function

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_3-1},$$

spectral function $V_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{v,\alpha_1;1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{v,\alpha_1;2}^{(\alpha)}(r, \beta_n) + \theta(r - R_2)V_{v,\alpha_1;3}^{(\alpha)}(r, \beta_n)$ and its generalized squared norm [4]

$$\begin{aligned} \left\| V_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|_1^2 &= \int_0^\infty \left[V_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \right]^2 \sigma(r) dr + \Theta_2(\beta_n, \beta_n) = \ell^{-\frac{\pi i}{2}(v-\alpha_1)} c_{21,2}^{-1} a_{v,\alpha_1;1}^{\alpha_2}(\beta_n) sh(\pi b_{3n}) \times \\ &\times X_{\alpha_3;12}^{22}(\lambda R_2, b_{3n}) \left[-\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\rho} \left(\Delta_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(\rho) \right) \right]_{\rho = -(\beta_n^2 + \gamma^2)}. \end{aligned}$$

According to the generalized theorem of the development [9] we have that

$$H_{v,\alpha_1;jk}^{(\alpha)}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^\infty \ell^{-\frac{\pi i}{2}(v-\alpha_1)} \frac{V_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n) V_{v,\alpha_1;k}^{(\alpha)}(\rho, \beta_n)}{\left\| V_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|_1^2} \sigma_k a_k^2; \quad j, k = \overline{1,3},$$

$$R_{v,\alpha_1;m2}^{(\alpha);j,k}(t, r) = d_k \sum_{n=1}^\infty \ell^{-\frac{\pi i}{2}(v-\alpha_1)} \frac{Z_{v,\alpha_1;m2}^{(\alpha);k}(\beta_n) V_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n)}{\left\| V_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|_1^2}; \quad m, k = 1, 2; \quad j = \overline{1,3},$$

here $d_k = a_k^2 \sigma_k R_k^{2\alpha_k+1} \cdot c_{11,k}^{-1}$, $Z_{v,\alpha_1;m2}^{(\alpha);k}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}_{m2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{m2}^k \right) V_{v,\alpha_1;k+1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \Big|_{r=R_k}$; $m, k = 1, 2$.

Integral representation of solution of mixed parabolic problem of conjugation under consideration according to formulas (25) takes the form

$$\begin{aligned} u_j(t, r) &= \sum_{k=1}^2 \int_0^t \left[R_{v,\alpha_1;12}^{(\alpha);j,k}(t-\tau, r) \omega_{2k}(\tau) - R_{v,\alpha_1;22}^{(\alpha);j,k}(t-\tau, r) \omega_{1k}(\tau) \right] d\tau + \sum_{k=1}^2 \left[R_{v,\alpha_1;12}^{(\alpha);j,k}(t, r) \psi_{2k} - R_{v,\alpha_1;22}^{(\alpha);j,k}(t, r) \psi_{1k} \right] + \\ &+ \int_0^{R_1} \left(\sum_{n=1}^\infty \ell^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)(t-\tau)} S_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n) V_{v,\alpha_1;1}^{(\alpha)}(\rho, \beta_n) \right) \left[f_1(\tau, \rho) + g_1(\rho) \delta_+(\tau) \right] \sigma_1 \rho^{2\alpha_1+1} d\rho d\tau + \\ &+ \int_0^{R_2} \left(\sum_{n=1}^\infty \ell^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)(t-\tau)} S_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n) V_{v,\alpha_1;2}^{(\alpha)}(\rho, \beta_n) \right) \left[f_2(\tau, \rho) + g_2(\rho) \delta_+(\tau) \right] \sigma_2 \rho^{2\alpha_2-1} d\rho d\tau + \\ &+ \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty \ell^{-(\beta_n^2 + \gamma^2)(t-\tau)} S_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n) V_{v,\alpha_1;3}^{(\alpha)}(\rho, \beta_n) \right) \left[f_3(\tau, \rho) + g_3(\rho) \delta_+(\tau) \right] \sigma_3 \rho^{2\alpha_3-1} d\rho d\tau, \quad j = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

here $S_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n) = V_{v,\alpha_1;j}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \left(\left\| V_{v,\alpha_1}^{(\alpha)}(r, \beta_n) \right\|_1^2 \right)^{-1}$, $j = \overline{1,3}$.

We get the following theorem as the summary of the above results.

Theorem. Let us suppose that the next conditions are true:

- 1) functions $f_j(t, r)$ and $\omega_{jk}(t)$ are originals by Laplace on variable t ;
- 2) functions $f_j(t, r)$ and $g_j(r)$ satisfy the conjugate conditions;
- 3) functions $f(t, r) = \{f_1(t, r), f_2(t, r), f_3(t, r)\}$ and $g(r) = \{g_1(r), g_2(r), g_3(r)\}$ are bounded, continuous, absolutely summable with the weight function $\sigma(r)$ and have the bounded variation in the set I_2^+ ;

4) function $F(t, r) = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} B_{v,\alpha_1} [f_1(t, r)], \frac{\partial}{\partial r} B_{\alpha_2}^* [f_2(t, r)], \frac{\partial}{\partial r} B_{\alpha_3} [f_3(t, r)] \right\}$ is continuously differentiable by t and continuous by r in the set D_2^+ .

Then in the class of functions $u(t, r) = \{u_1(t, r), u_2(t, r), u_3(t, r)\}$, which are continuously differentiable by t and continuously differentiable by r twice in the set D_2^+ and satisfy conditions 1), 3), parabolic mixed problem of conjugation (1)–(4) has unique bounded solution, which is determined by formula (28).

CONCLUSIONS. By means of method of Laplace integral transform in combination with the method of Cauchy functions the integral representation of exact analytical solution of mixed problem of conjugation for the separate system of evolutionary parabolic equations of the second order, which is modelled by hybrid differential operator of Bessel-Euler-(Kontorovich-Lebedev) in the piece-homogeneous polar axis $(0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)$ with soft limits is obtained. Analytical expressions for main solutions (Green's functions and influence functions) that are convenient for use in theoretical studies and applications are also obtained.

REFERENCES

1. Городецкий В. В. Граничные свойства гладких у шари розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецкий. – Чернівці, 1998.
2. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський, 2011.
3. Дейнека В. С., Сергиенко І. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К., 1998.
4. Комаров Г. М., Ленюк М. П., Мороз В. В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці, 2001.
5. Конет І. М., Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці, 2002.
6. Конет І. М., Ленюк М. П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001.
7. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004.
8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М., 1971.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М., 1987.
10. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку. – Чернівці, 2012.
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997.
12. Ленюк М. П., Михалевська Г. І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лебедева. – Чернівці, 2002.
13. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль, 2004.
14. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Ейлера, Бесселя, Лежандра). Частина 2. – Тернопіль, 2011.
15. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці, 2003.
16. Сергиенко І. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991.
17. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1959.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М., 1972.
19. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М., 1965.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.14

Конет І., д-р фіз.-мат. наук, Пилипюк Т., викладач

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ НА КУСКОВО-ОДНОРІДНІЙ ПОЛЯРНІЙ ОСІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Методом інтегрального перетворення Лапласа у поєднанні з методом функцій Коші одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи еволюційних параболічних рівнянь, змодельованих гібридним диференціальним оператором Бесселя-Ейлера (Конторовича-Лебедева) на кусково-однорідній полярній осі $r \geq 0$ з м'якими межами.

Конет І., д-р фіз.-мат. наук, проф., Пилипюк Т., преподаватель

Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ІНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРНОЙ ОСИ С МЯГКИМИ ГРАНИЦАМИ

Методом интегрального преобразования Лапласа в сочетании с методом функций Коши получено интегральное представление точного аналитического решения смешанной задачи для системы эволюционных параболических уравнений, смоделированных гибридным дифференциальным оператором Бесселя-Эйлера (Конторовича-Лебедева) на кусочно-однородной полярной оси $r \geq 0$ с мягкими границами.

УДК 517.958

О. Плюхин, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач

ПолтНТУ ім. Ю. Кондратюка, Полтава

e-mail: plukhin@gmail.com

УМОВНА ІНВАНІАНТНІСТЬ (1+1) – ВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ-КОНВЕКЦІЇ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ

Знайдено всі рівняння реакції-дифузії-конвекції розмірності (1+1), які є умовно інваріантними відносно алгебри Галілея без оператора маси, та алгебри Галілея з оператором маси

ВСТУП. В основі класичної механіки лежить принцип відносності Галілея. В (1+1)-вимірному просторі йому відповідають перетворення Галілея вигляду

$$t' = t, x' = x - vt. \quad (1)$$

Виконавши для формул (1) перепозначення $t \rightarrow x_0, x \rightarrow x_1, v \rightarrow \theta$, одержимо

$$x'_0 = x_0, x'_1 = x_1 - \theta x_0. \quad (2)$$

Перетворення (2), породжуються операторами Галілея

$$G_1 = x_0 \partial_1 + x_1 Q_1, \quad (3)$$

$$G_2 = x_0 \partial_1 + Q_2, \quad (4)$$

де $Q_i = (\alpha_i u + \beta_i) \partial_u$, α_i, β_i – певні константи.

Оператор (3) разом з операторами $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, Q_1$, утворюють одну з реалізацій алгебри Галілея з оператором маси, яку ми позначимо

$$AG^M(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G_1, Q_1 \rangle. \quad (5)$$

Оператори алгебри (5) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, [\partial_0, G_1] = \partial_1, [\partial_1, G_1] = Q_0, [\partial_0, Q_1] = 0, [\partial_1, Q_1] = 0, [G_1, Q_1] = 0.$$

Оператор (4) разом з операторами ∂_0, ∂_1 , утворює реалізацію алгебри Галілея без оператора маси

$$AG(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G_2 \rangle. \tag{6}$$

Оператори алгебри (6) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, [\partial_0, G_2] = \partial_1, [\partial_1, G_2] = 0.$$

Розглянемо нелінійне рівняння реакції-дифузії-конвекції

$$u_0 = \partial_1[f^1(u)u_1] + f^2(u)u_1 + f^3(u), \tag{7}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, нижні індекси 0, 1 означають диференціювання за змінними x_0, x_1 ; $f^i(u)$ – довільні гладкі функції.

Рівняння (7) широко застосовується для опису різноманітних процесів фізики, хімії, біології та деяких інших наук. Це пов'язано з тим, що рівняння вигляду (7) враховують три типи механізмів переносу енергії, кожен з яких при математичному моделюванні в першому наближенні відповідно є лінійним щодо других похідних за просторовими координатами, перших похідних та самої шуканої функції. Наприклад, при описі процесів тепломасопереносу, перенос теплової енергії відбувається за рахунок теплопровідності середовища (закон Фур'є), за рахунок конвективного руху енергії та шляхом виділення (поглинання) енергії просторовими джерелами (стоками) енергії [1].

Повний опис симетрій Лі рівняння (7) проведено в [7], [8], [9], [11], [15], [16], [17], [18], де встановлено, що дане рівняння інваріантне відносно алгебри Галілея з оператором маси (5) лише у випадку, коли воно локально еквівалентне лінійному рівнянню теплопровідності вигляду

$$u_0 = u_{11}. \tag{8}$$

Відносно алгебри Галілея без оператора маси (6) рівняння (7) інваріантне у випадку коли воно локально еквівалентно рівнянню Бюргерса

$$u_0 + uu_1 = u_{11}, \tag{9}$$

або рівнянню

$$u_0 + \ln(u)u_1 = u_{11}. \tag{10}$$

Так як процеси, які описує рівняння (7), задовольняють принципу відносності Галілея, то природно вимагати, щоб і рівняння (7) задовольняло цьому ж принципу, тобто було інваріантне відносно алгебри Галілея (5) або (6).

Виявляється (див., наприклад, [12]), що у випадку коли вся множина розв'язків рівняння (7) не інваріантна відносно алгебри Галілея, то з неї за допомогою додаткових умов можливо виділити деяку підмножину, інваріантну відносно даної алгебри.

Виникає питання: чи існують інші вигляди рівняння (7) інваріантні відносно алгебр Галілея типу (5) або (6) разом із додатковими умовами?

Відповіді на це питання і присвячена дану статтю.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Поняття умовної симетрії введено в монографії [12]. Умовні симетрії рівнянь математичної фізики знайдено в [3, 4, 5, 6, 13, 14]. Метод умовної симетрії дає можливість одержувати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків.

Означення. [12] Система диференціальних рівнянь $S(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0$, де $u = u(x)$, $x \in R^{1+n}$, $u \in R^m$, u_k – сукупність похідних k -го порядку функції u , називається умовно інваріантною відносно оператора X , якщо вона інваріантна відносно цього оператора разом з деякою додатковою умовою $S_1(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0$.

Тобто виконуються наступні співвідношення $\tilde{X}S = \lambda_0 S + \lambda_1 S_1$, $\tilde{X}S_1 = \lambda_2 S + \lambda_3 S_1$, де $\lambda_\mu = \lambda_\mu(x, u, \partial)$ – деякі диференціальні оператори, $\mu = \overline{0, 3}$, \tilde{X} – продовження оператора (див., наприклад, [2]).

Перепишемо рівняння (7) у вигляді

$$S = f^1(u)u_{11} + f^1(u)(u_1)^2 + f^2(u)u_1 + f^3(u) - u_0 = 0. \tag{11}$$

Тут і нижче крапка означає диференціювання за змінною u . Будемо шукати такі набори функцій f^i , $i = \overline{1, 3}$, при яких рівняння (11) умовно інваріантне (разом з додатковим рівнянням S_1) відносно операторів (3), (4) узагальнених наступним чином

$$G_1 = x_0 \partial_1 + x_1 M(u) \partial_u; \tag{12}$$

$$G_2 = x_0 \partial_1 + M(u) \partial_u, \tag{13}$$

де $M(u)$ – довільна гладка функція.

ІНВАРІАНТНІСТЬ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ З ОПЕРАТОРОМ МАСИ.

Теорема 1. Рівняння (7) умовно інваріантне відносно алгебри Галілея з оператором маси тоді і тільки тоді, коли рівняння (7), оператор (12) та рівняння S_1 мають вигляд:

$$u_0 = \partial_1[f^1(u)u_1] + \frac{\lambda u}{2f^1(u)} + \lambda_1 u, \tag{14}$$

$$G_1 = x_0 \partial_1 + x_1 M(u) \partial_u,$$

$$u_0 + \frac{1}{2M(u)}(u_1)^2 + \lambda M(u) = 0, f^1(u)M(u) = -\frac{1}{2}u.$$

Доведення. Подіявши продовженим оператором \tilde{X} на рівняння (11), одержимо

$$\tilde{X}S = {}^{11}\eta f^1 + {}^1\eta(2\dot{f}^1 u_1 + f^2) - {}^0\eta + \eta(\dot{f}^1 u_{11} + \ddot{f}^1 (u_1)^2 + \dot{f}^2 u_1 + \dot{f}^3). \quad (15)$$

Використавши формули для ${}^{11}\eta$, ${}^1\eta$, ${}^0\eta$ (див., наприклад, [2]) і врахувавши вигляд оператора (12), отримаємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 0, \xi^1 = x_0, \eta = x_1 M, {}^1\eta = M + x_1 \dot{M} u_1, {}^0\eta = x_1 \dot{M} u_0 - u_1, \\ {}^{11}\eta &= 2\dot{M} u_1 + x_1 \ddot{M} (u_1)^2 + x_1 \dot{M} u_{11}. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставивши вирази (16) в формулу (15) і спростивши, одержимо

$$\begin{aligned} \tilde{X}S &= x_1 ((f^1 M)_u u_{11} + (f^1 M)_{uu} (u_1)^2 + (f^2 M)_u u_1 - \dot{M} u_0 + \dot{f}^3 M) + \\ &+ (2(f^1 M)_u + 1) u_1 + f^2 M \end{aligned} \quad (17)$$

Розглянемо спочатку частину виразу (17), який не містить змінної x_1 :

$$S_2 = (2(f^1 M)_u + 1) u_1 + f^2 M. \quad (18)$$

Подіявши продовженим оператором \tilde{X} на (18) і врахувавши (16), отримаємо

$$\tilde{X}S_2 = M(2(f^1 M)_u + 1) + x_1(2M(f^1 M)_{uu} + M(f^2 M)_u + (2(f^1 M)_u + 1)\dot{M} u_1). \quad (19)$$

З формули (19) маємо рівняння $2(f^1 M)_u + 1 = 0$, розв'язавши яке, одержимо $f^1 M = -\frac{1}{2}(u + C)$, $C = const$. З точністю до перетворень еквівалентності $u + C \rightarrow u$ маємо

$$f^1 M = -\frac{1}{2}u. \quad (20)$$

Підставивши (20) в (18), одержимо

$$f^2 = 0. \quad (21)$$

Врахувавши формули (20), (21), одержимо, що (17) має вигляд

$$\tilde{X}S = x_1 \left(-\frac{1}{2} u_{11} - \dot{M} u_0 + \dot{f}^3 M \right). \quad (22)$$

Виділивши S у виразі (22), одержимо

$$\tilde{X}S = -\frac{x_1}{2f^1} S - \frac{u \dot{f}^1 x_1}{2(f^1)^2} S_1, \quad (23)$$

де

$$S_1 = u_0 + \frac{1}{2M} (u_1)^2 + \phi(u), \quad (24)$$

$$\phi(u) = \frac{f^1}{f^1} \left(\dot{f}^3 - \frac{f^3}{u} \right). \quad (25)$$

Подіявши продовженим оператором \tilde{X} на рівняння (24) і врахувавши (16), отримаємо

$$\tilde{X}S_1 = \dot{M} x_1 \left(u_0 + \frac{1}{2M} (u_1)^2 + \frac{M}{M} \phi \right). \quad (26)$$

Порівнявши формулу (24) і вираз в дужках формули (26), отримаємо рівняння $\phi = \frac{M}{M} \dot{\phi}$, розв'язавши яке і врахувавши (20), одержимо

$$\phi = \lambda M = -\frac{\lambda u}{2f^1}. \quad (27)$$

Підставивши в (27) вираз для ϕ (25) і розв'язавши отримане рівняння відносно f^3 , знаходимо

$$f^3 = \frac{\lambda u}{2f^1} + \lambda_1 u. \quad (28)$$

Підставивши (21), (28) у рівняння (7), одержимо рівняння реакції-дифузії з теореми 1; підставивши (27) в (24) одержимо додаткове рівняння з теореми 1.

Розгляд випадку $\dot{f}^1 = 0$ приводить до рівняння

$$u_0 = \lambda u_{11} + \lambda_1 u \quad (29)$$

і відповідного йому оператора

$$G_1 = \lambda x_0 \partial_1 - \frac{1}{2} x_1 u \partial_u. \quad (30)$$

Рівняння (29) та оператор (30) за допомогою перепозначень $u \rightarrow e^{\lambda_1 x_0} u$, $x_0 \rightarrow \frac{1}{\lambda} x_0$ зводяться відповідно до рівняння теплопровідності (8) та оператора Галілея (3) при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$. Таким чином, рівняння (29) класично інваріантне відносно оператора (30).

Розгляд випадку $\dot{M} = 0$ приводить до частинного випадку, який можна отримати з (14).

Теорему доведено.

ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АЛГЕБРИ ГАЛІЛЕЯ БЕЗ ОПЕРАТОРА МАСИ.

Теорема 2. Рівняння (7) умовно інваріантне відносно алгебри Галілея без оператора маси тоді і тільки тоді, коли рівняння (7), оператор (13) та рівняння S_1 набувають вигляду:

$$\begin{aligned} u_0 &= \partial_1 [D_u u_1] + (\lambda_7 D_u - E) u_1 + (\lambda_2 D - \lambda_1 u + \lambda_3) \left(\lambda_5 - \frac{\lambda_4}{D_u} \right), \\ G_2 &= x_0 \partial_1 + \frac{1}{E_u} \partial_u, \\ u_0 + \lambda_1 E_u (u_1)^2 + E u_1 + \frac{\lambda_4}{E_u} &= 0, \quad \frac{1}{E_u} = \frac{\lambda_2 D - \lambda_1 u + \lambda_3}{D_u}. \end{aligned} \quad (31)$$

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведення теореми 1.

Зауваження 1. При розгляді випадку $\dot{f}^1 = 0, \dot{M} = 0$ одержуємо рівняння і оператор, які замінами зводяться до рівняння Бюргерса (9) та оператора Галілея (4) при $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$.

Зауваження 2. Випадок $\dot{f}^1 = 0, \dot{M} = 0$ приводить до рівняння і оператора Лі наведених в роботі [8] (див. таблиця 1, випадок 3). Виконавши заміни наведені в роботі [10], одержимо рівняння (10) і оператора Галілея (4) при $\alpha_i = -1, \beta_i = 0$.

ВИСНОВКИ. У статті знайдено рівняння вигляду (7), які разом з додатковою умовою інваріантні відносно алгебри Галілея без оператора маси, а також з оператором маси. Оскільки отримані рівняння задовольняють принципу відносності Галілея, то вони можуть описувати реальні природні процеси. Так, наприклад, додаткове рівняння з теореми 1 має вигляд

$$u_0 + \frac{1}{2M(u)} (u_1)^2 + \lambda M(u) = 0.$$

Це рівняння Гамільтона-Якобі, яке широко застосовується в класичній механіці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М., 1967.
2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М., 1978.
3. Фушич В. И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246, № 4. – С. 846–850.
4. Фушич В. И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Ин-т математики АН УССР. – 1987.
5. Фушич В. И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // УМЖ. – 1991. – Т. 43, № 11. – С. 1456–1470.
6. Фушич В. И., Серов Н. И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – Т. А, № 7. – С. 24–27.
7. Baikov V., Gazizov R., Ibragimov N., Kovalev V. Water redistribution in irrigated soil profiles: Invariant solutions of the governing equation // Nonlinear Dynamics. – 1997. – Vol. 13. – P. 395–409.
8. Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // European J. Appl. Math. – 1998. – Vol. 9, № 5. – P. 527–542.
9. Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term II // Euro. J. Appl. Math. – 2006. – Vol. 17. – P. 597–605.
10. Cherniha R., Serov M., Rassokha I. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 342, № 2. – P. 1363–1379.
11. Dorodnitsyn V. A. On invariant solutions of non-linear heat conduction with a source // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1982. – Vol. 22. – P. 115–122.
12. Fushchych W. I., Shtelen W. M., Serov M. I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. – Dordrecht, 1993.
13. Fushchych W., Tsyfra I. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – Vol. 20. – P. 45–47.
14. Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion // Nonlinear Analysis. – 1999. – Vol. 37. – P. 635–675.
15. Katkov V. L. The group classification of solutions of the hopf equations // Zhur. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. – 1965. – Vol. 6. – P. 105–106.
16. Lie S. über integration durch bestimte integrale von einer klasse lineare partiellen differentialgleichungen // Arch. Math. (Leipzig). – 1881. – Vol. 6. – P. 328–368.
17. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 118. – P. 172–176.
18. Ovsiannikov L. V. The Group Analysis of Differential Equations. – New York, 1982.

Стаття надійшла до редколегії 03.05.15

Pliukhin O., PhD
Poltava National Yuri Kondrayuk Technical University, Poltava

CONDITIONAL INVARIANCE OF (1+1)-DIMENSIONAL REACTION-DIFFUSION-CONVECTION EQUATION WITH RESPECT TO GALILEAN ALGEBRAS

All reaction-diffusion-convection equations of (1+1) dimension, that are invariant under Galilean algebras (with mass and without mass operator) are found.

Плюхин А., канд. физ.-мат. наук, ст.преподаватель
ПолтНТУ им. Ю. Кондратюка, Полтава

УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ (1+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ

Найдено все уравнения реакции-диффузии-конвекции размерности (1+1), которые являются условно инвариантными относительно алгебры Галилея без оператора массы, и алгебры Галилея с оператором массы

УДК 517.9:519.46

М. Єсров, д-р.фіз.-мат. наук, О. Омелян, канд. фіз.-мат. наук
ПолтНТУ ім. Ю. Кондратюка, Полтава
e-mail: k26@pntu.edu.ua

ГАЛІЛЕЇВСЬКА ІНВАРІАНТНІСТЬ N-ВИМІРНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Шляхом застосування класичного алгоритму Лі та методу оберненої групової класифікації досліджено галілеївську інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії з n просторовими змінними.

ВСТУП. Задача класифікації симетричних властивостей рівняння

$$u_t = \partial_x [f(u)u_x] + g(u), \quad (1)$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ – довільна гладка функція, повністю розв'язана у статті [10], з результатів якої, зокрема, випливає, що при $f(u) \neq const$ рівняння (1) неінваріантне відносно алгебри Галілея.

У досліджено Галілеївську інваріантність одновимірної системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії вигляду:

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x] + G(U), \quad (2)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції.

Зауваження 1. Тут і скрізь нижче індекси біля функцій та сталих будемо змінювати наступним чином: $a, b, c, d = \overline{1, 2}$, $i, j, k, l = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{0, n}$. Індекс біля функції вгорі означає номер функції, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною. За індексами, що повторюються, розуміється підсумовування.

При $F(U) = const$ симетричні властивості системи (2) досліджено в [7], [8], [9], [11], [12], [13], [14].

У даній статті ми розглянемо багатовимірну систему рівнянь реакції-дифузії вигляду:

$$U_0 = \vec{\nabla} [F(U)\vec{\nabla}U] + G(U), \quad (3)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(x_0, \vec{x})$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in R^n$.

Система рівнянь вигляду (3) широко застосовується для описання багатьох фізичних, хімічних процесів та явищ живої природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії. Зокрема, для опису процесу горіння плазми, а в живій природі – для опису конкуренції тварин на певній території [5]. Для систем рівнянь реакції-дифузії характерно, що матриця функцій f задовольняє властивість

$$\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle \neq 0, \quad \text{де } \langle 1 \rangle = f^{11} + f^{22}, \langle 2 \rangle = f^{11} \cdot f^{22} - f^{12} \cdot f^{21}. \quad (4)$$

Повне дослідження симетричних властивостей системи (3) пов'язано із значними складнощами, у зв'язку з тим, що вона містить шість довільних функцій від двох незалежних змінних. Тому ми поставимо задачу дослідити, при яких нелінійностях дана система інваріантна відносно лінійного зображення алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проєктивних перетворень.

СИСТЕМА ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ОСНОВНА АЛГЕБРА ІНВАРІАНТНОСТІ.

Лема 1. Основною алгеброю інваріантності системи рівнянь реакції-дифузії (3) є наступна алгебра диференціальних операторів

$$\langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, J_{ij} = x_j \partial_i - x_i \partial_j \rangle. \quad (5)$$

Доведення. Доведення теореми проводимо на основі алгоритму Лі (див. [2], [3], [4], [6]).

Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (3) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu(x_0, \vec{x}, \vec{u}) \partial_\mu + \eta^a(x_0, \vec{x}, \vec{u}) \partial_{u^a}, \quad (6)$$

де $\vec{u} = \{u^1, u^2\}$. Застосувавши до системи (3) при умові (4) алгоритм Лі, одержимо наступну систему визначальних рівнянь відносно координат ξ^μ, η^a оператора (6) та функцій f^{ab} та g^a :

$$\eta_{u^b u^c}^a = \xi_{u^a}^\mu = \xi_i^0 = 0, \quad \xi_j^i + \xi_i^j = 2\delta_{ij} \xi_1^1, \quad (7)$$

$$\eta^c f_{u^c}^{ab} + (\xi_0^0 - 2\xi_1^1) f^{ab} + \eta_{u^b}^c f^{ac} - \eta_{u^c}^a f^{cb} = 0, \quad (8)$$

$$\eta_i^b (f_{u^c}^{ab} + f_{u^b}^{ac}) + 2\eta_{u^c}^b f^{ab} - \Delta \xi^i f^{ac} + \delta_{ac} \xi_0^i = 0, \quad (9)$$

$$\eta^b g_{u^b}^a - (\eta_{u^b}^a - \delta_{ab} \xi_0^0) g^b + \Delta \eta^b f^{ab} - \eta_0^a = 0, \quad (10)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Загальним розв'язком системи рівнянь (7) є наступні функції

$$\xi_0^0 = \xi^0(x_0), \quad \xi^a = \xi^a(x_0, \vec{x}), \quad \eta^a = \alpha^{ab}(x_0, \vec{x}) \cdot u^b + \beta^a(x_0, \vec{x}), \quad (11)$$

де $\xi^0, \xi^i, \alpha^{ab}, \beta^a$ – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Щоб встановити основну алгебру інваріантності системи (3) розв'яжемо систему рівнянь (8), (9), (10), вважаючи в ній функції $f^{ab}(\vec{u})$ та $g^a(\vec{u})$ довільними. У результаті цього одержуємо наступні координати інфінітезимального оператора X :

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^i = c_{ij}x_j + d_i, \quad \eta^a = 0,$$

де $c_{ij} = -c_{ji}$, d_0, d_i – довільні сталі. Оператор (6) з наведеними вище координатами породжує основну алгебру (5) системи (3). *Теорему доведено.*

З теореми 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 1. Якщо система (3) інваріантна відносно оператора (6), то він має вигляд

$$X = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^i(x_0, \vec{x})\partial_i + [\alpha^{ab}(x_0, \vec{x}) \cdot u^b + \beta^a(x_0, \vec{x})]\partial_{u^a}.$$

Далі зосередимо увагу на встановленні систем реакції-дифузії, інваріантних відносно алгебр Галілея.

ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ. Під **алгеброю Галілея** в даній статті розумітимемо алгебру лінійних диференціальних операторів

$$AG(1, n) = \langle T, X_i, Y_{ij}, Z_i, M \rangle, \tag{12}$$

які задовольняють наступні комутаційні співвідношення:

$$[T, X_i] = 0, \quad [T, Y_{ij}] = 0, \quad [X_i, X_j] = 0, \quad [X_k, Y_{ij}] = \delta_{jk}X_i - \delta_{ik}X_j, \tag{13}$$

$$[Y_{ij}, Y_{kl}] = \delta_{ik}Y_{jl} - \delta_{jk}Y_{il} + \delta_{jl}Y_{ik} - \delta_{il}Y_{jk},$$

$$[T, Z_i] = X_i, \quad [T, M] = 0, \quad [X_j, Z_i] = \delta_{ij}M, \quad [X_i, M] = 0, \tag{14}$$

$$[Y_{ij}, Z_k] = \delta_{ik}Z_j - \delta_{jk}Z_i, \quad [Y_{ij}, M] = 0, \quad [Z_i, Z_j] = 0, \quad [Z_i, M] = 0.$$

Встановимо зображення операторів алгебри $AG(1, n)$, відносно якої може бути інваріантна система (3).

Враховуючи вигляд основної алгебри інваріантності (5), з формул (11), (13), (14) випливає наступний найбільш загальний вигляд операторів T, X_i, Y_{ij}, Z_i, M :

$$\begin{aligned} T &= \partial_0, \quad X_i = \partial_i, \quad Y_{ij} = J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j, \\ Z_i &= G_i = A^i(x_0)\partial_0 + B^{ij}(x_0, \vec{x})\partial_j + [m^{ibc}(x_0, \vec{x})u^c + n^{ib}(x_0, \vec{x})]\partial_{u^b}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$M = Q_0 = a(x_0)\partial_0 + b^i(x_0, \vec{x})\partial_i + [\alpha^{ab}(x_0, \vec{x})u^b + \beta^a(x_0, \vec{x})]\partial_{u^a},$$

де $A^i(x_0), B^{ij}(x_0, \vec{x}), a(x_0), b^i(x_0, \vec{x}), m^{ibc}(x_0, \vec{x}), n^{ib}(x_0, \vec{x}), \alpha^{ab}(x_0, \vec{x}), \beta^a(x_0, \vec{x})$ – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Для того, щоб оператори (15) утворювали алгебру Галілея, необхідно, щоб вони задовольняли комутаційні співвідношення (14), з яких отримуємо:

$$\begin{aligned} [T, Z_i] &= A^i\partial_0 + B_0^{ij}\partial_j + (m_0^{ibc}u^c + n_0^{ib})\partial_{u^b} = \partial_i, \\ [T, M] &= a\partial_0 + b_0^i\partial_i + (\alpha_0^{ab}u^b + \beta_0^a)\partial_{u^a} = 0, \quad [X_j, M] = b_j^i\partial_i + (\alpha_j^{ab}u^b + \beta_j^a)\partial_{u^a} = 0, \\ [X_j, Z_i] &= B_j^{ik}\partial_k + (m_j^{ibc}u^c + n_j^{ib})\partial_{u^b} = \delta_{ij}M, \quad [T, X_i] = [Z_i, M] = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

З перших трьох співвідношень (16) знаходимо функції $A^i, B^{ij}, a, b^i, m^{ibc}, n^{ib}, \alpha^{ab}, \beta^a$:

$$\begin{aligned} a &= d_0, \quad b^i = d_i, \quad A^i = c_i, \quad \alpha^{ab} = \alpha_{ab}, \quad \beta^a = \beta_a, \\ m^{ibc} &= m^{ibc}(\vec{x}), \quad n^{ib} = n^{ib}(\vec{x}), \quad B^{ij} = \delta_{ij}x_0 + B^{ij1}(\vec{x}), \end{aligned} \tag{17}$$

де $d_0, d_i, c_i, \alpha_{ab}, \beta_a$ – довільні сталі.

З формул (17), враховуючи вигляд алгебри (5), за теоремою Лі знаходимо оператор M у вигляді:

$$M = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}. \tag{18}$$

Враховуючи вигляд (18) оператора M , із четвертого співвідношення (16) знаходимо:

$$B^{ij} = \delta_{ij}x_0 + c_{ij}, \quad m^{ibc} = \alpha_{cb}x_i + m_{ibc}, \quad n^{ib} = \beta_b x_i + n_{ib}, \tag{19}$$

де c_{ij}, m_{ibc}, n_{ib} – довільні сталі. З формул (18), (19), враховуючи вигляд основної алгебри інваріантності системи (12), отримуємо уточнений вигляд алгебри Галілея $AG(1, 1)$:

$$AG(1, n) = \langle T = \partial_0, X_i = \partial_i, Y_{ij} = J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j, Z_i = G_i = x_0\partial_i + x_iQ_0 + R_i, M = Q_0 \rangle, \tag{20}$$

де
$$Q_0 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}, \quad R_i = (m_{icb}u^b + n_{ic})\partial_{u^c}, \tag{21}$$

причому, як випливає з останнього комутаційного співвідношення (16),

$$[Q_0, R_i] = 0. \tag{22}$$

Розширеною алгеброю Галілея згідно з [6] назвемо алгебру лінійних диференціальних операторів $AG_1(1, n) = \langle AG(1, n), D \rangle$, що визначається комутаційними співвідношеннями (13), (14) та:

$$[T, D] = 2T, \quad [X_i, D] = X_i, \quad [Y_{ij}, D] = 0, \quad [Z_i, D] = -Z_i, \quad [M, D] = 0. \tag{23}$$

Встановимо зображення операторів алгебри $AG_1(1, n)$, відносно якої може бути інваріантна система (3).

Із визначальних рівнянь (7) випливає, що координати оператора D повинні мати вигляд (11), тобто

$$D = \xi^0(x_0)\partial_0 + \xi^i(x_0, \vec{x})\partial_i + [\gamma^{ab}(x_0, \vec{x})u^b + \delta^a(x_0, \vec{x})]\partial_{u^a}.$$

З першого співвідношення (23) випливає:

$$[\partial_0, D] = \dot{\xi}^0\partial_0 + \xi_0^i(x_0, \vec{x})\partial_i + [\gamma_0^{ab}(x_0, \vec{x})u^b + \delta_0^a(x_0, \vec{x})]\partial_{u^a} = 2\partial_0. \quad (24)$$

З рівняння (24) отримуємо:

$$\xi^0 = 2x_0 + d_0, \quad \xi^i = \xi^i(\vec{x}), \quad \gamma^{ab} = \gamma^{ab}(\vec{x}), \quad \delta^a = \delta^a(\vec{x}). \quad (25)$$

З другого співвідношення (23) маємо:

$$[\partial_j, D] = \xi_j^i\partial_i + [\gamma_j^{ab}(\vec{x})u^b + \delta_j^a(\vec{x})]\partial_{u^i} = \partial_j. \quad (26)$$

З рівнянь (25), (26) одержуємо, що координати оператора D мають вигляд:

$$\xi^0 = 2x_0 + d_0, \quad \xi^i = x_i + d_i, \quad \gamma^{ab} = \gamma_{ab}, \quad \delta^a = \delta_a,$$

де $d_0, d_a, \gamma_{ab}, \delta_a$ – сталі.

Після наведених міркувань, врахувавши вигляд основної алгебри інваріантності (5), знаходимо остаточний вигляд оператора D

$$D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_1, \quad (27)$$

де

$$Q_1 = (\gamma_{ab}u^b + \delta_a)\partial_{u^a}. \quad (28)$$

Обчисливши дужку Лі операторів G_a, D , маємо:

$$[G_i, D] = -x_0\partial_i - x_iQ_0 + x_i[Q_0, Q_1] + [R_i, Q_1] = -G_i + x_i[Q_0, Q_1] + [R_i, Q_1]. \quad (29)$$

Враховуючи четверте комутаційне співвідношення (23), із рівності (29) отримуємо

$$[Q_0, Q_1] = 0, \quad [R_i, Q_1] = 0. \quad (30)$$

Таким чином, в результаті проведених міркувань, стає зрозуміло, що розширена алгебра Галілея $AG_1(1, n)$ системи (3) може мати наступний єдиноможливий вигляд

$$AG_1(1, n) = \langle \partial_0, \partial_i, J_{ij} = x_j\partial_i - x_i\partial_j, G_i = x_0\partial_i + x_iQ_0 + R_i, Q_0, D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_1 \rangle, \quad (31)$$

де Q_0, R_i, Q_1 визначаються формулами (21), (28), причому оператори R_i, Q_0, Q_1 задовольняють комутаційні співвідношення (22), (30).

Узагальненою алгеброю Галілея назвемо алгебру лінійних диференціальних операторів $AG_2(1, n) = \langle AG_1(1, n), \Pi \rangle$, що визначається комутаційними співвідношеннями (13), (14), (23) та наступними:

$$\alpha = -1 + ki, \beta = \lambda_4 + \lambda_3 i, \theta = \arg \psi \quad (32)$$

Встановимо зображення операторів алгебри $AG_2(1, n)$, відносно якої може бути інваріантна система (3).

З наслідку 1 випливає, що оператор Π слід шукати у вигляді

$$\Pi = \tau^0(x_0)\partial_0 + \sigma^i(x_0, \vec{x})\partial_i + [P^{ab}(x_0, \vec{x})u^b + L^a(x_0, \vec{x})]\partial_{u^a}.$$

З першого співвідношення (32) отримуємо: $\dot{\tau}^0 = 2x_0, \quad \sigma^i = x_i, \quad P^{ab} = \gamma_{ab}, \quad L^a = \delta_a$.

Проінтегрувавши останні рівняння за змінною x_0 , одержимо:

$$\tau^0 = x_0^2 + d_0, \quad \sigma^i = x_0x_i + d^i(\vec{x}), \quad P^{ab} = \gamma_{ab}x_0 + \kappa^{ab}(\vec{x}), \quad L^a = \delta_ax_0 + \lambda^a(\vec{x}). \quad (33)$$

З другого співвідношення (32), врахувавши рівності (33), отримуємо

$$d^i(\vec{x}) = 0, \quad \kappa_j^{ab}(\vec{x}) = x_j\alpha_{ab} + m_{jab}, \quad \lambda_j^a(\vec{x}) = x_j\beta_a + n_{ja}. \quad (34)$$

Загальним розв'язком рівнянь (34) є функції

$$d^i(\vec{x}) = d_i, \quad \kappa^{ab} = \alpha_{ab}\frac{x^2}{2} + m_{jab}x_j + p_{ab}, \quad \lambda^a(\vec{x}) = \beta_a\frac{x^2}{2} + n_{ja}x_j + q_a, \quad (35)$$

де $d_i, m_{jab}, n_{ja}, p_{ab}, q_a$ – сталі. Формули (33) при умовах (35) мають вигляд:

$$\tau^0 = x_0^2 + d_0, \quad \sigma^i = x_0x_i + d_i, \quad P^{ab} = \gamma_{ab}x_0 + \alpha_{ab}\frac{x^2}{2} + \delta_{ab}m_{jab}x_j + p_{ab},$$

$$L^a = \delta_ax_0 + \beta_a\frac{x^2}{2} + n_{ja}x_j + q_a.$$

Враховувавши дані формули та вигляд основної алгебри інваріантності (5), можна записати наступний оператор

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_0Q_1 + \frac{x^2}{2}Q_0 + x_iR_i + Q_2,$$

де

$$Q_2 = (p_{ab}u^b + q_a)\partial_{u^a}. \quad (36)$$

Із 3–го та 4–го комутаційних співвідношень (32) отримуємо відповідно наступні умови для уточнення виразу Q_2

$$[Q_0, Q_2] = 0, \quad [Q_1, Q_2] = 2Q_2. \quad (37)$$

Таким чином, в результаті проведених міркувань, стає зрозуміло, що узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1, n)$ системи (3) може мати наступний єдиноможливий вигляд

$$AG_2(1, n) = \langle \partial_0, \partial_i, J_{ij} = x_j \partial_i - x_i \partial_j, G_i = x_0 \partial_i + x_i Q_0 + R_i, Q_0, \quad (38)$$

$$D = 2x_0 \partial_0 + x_i \partial_i + Q_1, \quad \Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_i \partial_i + x_0 Q_1 + \frac{x_i^2}{2} Q_0 + x_i R_i + Q_2 \rangle,$$

з операторами Q_0, Q_1, Q_2, R_i , що мають вигляд (21), (28), (36) і задовольняють комутаційні співвідношення (22), (30) та (37).

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СИСТЕМИ (3). При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу рівнянь. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Лема 2. Лінійні перетворення

$$U = AW + B, \quad (39)$$

де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ – нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – довільні сталі матриці (матриця A не вироджена),

є перетвореннями еквівалентності системи (3).

Лема 2 доводиться безпосередньою підстановкою формул (39) у систему (3).

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИFUZІЇ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ.

Встановимо вигляд нелінійностей $F(U), G(U)$, при яких система (3) інваріантна відносно алгебр Галілея, одержаних нами у першому пункті.

Теорема 1. Система рівнянь реакції-дифузії (3) інваріантна відносно алгебри Галілея (20) тоді й тільки тоді, коли ця алгебра має реалізацію (12), а система (3) з точністю до перетворень (39) еквівалентна одній з таких систем:

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(\omega) \\ u^2 \varphi^2(\omega) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – довільні сталі, причому оператор Q_0 має вигляд

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(\omega) \\ u^2 \varphi^1(\omega) + u^1 \varphi^2(\omega) \end{pmatrix},$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, $\varphi^1(u^2), \varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, λ_1, m – довільні сталі, причому оператор Q_0 має вигляд

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} (I - m u^1 \partial_{u^2});$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(\omega) + u^2 \varphi^2(\omega) \\ -u^1 \varphi^2(\omega) + u^2 \varphi^1(\omega) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

де $\omega = 2k \arctg \frac{u^2}{u^1} + \ln u^2$, $\varphi^1(u^2), \varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, k – довільня стала, причому оператор Q_0 має вигляд

$$Q_0 = -\frac{1}{2(k^2+1)} (kI - J);$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(u^2) \\ \varphi^2(u^2) \end{pmatrix},$$

де $g(u^2), \varphi^1(u^2), \varphi^2(u^2)$ – довільні гладкі функції, причому оператор Q_0 має вигляд $Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}$.

У формулах теореми 1 і надалі I, J – диференціальні оператори вигляду: $I = u^b \partial_{u^b}$, $J = -u^2 \partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2}$.

Доведення. З'ясуємо, при якому вигляді функцій $F(U)$ та $G(U)$, система рівнянь реакції-дифузії (3) є інваріантною відносно алгебри диференціальних операторів (12). Для цього використаємо систему визначальних рівнянь (7), (8), (9), (10) системи (3), попередньо уточнений вигляд алгебри Галілея $AG(1, n)$ (20), (21) та комутаційні властивості (22).

Інфінітезимальним оператором алгебри (20) є оператор

$$X = d_0 \partial_0 + d_i \partial_i + c_{ij} J_{ij} + q_i G_i + k Q_0, \quad (42)$$

координати ξ^μ, η^a якого згідно формул (20), (21), (31) мають вигляд

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^i = q_i x_0 + c_{jl} x_j + d_i, \quad (43)$$

$$\eta^a = (q_i x_i + k)(\alpha_{ab} u^b + \beta_a) + q_i (m_{iab} u^b + n_{ia}),$$

де d_0, d_i, c_{jl}, q_i, k – довільні сталі.

З рівнянь (8), (9), (10), враховуючи формули (43), після розщеплення за змінними x_i отримуємо

$$\begin{aligned}(\alpha_{cd}u^d + \beta_c)f_{uc}^{ab} + \alpha_{cb}f^{ac} - \alpha_{ac}f^{cb} &= 0, \quad (\alpha_{bc}u^c + \beta_b)g_{ub}^a = \alpha_{ab}g^b, \\(\alpha_{bk}u^k + \beta_b)(f_{ub}^{ac} + f_{uc}^{ab}) + 2\alpha_{bc}f^{ab} + \delta_{ac} &= 0, \\(m_{icd}u^d + n_{ic})f_{uc}^{ab} + m_{icb}f^{ac} - m_{iac}f^{cb} &= 0, \quad (m_{ibc}u^c + n_{ib})g_{ub}^a - m_{iab}g^b = 0.\end{aligned}\quad (44)$$

Два останні з рівнянь (44), очевидно, є умовою інваріантності системи (3) відносно оператора

$$R_i = (m_{icb}u^b + n_{ic})\partial_{uc}.$$

Оскільки ми не розглядаємо задачу про знаходження алгебри інваріантності системи (3) більш широкої, ніж (12), (13), то будемо вважати, що $R_i = 0$. У такому випадку координати (43) оператора (42) набувають вигляду

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^i = q_i x_0 + c_{jl}(\delta_{ji}x_l - \delta_{li}x_j) + d_i, \quad \eta^a = (q_i x_i + k)(\alpha_{ab}u^b + \beta_a).\quad (45)$$

З рівнянь (44) та формул (45) випливає, що для того, щоб система (3) була інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1, n)$, функції f^{ab} та g^a повинні задовольняти наступну систему диференціальних рівнянь:

$$M^c f_{uc}^{ab} + \alpha_{cb}f^{ac} - \alpha_{ac}f^{cb} = 0;\quad (46)$$

$$M^c f_{ub}^{ac} + \alpha_{cb}f^{ac} + \alpha_{ac}f^{cb} + \delta_{ab} = 0,\quad (47)$$

$$M^c g_{uc}^a - \alpha_{ac}g^c = 0,\quad (48)$$

де $M^c = \alpha_{cd}u^d + \beta_c$.

В [1] показано, що з точністю до перетворень (39) існує 6 нееквівалентних зображень оператора Q_0 .

Ці зображення задаються наступними матрицями:

$$\begin{aligned}1) \quad \alpha = 0, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad \alpha = m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad 3) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\4) \quad \alpha = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = 0; \quad 5) \quad \alpha = m \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \quad \beta = 0; \quad 6) \quad \alpha = m \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad \beta = 0, \quad k \neq -1,\end{aligned}$$

де $k, m \neq 0$ – довільні сталі. Вказані вище набори матриць α, β назвемо “канонічними”. Зауважимо, що довільний інший набір матриць α, β з точністю до перетворень (39) локально еквівалентний одному з канонічних, причому, не втрачаючи загальності, з точністю до розтягу за змінною x_0 , можна вважати, що $m = 1$. Для встановлення вигляду нелінійностей системи (3) та знаходження відповідних операторів симетрії необхідно далі розв'язати системи (46), (47), (48) для кожного з випадків 1)–6).

Неважко переконатися, що системи рівнянь (46), (47) у випадках 1), 2), 3) несумісні.

Розв'язком системи (46) у випадку 6) є функції

$$f^{11} = \varphi^{11}(\omega), \quad f^{12} = (u^1)^{k+1} \varphi^{12}(\omega), \quad f^{21} = (u^1)^{-(k+1)} \varphi^{21}(\omega), \quad f^{22} = \varphi^{22}(\omega),\quad (49)$$

де $\omega = (u^1)^{-k} u^2$. Підставивши функції (49) у систему рівнянь (47), одержимо:

$$\begin{cases} k\omega[\dot{\varphi}^{11} + k\omega\dot{\varphi}^{12} + (k+1)\varphi^{11}] = -2\varphi^{11} - 1, & \dot{\varphi}^{11} + k\omega\dot{\varphi}^{12} + (k-1)\varphi^{12} = 0, \\ k(k\omega^2\dot{\varphi}^{22} - \omega\dot{\varphi}^{21} + 2\varphi^{21}) = 0, & k\omega\dot{\varphi}^{22} - \dot{\varphi}^{21} = -2k\varphi^{22} - 1.\end{cases}\quad (50)$$

Розв'язавши систему рівнянь (50) для $k \neq 0$, з точністю до перетворень $t \rightarrow -2\lambda_1 x_0$ одержуємо таку матрицю F системи (3)

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{де } \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{k}.$$

При цьому оператор Q_0 алгебри Галілея (12) має вигляд

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2},$$

а матриці α, β мають такий вигляд

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\quad (51)$$

Розв'язавши рівняння (48) за умов (51), знаходимо функції g^a у вигляді

$$g^1 = u^1 \varphi^1(\omega), \quad g^2 = u^2 \varphi^2(\omega),$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, при якому система (3) має вигляд (40).

У випадку, коли $k = 0$, з системи (50) з точністю до перетворень $t \rightarrow -2\lambda_1 x_0$ знаходимо матрицю F :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u'} & g(u^2) \end{pmatrix}, \tag{52}$$

де $\lambda_1 \neq 0$ – довільна стала, $g(u^2)$ – довільна гладка функція. Якщо врахувати рівність (52), то з рівнянь (47) знаходимо, що

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}.$$

Очевидно, що матриці α, β у цьому випадку задаватимуться наступними формулами:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Розв'язавши рівняння (48) за умов (53), отримуємо вигляд функцій g^a

$$g^1 = u^1 \varphi^1(\omega), \quad g^2 = \varphi^2(\omega),$$

де $\omega = u^2$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ – довільні гладкі функції, за якого система (3) має вигляд (41). Для випадків 4), 5) доведена відбувається аналогічно.

Теорему 1 доведено.

Поставимо задачу встановити, при якому вигляді нелінійностей F і G система (3) допускає розширення алгебри (20) оператором діляції вигляду (27).

Теорема 2. Система нелінійних рівнянь вигляду (3) інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея (31) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень (39) еквівалентна одній з наступних систем:

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} \omega^p,$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $p = \frac{2}{k\lambda_1 - m\lambda_2}$, $k\lambda_1 \neq m\lambda_2$, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_1 = ku^1 \partial_{u^1} + mu^2 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1 \end{pmatrix} e^{\frac{u^2}{u^1}},$$

де

$$Q_0 = -\frac{1}{2} I, \quad Q_1 = I - 2u^1 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 - \lambda_4 u^2 \\ \lambda_4 u^1 + \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} e^{\text{arctg} \frac{u^2}{u^1}},$$

де $m \neq 0$, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2} I, \quad Q_1 = \frac{2}{m} J;$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^1 + \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} \cdot e^{k\omega},$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, $m, k \neq 0$ – довільні сталі, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} (I - mu^1 \partial_{u^2}), \quad Q_1 = -\frac{2}{km} I;$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 + \lambda_4 u^2 \\ \lambda_3 u^2 - \lambda_4 u^1 \end{pmatrix} e^{m\omega},$$

де $\omega = 2k \text{arctg} \frac{u^2}{u^1} + \ln u^{-2}$, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2(k^2+1)} (kI - J), \quad Q_1 = (pk - \frac{1}{m})I - pJ,$$

$m, k \neq 0, p$ – довільні сталі;

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} (u^2)^k,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, k, p$ – довільні сталі, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_1 = pu^1 \partial_{u^1} - \frac{2}{k} u^2 \partial_{u^2};$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right],$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ – довільні сталі, $g(u^2)$ – довільна гладка функція, причому $Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}$, $Q_1 = 0$.

Дослідимо тепер, при якому вигляді нелінійностей F і G система (3) допускає розширення алгебри (31) оператором проективних перетворень вигляду (44).

Теорема 3. Система нелінійних рівнянь вигляду (3) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея (38) тоді і тільки тоді, коли вона з точністю до перетворень (39) еквівалентна одній з наступних систем:

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} \omega^p, \quad (54)$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, $p = \frac{4}{n(\lambda_2 - \lambda_1)}$, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_1 = -\frac{n}{2} I, \quad Q_2 = 0;$$

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} \frac{u^2}{u^1}, \quad (55)$$

де $\lambda_3 \neq \lambda_4$, причому $Q_0 = -\frac{1}{2} I$, $Q_1 = \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_4} - \frac{n}{2} \right) I - 2u^2 \partial_{u^2}$, $Q_2 = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_4} u^1 \partial_{u^2}$;

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^1 + \lambda_3 u^2 \end{pmatrix} e^{mn\omega}, \quad (56)$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, причому $Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} (I - m u^1 \partial_{u^2})$, $Q_1 = -\frac{n}{2} I$, $Q_2 = 0$;

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 + \lambda_4 u^2 \\ \lambda_3 u^2 - \lambda_4 u^1 \end{pmatrix} e^{2\omega}, \quad (57)$$

де $\omega = 2k \arctg \frac{u^2}{u^1} + \ln u^2$, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2(k^2+1)} (kI - J), \quad Q_1 = (pk - \frac{n}{2}) I - pJ, \quad Q_2 = 0,$$

де $m, k \neq 0, p$ – довільні сталі;

$$U_0 = \bar{\nabla} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \bar{\nabla} U \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \\ \lambda_4 u^2 \end{pmatrix} (u^2)^{\frac{2}{n}}, \quad (58)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні сталі, причому

$$Q_0 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_1 = -n \left(\frac{1}{2} u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} \right), \quad Q_2 = 0.$$

Зауваження 2. Теорема 2, 3 доводяться аналогічно до теореми 1.

ВИСНОВКИ. Деякі з систем, одержані в теоремі 3, застосовуються для опису конкретних явищ природи. Так, зокрема, якщо у системі (57) змінні u^1, u^2 вважати дійсною та уявною частинами комплексної функції $\psi = u^1 + iu^2$, то одержимо рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$i\psi_0 = \alpha \Delta \psi + \beta (|\psi| e^{k\theta})^{\frac{4}{n}} \psi, \quad (59)$$

де $\alpha = -1 + ki, \beta = \lambda_4 + \lambda_3 i, \theta = \arg \psi$. Рівняння Гінзбурга-Ландау є основним нелінійним рівнянням фізики нерівноважних середовищ і виникає при описі дифузного хаосу і дисипативних структур в гідродинаміці, фізиці лазерів та хімічній кінетиці. Симетрійні властивості одновимірного випадку рівняння Гінзбурга-Ландау вивчались в роботах [11], [12].

При $k = 0$ рівняння (59) є рівнянням Шредінгера, яке використовується для моделювання хвильових процесів в різних розділах фізики.

Системи (54), (55), (56) є n -вимірним узагальненням систем, симетрійні властивості яких досліджені в [7], [8], [9], [12]. Система (58) є n -вимірним узагальненням системи рівнянь хемотаксису, дослідженої в [5].

Оскільки системи, одержані в теоремі 3, володіють широкими симетрійними властивостями, зокрема задовольняють принцип відносності Галілея, то вони претендують на роль математичних моделей конкретних фізичних та біологічних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Глеба А. В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис. канд. фіз.-мат наук: 01.01.03. – Київ., 2003.
2. Ибрагимов Н. Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1967.
3. Ибрагимов Н. Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирск, 1972.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

5. Серов М. І., Омелян О. М. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису. – Полтава: ПолтНТУ, 2012.
6. Фузич В. І., Штельєн В. М., Серов Н. І. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К.: Наук.думка 1989.
7. Cherniha R. M., King J. R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 267–282.
8. Cherniha R. M., King J. R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 7839–7841.
9. Cherniha R. M., King J. R. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A. – 2002. – Vol. 36. – P. 405–425.
10. Dorodnitsyn V. A. On invariant solutions of non-linear heat conduction with a source // USSR Comput. Math. and Math. Phys. – 1982. – Vol. 22. – P. 115–122.
11. Nikitin A. G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2006. – Vol. 324. – P. 615–628.
12. Nikitin A. G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations // Ukrainian Mathematical Bulletin. – 2005. – Vol. 2, № 2. – P. 153–204.
13. Nikitin A. G., Wiltshire R. Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations // Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics: Proc. of the Third Int. Conf., Kiev, 1999. – K., 2000.
14. Nikitin A. G., Wiltshire R. Systems of Reaction Diffusion Equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – Vol. 42. – P. 1667–1688.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.15

Serov M., Full Doctor, Omelyan O., PhD
Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University, Poltava

THE GALILEI INVARIANCE OF THE N-DIMENSIONAL SYSTEM OF NONLINEAR REACTION-DIFFUSION EQUATIONS

With classic Lie method and reverse group classification method the Galilei invariance of the system of nonlinear reaction-diffusion equations from n spatial variables is studied.

Серов Н., д-р.физ.-мат.наук, Омелян А., канд. физ.-мат.наук
ПолтНТУ ім. Ю. Кондратюка, Полтава

ГАЛИЛЕЕВСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ N-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

При помощи классического алгоритма Ли и метода обратной групповой классификации исследована галилеевская инвариантность системы нелинейных уравнений реакции-диффузии с n пространственными переменными.

УДК 517.9

М. Плахотник, канд. фіз.-мат. наук, асист.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: Makar_plakhotnyk@ukr.net

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ГОМЕОМОРФІЗМУ СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ПАРИ ТЕНТОПОДІБНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ІНТЕРВАЛУ В СЕБЕ

Досліджено питання про диференційованість гомеоморфізму, що визначає топологічну спряженість відображення $f(x) = 1 - |2x - 1|$ та унімодального відображення f_v інтервалу $[0, 1]$ в себе, чий графік складається з двох відрізків і яке має максимум в точці v . Побудовано множину, щільну в інтервалі $[0, 1]$, в кожній точці якої похідна спрягаючого гомеоморфізму існує, похідні в усіх точках побудованої множини рівні між собою та залежать лише від знаку виразу $v - 1/2$, але не від конкретного значення v .

ВСТУП. Розглянемо задачу про властивості гомеоморфізму h , котрий задає топологічну спряженість відображень

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 2-2x & \text{при } 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad f_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{v} & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5 \\ \frac{1-x}{1-v} & \text{при } 0,5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

тобто неперервного оборотного відображення h , яке відображає інтервал $[0, 1]$ в себе і задовольняє функціональне рівняння $h(f) = f_v(h)$. Відображення f топологічно спряжене з відображенням f_v для кожного $v \in (0, 1)$, $v \neq 0,5$, причому відповідний спрягаючий гомеоморфізм єдиний (його єдиність впливає з леми 1 нижче)

В одновимірній динаміці широко відомий факт (див, наприклад, [3, стор. 14]) про топологічну спряженість згаданого відображення f та відображення $\tilde{f}(x) = 4x(1-x)$. Відображення \tilde{h} , котре визначає топологічну спряженість відображень f та \tilde{f} , задається формулою $\tilde{h}(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$.

Відмітимо, що топологічна спряженість неперервних відображень інтервалу в себе вивчалась в [4]. В цій роботі описано класи топологічно спряжених відображень, напівгрупа ітерацій яких є скінченною групою.

В [5] вивчалася задача про відображення f та f_v та встановлено, що гомеоморфізм існує, є зростаючим та має похідну, яка дорівнює 0 майже скрізь за мірою Лебега. Також в [5] доведено, що якщо похідна цього гомеоморфізму існує і дорівнює дійсному числу (тобто є скінченною), то вона дорівнює 0. Водночас, згідно теореми Лебега про похідну монотонної функції (див., наприклад, [1, стор. 15]), будь-яка монотонна функція має скінченну похідну скрізь крім, можливо, деякої множини міри 0. В нашій роботі ми уточнимо результат роботи [5] зокрема побудуємо щільну в інтервалі $[0, 1]$ множину, похідні спрягаючого гомеоморфізму в усіх точках якої існують (втім, можливо, дорівнюють нескінченності), рівні між собою та залежать лише від знаку виразу $v - 1/2$, але не від конкретного значення v .

Для довільного $n \geq 1$ позначатимемо n -ту ітерацію відображення f через f^n , тобто $f^n(x) = f(f(\dots f(x)))$.

Це позначення будемо використовувати не лише для відображення f , але і для відображень, позначених іншими літерами.

Будуючи відображення h , ми побудуємо послідовність h_n $n \geq 1$ кусково лінійних відображень, абсциси точок зламів чийх графіків збігаються з множиною $A_n = \left\{ 0, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots, \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, 1 \right\}$. Позначимо B_n $n \geq 1$ множиною точок інтервалу $[0, 1]$ таких, що $f_v^n(B_n) = 0$. Множина A_n збігається з множиною розв'язків рівняння $f^n(x) = 0$. Індукцією можна довести таку лему.

Лема 1. Відображення h встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами A_n та B_n .

Позначимо $\alpha(k; n)$, $\beta(k; n)$, $0 \leq k \leq 2^n$, впорядковані за зростанням елементи множин A_n та B_n . Множини $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$, $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ щільні в інтервалі $[0, 1]$. Це дозволяє означити гомеоморфізм h рівністю $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$.

Послідовність функцій h_n збігається до h рівномірно, бо з монотонності h та щільності множини B випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} (h(x) - h_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 < k \leq 2^n} (\beta(k-1; n) - \beta(k; n))$.

ДОПОМІЖНІ ВЛАСТИВОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ f ТА f_v . Графіки відображень f та f_v складаються з двох відрізків – зростаючого та спадного. Зростаючий відрізок починається в початку координат, а спадний закінчується в точці з координатами $(1, 0)$. Також кожне з відображень має максимум в точці з ординатою 1 та абсциса максимуму відображення f дорівнює $1/2$, а абсциса максимуму відображення f_v дорівнює v . Для кожного $n \geq 1$ ітерації відображень f та f_v влаштовані таким чином: графіки f^n та f_v^n складається з 2^n відрізків, кожен з яких починається на прямій $y = 0$ та закінчується на прямій $y = 1$. Для відображення f^n кутові коефіцієнти цих відрізків дорівнюють $\pm 2^n$, але для відображення f_v^n множина значень кутових коефіцієнтів зазначених відрізків влаштована значно складніше і опис цього потребує ряду додаткових тверджень, які наведемо нижче.

Лема 2. Нехай для деяких чисел $a, b \in [0; 1]$ маємо зростаюче відображення g , графік якого – відрізок прямої, причому $g(a) = 0$, $g(b) = 1$. Тоді графік відображення $s = f_v(g)$ є ламаною, що складається з двох ланок, причому $s(a) = s(b) = 0$, $s(t) = 1$ для $t = a + v(b - a)$.

Доведення. Відображення g має кутовий коефіцієнт $k = 1/(b - a)$. Кутовий коефіцієнт відображення s на лівому проміжку монотонності дорівнює k/v . У цьому разі значення t визначається з умови $s(t) = 1$: $t = a + v/k = a + v(b - a)$.

Лема 3. Нехай для деяких чисел $a, b \in [0, 1]$ маємо спадне відображення g , графік якого – відрізок прямої, причому $g(a) = 1$, $g(b) = 0$. Тоді графік відображення $s = f_v(g)$ є ламаною, що складається з двох ланок, причому $s(a) = s(b) = 0$ та $s(t) = 0$ для $t = b - v(b - a)$.

Доведення. Відображення g має кутовий коефіцієнт $k = 1/(a - b)$. Кутовий коефіцієнт відображення s на правому проміжку монотонності дорівнює k/v . В цьому разі значення t визначається з умови $s(t) = 0$: $t = b + v/k = b - v(b - a)$.

З лем 2 та 3 випливає така властивість:

Наслідок 1. Нехай для деяких чисел $a, b \in [0, 1]$ маємо монотонне відображення g , графік якого – відрізок прямої, причому $g([a, b]) = [0, 1]$. Тоді графік відображення $s = f_v(g)$ є ламаною, що складається з двох ланок, і для значення t , де вона досягає екстремуму, має місце рівність множин $\left\{ \frac{t-a}{b-a}; \frac{b-t}{b-a} \right\} = \{v; 1-v\}$.

ПОБУДОВА ГРАФІКУ ВІДОБРАЖЕНЬ h_n ДЛЯ $n \leq 4$ ТА $v = 3/4$. За означенням, $B_1 = \{0; 1\}$. Далі, $B_2 = B_1 \cup f_{3/4}^{-1}(1) = B_1 \cup \{3/4\}$. Тому графік відображення h_2 складається з двох відрізків та проходить через точки $(0, 0)$, $(1/2, 3/4)$ та $(1, 1)$. Для кожного $n > 1$ графік відображення h_n також проходить через кожну з цих трьох точок. Знайдемо відображення h_3 , виходячи з аналітичних розрахунків та явного запису відображення

$$f_{3/4}(x) = \begin{cases} 4/3x, & \text{при } x \leq 3/4, \\ -4x + 4, & \text{при } x > 3/4. \end{cases}$$

Враховуючи, що $B_2 = B_1 \cup f_{3/4}^{-1}(3/4)$, то двоточкову множину $f_{3/4}^{-1}(3/4)$ знайдемо з рівнянь $4/3x_1 = 3/4$, $-4x_2 + 4 = 3/4$, звідки маємо $x_1 = 9/16$, $x_2 = 13/16$.

Таким чином, $B_3 = \{0; 9/16; 3/4; 13/16; 1\}$, і графік відображення h_3 додатково пройде через такі дві точки: $(1/4, 9/16)$ та $(3/4, 13/16)$. У схожий спосіб можна побудувати відображення h_4 . Побудуємо множину $B_4 = B_3 \cup f_{3/4}^{-1}\{9/16; 13/16\}$. Для цього розв'яжемо рівняння $4/3x_1 = 9/16$, $4/3x_2 = 13/16$, $-4x_3 + 4 = 13/16$,

$-4x_4 + 4 = 9/16$, звідки маємо $x_1 = 27/64$, $x_2 = 39/64$, $x_3 = 51/64$, $x_4 = 53/64$. Тобто $B_4 = \{0; 27/64; 9/16; 39/64; 3/4; 51/64; 13/16; 53/64; 1\}$. Графіки відображень h_2, h_3 та h_4 зображено на рис. 1.

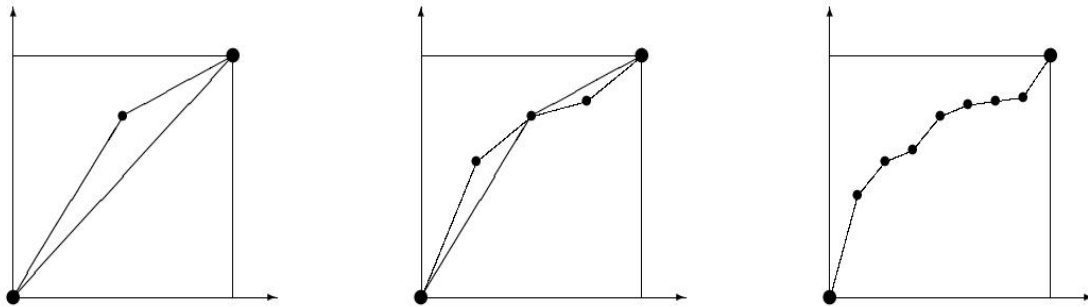


Рис. 1: Графіки відображень h_2, h_3 та h_4

Опишемо властивості графіку відображення h_{n+1} , порівняно з властивостями графіку відображення h_n .

Лема 4. 1. Графік відображення h_n складається з 2^n відрізків. Точки зламу графіку відображення h_n також є точками зламу графіку h_{n+1} .

2. Графік відображення h_{n+1} будується з графіку відображення h_n шляхом додавання по одній точці зламу на кожному інтервалі значень аргументу, на якому графік відображення h_n – відрізок.

3. На першому відрізку, на якому графік відображення h_n є відрізком (тобто на відрізку $[0, 1/2^n]$) точка зламу графіку відображення h_{n+1} додається таким чином, що вона опиняється вище графіку відображення h_n .

Доведення. Частина 1, 2 леми випливають з побудови відображення h_n та є очевидними.

Для доведення частини 3 виконаємо деякі розрахунки. Нагадаємо, що ординати точок зламу відображення h_n є абсцисами прообразів нуля при дії відображення $f_{3/4}^n$. Тому значення відображення $h(2^{-n})$ можна знайти явним чином. $h(2^{-n})$ дорівнює першому додатному екстремуму відображення f_v^{n-1} . Кутовий коефіцієнт відображення f_v^{n-1} на проміжку $[0, 2^{-n+1}]$ дорівнює v^{-n+1} . Тому $h_n(2^{-n}) = v^{n-1}$ та $h_{n+1}(2^{-n-1}) = v^n$. Враховуючи лінійність відображення h_n на проміжку $[0, 2^{-n}]$, маємо, що $h_n(2^{-n-1}) = v^{n-1}/2$. Оскільки в нашому випадку $v = 3/4$, то $v^{n-1}/2 < v^n$, що завершує доведення леми.

Насправді, доводячи частину 3 попередньої леми, ми довели більш загальне твердження, а саме:

Лема 5. Якщо $v > 1/2$, то для кожного $n \geq 1$ виконується нерівність $h_{n+1}(2^{-n-1}) > h_n(2^{-n-1})$, а якщо $v < 1/2$, то для кожного $n \geq 1$ виконується нерівність $h_{n+1}(2^{-n-1}) < h_n(2^{-n-1})$.

Лему 5 можна уточнити, вивчивши зв'язок між кутовими коефіцієнтами відображення h_n та відображення h_{n+1} на одному і тому самому проміжку. Відразу дослідимо загальний випадок, будемо дослідити не відображення $f_{3/4}$, а відображення f_v для довільного $v \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$. Для деякого $t \in [1; 2^{n-1} - 1]$ позначимо $\alpha_1 = \alpha(t; n-1)$, $\alpha_2 = \alpha(t+1; n-1)$ і розглянемо проміжок $[\alpha_1; \alpha_2]$, на якому графік відображення h_n є відрізком прямої, причому кінці цього проміжку є точками зламу відображення h_n . У цьому разі саме цей проміжок буде проміжком монотонності відображення f^{n-1} . Розглянемо два випадки, коли $[\alpha_1, \alpha_2]$ – проміжок зростання та коли це – проміжок спадання функції f^{n-1} .

Лема 6. Нехай $[\alpha_1, \alpha_2]$ – проміжок зростання функції f^{n-1} і на цьому проміжку кутовий коефіцієнт відображення h_n дорівнює k . Тоді кутовий коефіцієнт відображення h_{n+1} на проміжку $[\alpha_1, \alpha_3]$ дорівнює $2kv$, а на проміжку $[\alpha_3, \alpha_2]$ він дорівнює $2k(1-v)$, де $\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Доведення. Позначимо $a = h_n(\alpha_1)$, $b = h_n(\alpha_2)$, $c = h_n(\alpha_3)$. Тоді $k = 2^n(b-a)$. За лемою 2 має місце рівність $c = a + v(b-a)$. На проміжку $[\alpha_1, \alpha_3]$ відображення h_{n+1} має кутовий коефіцієнт $2^{n+1}(c-a) = 2^{n+1}v \cdot k2^{-n} = 2kv$.

Відповідно, на проміжку $[\alpha_3, \alpha_2]$ кутовий коефіцієнт відображення h_{n+1} дорівнює $2^{n+1}(b-c) = 2k(1-v)$.

Лема 7. Нехай $[\alpha_1, \alpha_2]$ – проміжок спадання функції f^{n-1} і на цьому проміжку кутовий коефіцієнт відображення h_n дорівнює k . Тоді кутовий коефіцієнт відображення h_{n+1} на проміжку $[\alpha_1, \alpha_3]$ дорівнює $2k(1-v)$, а на проміжку $[\alpha_3, \alpha_2]$ він дорівнює $2kv$, де $\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

Доведення. Позначимо $a = h_n(\alpha_1)$, $b = h_n(\alpha_2)$, $c = h_n(\alpha_3)$. Тоді $k = 2^n(b-a)$. За лемою 3 має місце рівність $c = b - v(b-a)$. На проміжку $[\alpha_1, \alpha_3]$ відображення h_{n+1} має кутовий коефіцієнт $2^{n+1}(c-a) = 2^{n+1}(b-a)(1-v) = 2^{n+1}(1-v) \cdot k2^{-n} = 2k(1-v)$. Відповідно, на проміжку $[\alpha_3, \alpha_2]$ кутовий коефіцієнт відображення h_{n+1} дорівнює $2^{n+1}(b-c) = 2kv$.

ПОБУДОВА ГРАФІКУ ВІДОБРАЖЕНЬ h_n ДЛЯ $n \leq 4$ ТА $v = 1/4$. Відображення h_1, \dots, h_4 для $v = 1/4$ можна отримати у спосіб, подібний до того, як побудовані такі відображення для $v = 3/4$. Надалі, для того, щоб підкреслити, для якого саме значення v розглядаємо відображення, замість h_i писатимемо $h_{i,v}$. Ці відображення також можна отримати з використанням лем 6 і 7.

Теорема 1. Якщо $\{h_{i,v}\}$, $\{h_{i,1-v}\}$ – відображення, що побудовані за відображеннями f_v, f_{1-v} відповідно, то для кожного $n \geq 2$, і кожних $x_1, x_2 \in A_n$ виконується рівність $h'_{n,v}(x_1)h'_{n,1-v}(x_1) = h'_{n,v}(x_2)h'_{n,1-v}(x_2)$.

Теорему 1 доведемо після того, як розглянемо приклади нижче.

Відображення $f_{1/4}$ можна записати явно наступним чином:

$$f_{1/4}(x) = \begin{cases} 4x, & \text{при } x \leq 1/4; \\ -4/3x + 4/3, & \text{при } x > 1/4. \end{cases}$$

Аналогічно до того, як ми досліджували відображення $f_{3/4}$, для відображення $f_{1/4}$ можна знайти множини B_1, B_2 та B_3 , після чого побудувати графік відображення h_3 . Маємо, $B_1 = \{0; 1\}$; $B_2 = B_1 \cup \{1/4\}$. Тому графік відображення h_2 проходить через точку з координатами $(1/2, 1/4)$. Такого самого висновку ми могли дійти і користуючись лемою 6, для $n=1$, вважаючи відображення h_1 таким, що для кожного $x \in [0; 1]$ виконується рівність $f^0(x) = h_1(x) = x$. При цьому, в позначеннях лем 6, на проміжку $[a, b] = [0, 1]$ відображення $f^{n-1} = f^0$ зростає, а відображення $h_n = h_1$ має кутовий коефіцієнт $k = 1$, $h(0) = 0 = \alpha_1$, $h(1) = 1 = \alpha_2$. Тоді $\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 = 1/2$, також $v = 1/4$. Тоді за лемою 6 маємо, що на проміжку $[0, 1/2]$ кутовий коефіцієнт відображення $h_{n+1} = h_2$ дорівнює $2kv = 1/2$. На відрізьку $[1/2, 1]$ відображення h_2 має кутовий коефіцієнт $2k(1-v) = 3/2$.

Наведені міркування для знаходження відображення h_2 можемо узагальнити у вигляді такої лем.

Лема 8. На проміжку $[0, 1/2]$ кутовий коефіцієнт відображення h_2 дорівнює $2v$, а на проміжку $[1/2, 1]$ кутовий коефіцієнт цього відображення дорівнює $2(1-v)$.

Так само, двома способами можна побудувати відображення h_3 . З одного боку, з системи рівнянь $4x = 1/4$, $-4/3x + 4/3 = 1/4$ отримаємо $B_3 = \{0; 1/16; 1/4; 13/16; 1\}$. З іншого боку, для знаходження h_3 можемо застосувати лем 6 та 7 при $n = 2$.

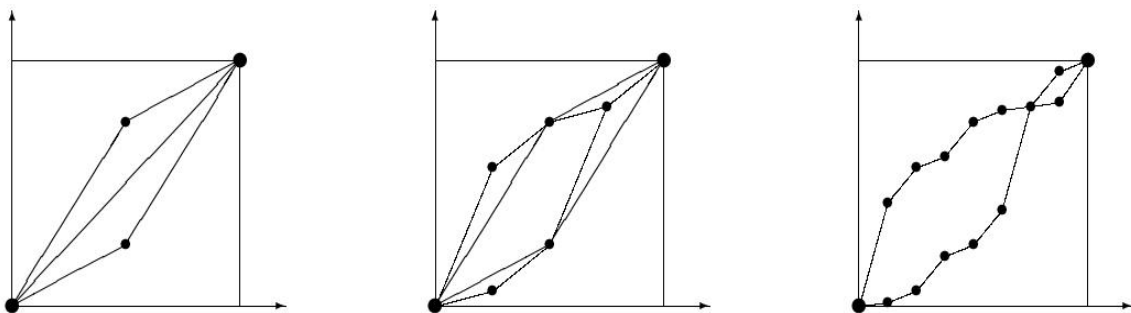


Рис. 2: Графіки відображень $h_{2;1/4}$, $h_{3;1/4}$ та $h_{4;3/4}$

Лема 9. Кутові коефіцієнти відображення h_3 на проміжках вигляду $[t/4; (t+1)/4]$ можна знайти відповідно до таблиці:

$[0, 1/4]$	$4v^2$
$[1/4, 1/2]$	$4v(1-v)$
$[1/2, 1/4]$	$4(1-v)^2$
$[1/4, 1]$	$4v(1-v)$

Доведення. Розглянемо лему 6 для $n = 2$ коли $[a, b] = [0, 1/2]$. Дійсно, проміжок $[0, 1/2]$ є проміжком зростання функції $f = f^{n-1}$. В термінах леми 8 кутовий коефіцієнт відображення $h_n = h_2$ на проміжку $[a, b]$ дорівнює $k = 2v$. Тоді за лемою 6 кутовий коефіцієнт відображення h_3 на проміжку $[0, 1/4]$ дорівнює $2kv = 4v^2$, а на проміжку $[1/4, 1/2]$ дорівнює $2k(1-v) = 4v(1-v)$. Розглянемо лему 7 для $n = 2$ коли $[a, b] = [1/2, 1]$. Проміжок $[1/2, 1]$ є проміжком спадання функції $f = f^{n-1}$. В термінах леми 8 кутовий коефіцієнт відображення $h_n = h_2$ на проміжку $[a, b]$ дорівнює $k = 2(1-v)$. Тоді за лемою 7 кутовий коефіцієнт відображення h_3 на проміжку $[1/2, 3/4]$ дорівнює $2k(1-v) = 4(1-v)^2$, а на проміжку $[3/4, 1]$ дорівнює $2kv = 4v(1-v)$.

Для побудови h_4 не будемо виписувати множини B_4 , а сформулюємо лему, аналогічну лемі 9.

Лема 10. *Кутові коефіцієнти відображення h_4 на проміжках вигляду $[t/8, (t+1)/8]$ можна знайти відповідно до таблиці:*

$[0, 1/8]$	$8v^3$	$[1/2, 5/8]$	$8v(1-v)^2$
$[1/8, 1/4]$	$8v^2(1-v)$	$[5/8, 3/4]$	$8(1-v)^3$
$[1/4, 3/8]$	$8v(1-v)^2$	$[3/4, 7/8]$	$8v(1-v)^2$
$[3/8, 1/2]$	$8v^2(1-v)$	$[7/8, 1]$	$8v^2(1-v)$

Доведення. З лем 6, 7 випливає таке правило знаходження похідних відображення h_4 за похідними відображення h_3 : для відображення h_3 розглянемо кожен проміжок сталості його похідної. Ці проміжки природно занумеруємо числами від 1 до 4. При побудові відображення h_4 кожен з цих проміжків розпадається на дві частини, причому для проміжків з не парними номерами ми на першій частині кутовий коефіцієнт відображення h_3 домножуємо на $2v$, а на другій – на $2(1-v)$. Водночас, на проміжках з непарними номерами робимо навпаки, тобто спершу множимо кутовий коефіцієнт відображення h_3 на $2(1-v)$, а потім – на $2v$. При цьому, $B_4 = \{0; 1/64; 1/16; 13/64; 1/4; 25/64; 13/16; 61/64; 1\}$. Графіки відображень $h_{2;1/4}, h_{3;1/4}, h_{4;3/4}$ зображено на рис. 2 разом з графіками відображень $h_{2;3/4}, h_{3;3/4}, h_{4;3/4}$ відповідно.

Доведення теореми 1. Аналогічно доведенню лем 8, 9, 10 маємо, що для довільного $n \in N$ і всіх $t \in [0, 2^{n-1} - 1]$ похідна функції $h_{n;v}$ на проміжку $[2^{-n+1}t, 2^{-n+1}(t+1)]$ має вигляд $2^{n-1}v^\alpha(1-v)^\beta$, причому $\alpha + \beta = n - 1$, а числа α, β визначаються числом t (а також числом n), тобто $\alpha = \alpha(n;t;v), \beta = \beta(n;t;v)$.

Якщо перейдемо до $h_{n;1-v}$, то в добутку $2^{n-1}v^\alpha(1-v)^\beta$ кожен з множників v перетвориться в $1-v$ і навпаки – кожен з множників $1-v$ перетвориться в v . Тому $\alpha(n;t;1-v) = \beta(n;t;v)$ та $\beta(n;t;1-v) = \alpha(n;t;v)$. Звідси отримуємо рівності $\alpha(n;t;v) + \alpha(n;t;1-v) = n - 1$, та $\beta(n;t;1-v) + \beta(n;t;v) = n - 1$, з яких випливає, що для довільного $x \in [2^{-n+1}t, 2^{-n+1}(t+1)]$ має місце рівність $h'_{n;v}(x)h'_{n;1-v}(x) = 2^{2n-2}v^{n-1}(1-v)^{n-1}$. Тепер теорема є наслідком довільності вибору t .

УЗАГАЛЬНЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СТОСОВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ВІДОБРАЖЕННЯ h . Вивчимо питання про диференційовність побудованого відображення h . Як зазначено вище, кожне з відображень h_n є кусково лінійним та має $2^n + 1$ точок зламу, враховуючи крайні точки 0 та 1.

Зафіксуємо довільне n та знайдемо границі похідних відображень h_n в точках $\alpha(k;n)$ при $m \rightarrow \infty$.

Лема 11. *При $v > 1/2$ виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(0) = \infty$, а при $v < 1/2$ виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(0) = 0$.*

Доведення. Позначимо через $d(0;n)$ кутовий коефіцієнт відображення h_n на проміжку $[0, \alpha(0;n)]$ та через $d(0;m)$ кутовий коефіцієнт відображення h_m на проміжку $[0, \alpha(0;m)]$ при $m > n$. Тоді за лемою 6 мають місце рівності $d(0;m+1) = 2vd(0;m)$, з якої для кожного $k > 1$ випливає рівність $d(0;m+k) = (2v)^k d(0;m)$. Це завершує доведення леми.

Аналогічно цій, але з використанням леми 7, доводиться така лема:

Лема 12. *При $v > 1/2$ виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(1) = 0$, а при $v < 1/2$ – рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(1) = \infty$.*

Розглянемо довільне число $\alpha(k;n)$ для $k > 0$. Ця точка є точкою зламу h_n та усіх відображень h_m при $m > n$.

Лема 13. *Якщо $v < 1/2$, то для кожного $x \in A \setminus \{0;1\}$ має місце рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(x) = 0$. Якщо $v > 1/2$, то для*

кожного $x \in A \setminus \{0;1\}$ має місце рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(x) = \infty$.

Доведення. Нехай для відображення h_{n+1} кутові коефіцієнти зліва та справа від точки $\alpha(k;n)$ дорівнюють $d(k;n)^-$ та $d(k;n)^+$ відповідно. Зауважимо, що має місце рівність $\alpha(k,n) = \alpha(2k,n+1)$. Точка $\alpha(2k,n+1)$ є одним з прообразів 0 при дії відображення f_v^n . Тому проміжок $[\alpha(2k,n+1); \alpha(2k+1,n+1)]$ є проміжком зростання функції f_v^n . Тому за лемою 6, $d(2k;n+1)^+ = 2vd(k;n)$. Водночас, проміжок $[\alpha(2k-1,n+1); \alpha(2k;n+1)]$ є проміжком спадання функції f_v^n і тому за лемою 7, $d(2k;n+1)^- = 2vd(k;n)$. Продовжуючи міркування за індукцією, можемо отримати рівності $d(2^t k;n+t)^\pm = (2v)^t d(k;n)^\pm$, $t > 1$. Ці рівності доводять лему.

Розглянемо довільну точку $x_0 \in [0;1] \setminus A$ та вивчимо питання про диференційованість функції h в точці x_0 . Це означає, що точка x_0 не є точкою зламу відображення h_n для жодного n . Знайдемо похідну функції h_n в x_0 залежно від n та двійкового розкладу $x_0 = 0, x_1 x_2 \dots x_k \dots$. Для $n=2$ маємо, що $h_2'(x_0) = 2v$ при $x_1 = 0$ та $h_2'(x_0) = 2(1-v)$ при $x_1 = 1$. Згідно лем 6, 7, для $n=3$ похідну $h_3'(x_0)$ можна знайти таким чином: $h_3'(x_0) = 2v \cdot h_2'(x_0)$ при $\overline{x_1 x_2} \in \{00;11\}$, та $h_3'(x_0) = 2(1-v) \cdot h_2'(x_0)$ при $\overline{x_1 x_2} \in \{01;10\}$. Продовжуючи міркування з використанням лем 6, 7, отримуємо, що похідна $h_n'(x_0)$ дорівнює добутку $\prod_{i=1}^n \alpha_i(x_0)$, де для кожного i має місце включення $\alpha_i \in \{2v; 2(1-v)\}$. Встановимо залежність між α_i та двійковим записом числа x_0 . Відрізок $[0, 1]$ складається з 2^{i-1} проміжків, на кожному з яких графік відображення h_i є відрізком прямої. Кожному з цих проміжків умовно можна присвоїти індекс $2v$, або $2(1-v)$, який дорівнюватиме числу α_i у випадку, якщо x_0 належить цьому проміжку. Індеси 2^{i-1} -го проміжку, як послідовність дійсних чисел має наступний вигляд: $2v; 2(1-v); 2(1-v); 2v; \dots$, тобто виписаний блок індесів повторюється $2^{i-1}/4$ разів. Таким чином, можна сформулювати правило побудови α_i за двійковим записом числа x : $\alpha_1 = 1$, цифра α_2 визначена вище, $\alpha_i = 2v$, якщо $\overline{x_{i-1} x_{i-2}} \in \{00;11\}$ та $\alpha_i = 2(1-v)$, якщо $\overline{x_{i-1} x_{i-2}} \in \{01;10\}$. Ці міркування можна узагальнити в такій лемі.

Лема 14. Для кожного $x_0 \in [0, 1]$ границя $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n'(x_0)$ дорівнює добутку $\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, де числа α_i визначено вище, залежить від точки x_0 та того, яка з рівностей виконується: $v > 0,5$, чи $v < 0,5$, але не від конкретного значення v , причому ця границя, якщо існує, то дорівнює або 0, або ∞ .

Доведення. Розглянемо величини $P_n = \prod_{i=1}^n \alpha_n = 2^n v^{a(n)} (1-v)^{b(n)}$, де $a(n)$, $b(n)$ – деякі цілі невід'ємні числа, що визначаються лише числом x_0 , причому $a(n) + b(n) = n$. Оскільки границя $\lim_{i \rightarrow n} P_n$ є нескінченним добутком чисел, які не прямують до одиниці (тобто чисел множини $\{2v, 2(1-v)\}$), то вона, якщо існує, може дорівнювати лише 0 та ∞ . З іншого боку, існування границі $\lim_{i \rightarrow n} P_n$ залежить лише від $a(n)$ та $b(n)$, та того, яка з рівностей виконується: $v > 0,5$, чи $v < 0,5$, але не від конкретного значення v .

Наслідок 2. Якщо $v < 1/2$, то для кожної додатної раціональної точки x_0 інтервалу $(0;1]$ має місце границя $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n'(x_0) = \infty$, а якщо $v > 1/2$, то для кожної додатної раціональної точки x_0 інтервалу $(0;1]$ має місце границя $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n'(x_0) = 0$.

Лема 15. Якщо $v < 1/2$ то для кожного $x_0 \in A \setminus \{0;1\}$ існує похідна $h'(x_0) = \infty$ а якщо $v > 1/2$ то для кожного додатного $x_0 \in A$ існує похідна $h'(x_0) = 0$.

Доведення. Покажемо, що ліва похідна $h'(x_0 - 0)$ існує та дорівнює тому, що стверджується в лемі. Доведення для правої похідної $h'(x_0 + 0)$ цілком аналогічне. Оскільки множини $\{A_n, n > 0\}$ вкладені, то включення $x_0 \in A \setminus \{0;1\}$ означає, що існує таке $n_0 > 0$, що $x_0 \in A_n$ для кожного $n > n_0$. Позначимо α_n для кожного $n > n_0$ найбільший елемент множини A_n , який менший за x_0 . Оскільки множина A_n складається з усіх раціональних чисел, чії знаменники в нескоротному записі є дільниками 2^{n-1} , то $\alpha_n = x_0 - 2^{-n+1}$. З побудови відображень h_n маємо, що для кожного $n > n_0$ виконується рівність $h_n'(x_0 - 0) = \frac{h(x_0) - h(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n}$, бо $h_n(x_0) = h(x_0)$ та $h_n(\alpha_n) = h(\alpha_n)$. З неперервності та монотонності функції h маємо, що для кожного $x \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ виконується подвійна нерівність

$$\frac{h(x_0) - h(\alpha_{n+1})}{x_0 - \alpha_{n+1}} \leq \frac{h(x_0) - h(x)}{x_0 - x} \leq \frac{h(x_0) - h(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n},$$

яку можна переписати як
$$2h'_{n+1}(x_0) \leq \frac{h(x_0) - h(x)}{x_0 - x} \leq \frac{h'_n(x_0)}{2}.$$

Тепер розглянемо довільну зростаючу послідовність чисел x_k , яка прямує до x_0 , і доведемо рівність
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(x_0) - h(x_k)}{x_0 - x_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(x_0 - 0).$$
 Для кожного k існує таке n_k , що $x_k \in (\alpha_{n_k}, \alpha_{n_k+1}]$. Тоді
$$2h'_{n_k+1}(x_0) \leq \frac{h(x_0) - h(x_k)}{x_0 - x_k} \leq \frac{2h'_{n_k}(x_0)}{2}.$$
 Остання подвійна нерівність доводить лему, незалежно від того, яка з рівностей виконується: $\nu > 0,5$, чи $\nu < 0,5$ і, відповідно, чому дорівнює границя $\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(x_0)$.

Зауважимо, що у формулюванні леми 15 під рівністю $h'(x_0) = \infty$ ми, слідуючи [2, розд. 92, 101], розуміємо, що похідна функції дійсного аргументу є границею відношення приросту функції в точці до приросту її аргументу і рівність похідної нескінченності означає, що вказана границя існує та дорівнює нескінченності. Водночас, [5, с. 16], містить твердження 2, згідно з яким похідна гомеоморфізму h дорівнює 0 у всіх точках, де вона існує. Втім, з доведення цього твердження видно, що автори статті [5] під припущенням про існування прохідної розуміють, що похідна існує та скінчена. Так, розглядаючи довільну точку $x \in (0, 1)$, побудовано послідовність чисел k_n , таких що $x \in I_n = [2^{-n}k_n, 2^{-n}(k_n + 1)]$ та числа $p_n = h(2^{-n}(k_n + 1)) - h(2^{-n}k_n)$, після чого стверджується, що якщо похідна $h'(x)$ існує і відмінна від нуля, то $p_{n+1}/p_n \rightarrow 1/2$. Але таке міркування правильне лише в тому разі, коли похідна $h'(x)$ не просто існує і відмінна від 0, але також відмінна від нескінченності.

Аналогічно лемі 15 доводиться наступна лема.

Лема 16. Для кожного $x_0 \in \{0; 1\}$ існує похідна $h'(x_0)$ існує, причому $h'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(x_0)$.

Зауважимо, що по-при те, що похідна відображення h дорівнює 0 майже скрізь за мірою Лебега, при $\nu < 0,5$ доведена нами лема 15 дає, що для кожного x_0 зі щільної в інтервалі $(0, 1)$ множини A похідна $h'(x_0)$ існує і дорівнює нескінченності. Водночас, цей результат не суперечить [5], бо множина A злічenna і її міра Лебега дорівнює 0. Крім того, множина A , в точках якої ми визначили значення похідної гомеоморфізму h , не залежить від ν , а саме значення похідної в кожній конкретній точці множини A не залежить від того, яка з рівностей виконується: $\nu > 0,5$, чи $\nu < 0,5$, але не від конкретного значення ν .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. / Лекции по функциональному анализу М. : Мир, 1979. – 592 с.
2. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального исчисления, том 1. Москва, ФМЛ, 1962, 608 с.
3. Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В., Введение в теорию функциональных уравнений / Киев: Наукова Думка. –1989. –216 с.
4. Fedorenko V., Kyryuchenko V., Plakhotnyk M., Exponent Matrices and Topological Equivalence of Maps // Algebra and Discrete Math. N 4, 2007, pp. 45–58.
5. Joseph D. Skufca, Erik M. Bolt. A concept of homeomorphic defect for defining mostly conjugate dynamical systems // Chaos, 2008 №03118 стр. 1–18.

Стаття надійшла до редколегії 05.01.15

Плахотник М., канд. физ.-мат. наук, ассист.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ГОМЕОМОРФИЗМА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ ТЕНТООБРАЗНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ИНТЕРВАЛА В СЕБЯ

Исследован вопрос о дифференцируемости гомеоморфизма, определяющего топологическую сопряженность отображения $f(x) = 1 - |2x - 1|$ и унимодального отображения f_ν интервала $[0, 1]$ в себя, график которого состоит из двух отрезков и которое имеет максимум в точке ν . Построено множество, плотное в интервале $[0, 1]$, в каждой точке которого производная сопрягающего гомеоморфизма существует, производные во всех точках построенного множества равны между собой и зависят только от знака выражения $\nu - 1/2$, но не от конкретного значения ν .

Plakhotnyk M., PhD in Math., assistant
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

DIFFERENTIABILITY OF THE HOMEOMORPHISM OF CONJUGATENESS FOR THE PAIR OF TENTLIKE INTERVAL ITSELF MAPPINGS

The problem of differentiability for the homeomorphism which determines the topological conjugacy of the mapping $f(x) = 1 - |2x - 1|$ and a unimodal mapping f_ν of interval $[0, 1]$ into itself whose graph consists of two segments and which has a maximum at point ν is studied. It is constructed a set which is dense in $[0, 1]$ such that a derivative of the homeomorphism which defines the conjugacy exists at all points of the constructed set, all these derivatives are equal and depend only on the sign of the expression $\nu - 1/2$, but not on specific value of ν .

УДК 515.162.32

О. Пришляк, д-р фіз.-мат. наук, К. Сердечнюк, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: prishlyak@yahoo.com, katelyogkaya@gmail.com

ТОПОЛОГІЯ ФУНКЦІЙ ВИСОТИ НА ДОПОВНЕННІ ДО ТРИВИМІРНОГО ДИСКА В ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ

Побудовано топологічну класифікацію функцій висоти з кількістю критичних точок не більше шести на доповненні до тривимірного диска у тривимірному просторі та отримано правило, за яким можна визначити напрям поля градієнта функції висоти.

ВСТУП. Топологічні методи проникли майже у всі розділи як математики, так і інших наук: крім геометрії та алгебри вони широко застосовуються у функціональному аналізі, теорії динамічних систем та сучасній математичній фізиці.

Основною задачею топологічних досліджень деяких об'єктів є праці [12], [14], [2], [5], [10] та [7]. М. Морсом фактично було отримано локальну класифікацію функцій з невідродженими критичними точками (функцій Морса). Важливим поняттям, яке використовується у даній статті, є поняття графа Кронрода-Ріба, запропоноване А. С. Кронродом та Г. Рібом, за допомогою якого можна провести класифікацію простих функцій Морса на поверхнях. Детально з цим поняттям можна ознайомитись у [1]. В свою чергу, топологічна класифікація функцій Морса на двовимірних многовидах отримана В. В. Шарко [11], на замкнених тривимірних та чотиривимірних многовидах О. О. Пришляком [8; 9; 13]. З поняттям функції Морса тісно пов'язані m -функції, топологічні властивості яких описані у працях О. О. Пришляка [8] і С. І. Максименка [4], а опис функцій висоти при зануренні поверхні можна знайти у [3].

Метою даної статті є отримання топологічної класифікації функцій Морса на доповненні до тривимірного диску у тривимірному просторі. Розглядається питання про топологічну класифікацію функції висоти на доповненні до тривимірного диску з кількістю критичних точок не більше шести, яким, крім того, відповідають атоми складності один. Крім того, ставиться за мету отримати узагальнення для випадку, коли кількість критичних точок більше шести і отримати правило, за яким можливо визначити напрям поля градієнта функції висоти.

ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ ВИСОТИ НА ДОПОВНЕННІ ДО ТРИВИМІРНОГО ДИСКА В ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ.

Означення 1. Критичною точкою функції $f(x, y, z)$ називається точка $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, для якої виконуються

$$\text{умови: } \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(p_0) = 0.$$

Означення 2. Нехай $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – критична точка функції f . Матриця, вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

називається Гессіаном і позначається $H_f(p_0)$.

Означення 3. Критична точка називається невідродженою, якщо її Гессіан не дорівнює нулю.

Означення 4. Функцією Морса називається гладка функція, всі критичні точки якої невідроджені.

Нехай задано деяку функцію Морса на гладкому двовимірному многовиді. Розглянемо довільну поверхню рівня $f^{-1}(a)$ та її компоненти зв'язності, які будемо називати шарами. Даний многовид розбивається в об'єднання шарів і отримуємо розшарування з особливостями. Ототожнивши кожний шар із точкою й увівши фактор-топологію в просторі шарів, отримаємо деякий простір G , який будемо розглядати як базу розшарування. Для функції Морса такий простір G є графом.

Означення 5. Граф G називається графом Ріба функції Морса на многовиді.

Нехай M – гладкий компактний двовимірний многовид з краєм.

Означення 6. Функція $f: M \rightarrow R$ називається m -функцією, якщо

- усі її критичні точки – невідроджені і не лежать на краї ∂M ,
- обмеження $f|_{\partial M}$ функції f на ∂M є функцією Морса.

Введемо означення сусідніх вершин.

Означення 7. Вершина A валентності 1 і вершина B валентності 3 називаються сусідніми, якщо вони з'єднані ребром і при цьому не існує такої вершини C валентності 1, яка з'єднана ребром з B , що для значень функції f в A, B, C виконуються нерівності: $f(A) < f(C) < f(B)$ або $f(B) < f(C) < f(A)$.

Нехай $A_x(u, v)$ – Ріманова метрика на многовиді M . Виберемо для кожної точки $x \in M$ вектор u так, щоб виконувалось наступне: для довільного вектору l справедлива рівність $A_x(y, l) = (df)_x(l)$, де $(df)_x(l)$ – значення диференціалу функції f у точці x на векторі l .

Означення 8. Отримане поле u називається полем градієнту функції f і позначається $gradf(x)$.

Будемо говорити, що у вершині A зафіксовано знак "+", якщо поле градієнту функції f у вершині A направлено назовні многовиду M і знак "-", якщо всередину многовиду.

Теорема 1. У сусідніх вершинах знаки однакові.

Доведення. Нехай маємо дві сусідні вершини A та B (A валентності 1, B валентності 3).

1) Нехай у вершині A зафіксовано знак "-" і, нехай, $f(A) < f(B)$ (рис. 1).

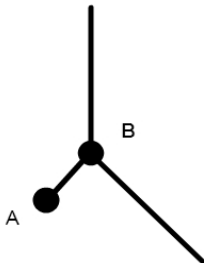


Рис. 1

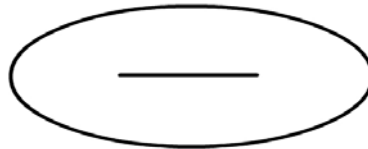


Рис. 2



Рис. 3

Розглянемо, як змінюється поверхня рівня функції при збільшенні значення функції. Проходження вершини A рівносильне вирізанню дірки з поверхні рівня (рис. 2).

Під проходженням вершини тут і надалі буде матись на увазі зміна значення $f^{-1}(a)$, при $a \in (f^{-1}(x_0) - \varepsilon, f^{-1}(x_0) + \varepsilon)$, де $f(x_0)$ – значення функції на відповідному критичному рівні.

Нехай у вершині B зафіксовано знак "+". Тоді, проходження вершини B рівносильне приклеюванню полоски (рис.3).

Скориставшись формулою визначення роду утвореної підмножини [6], бачимо, що приклеювання збільшило рід

досліджуваного об'єкта на один: $g = (0+0) + \frac{1}{2} * (2 + (1+1) - 0 - 2) = 1$. Маємо суперечність. Ця суперечність доводить, що у вершині B знак "-".

У випадку $f(B) < f(A)$, аналогічними міркуваннями показується, що знаки у вершинах A та B співпадають.

2) Зафіксуємо у вершині A знак "+" і, нехай, $f(A) < f(B)$.

Проходження вершини A еквівалентне зображеному на рис. 4.

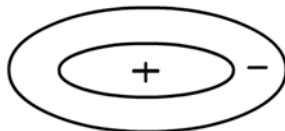


Рис. 4

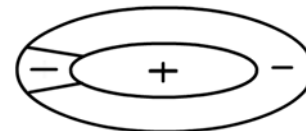


Рис. 5

Якщо B має знак "-", то проходження B рівносильне зображеному на рис. 5.

При цьому, рід фігури зменшився на 1 за формулою [6]: $g = (0+0) + \frac{1}{2} * (0 + (1+1) - 2 - 2) = -1$. Маємо суперечність. Для ситуації, коли $f(B) < f(A)$, доведення аналогічне. Теорему 1 доведено.

ОПЕРАЦІЯ СКОРОЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ТОЧОК. Скорочення сусідніх точок полягає у стягненні ребра у точку.

Тобто, ми "відкидаємо" одну вершину валентності 1 і відповідне ребро, яке з'єднує цю вершину з сусідньою до неї, а з двох інших ребер, що проходили через вершину валентності 3, залишаться одне. Таким чином, отримуємо новий граф, у якого буде на два ребра і на дві вершини менше. Крім того, валентність вершин графа не змінюється і стягнення ребра не впливає на "сусідність" вершин, тобто, вершини, які були сусідніми до стягнення ребра у точку залишаться сусідніми і після стягнення (рис. 6).

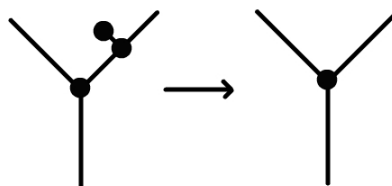


Рис. 6

Наслідок 1. Якщо ми скорочуємо сусідні вершини, то у нового графа знаки в сусідніх вершинах однакові.

Наслідок 2. Розстановка знаків у вершинах валентності 1 визначає знаки у вершинах валентності 3.

Отже, для графа під номером 3) ми отримали всього 24 варіанта: 4 основних (тобто без заворотів всередину тіла), і 10 із заворотами.

Аналогічним чином отримали для графа під номером 4): 9 основних варіантів (табл. 2) і 19 із заворотами (табл. 3).

Таблиця 2

Основні варіанти розстановок вершин для графа 4)

6+	6+	4+	6+	6+	6+	6+	4+	4+
5-	4+	6+	5-	5-	4+	4+	6+	6+
4+	5-	5-	4+	4+	5-	5-	5-	5-
3-	3-	3-	2+	2+	2+	2+	2+	2+
2+	2+	2+	3-	1-	3-	1-	3-	1-
1-	1-	1-	1-	3-	1-	3-	1-	3-

Таблиця 3

Варіанти розстановок вершин із заворотами для графа 4)

6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	6+	4+	4+	6+	6+	6+	6+
5+	5+	5+	5-	5-	4-	5+	5+	4-	5+	4-	4+	4+	6+	6+	5-	4-	5-	4-
3+	4+	4+	3-	4-	5-	3+	4-	5+	4-	5+	5+	5+	5+	5+	4-	5-	4-	5-
4+	3+	2+	4-	3-	3-	4-	3+	3+	2-	2-	3+	2+	3+	2+	2-	2-	2-	2-
2+	2+	3+	2-	2-	2-	2-	2-	2-	3+	3+	2+	3+	2+	3+	3-	3-	1-	1-
1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	1-	3-	3-

А для графа під номером 5) один основний варіант і 3 із заворотами (табл. 4).

Таблиця 4

Варіанти розстановок вершин для графа 5)

6+	6+	6+	6+
5+	5-	5+	5-
4+	4-	4+	4-
3-	3-	3+	3+
2-	2-	2+	2+
1-	1-	1-	1-

ВИСНОВОК. Отримано топологічну класифікацію функції висоти на доповненні до тривимірного диску з кількістю критичних точок не більше шести, яким, крім того, відповідають атоми складності один. Також, зроблено узагальнення на випадок, коли кількість критичних точок більше шести і отримано правило, за яким можливо визначити напрям поля градієнта функції висоти.

Отримані результати можуть бути використані:

- для дослідження функцій на доповненні до тривимірного диску у тривимірному просторі з критичними точками, яким відповідають атоми складності більше, ніж один;
- для топологічної класифікації функцій на доповненні до тривимірного диску у тривимірному просторі з кількістю критичних точок більше шести;
- для класифікації гамільтонових динамічних систем для многовидів з краєм;
- у інших науках, які використовують теорію динамічних систем для побудови математичного апарату: у фізиці, хімії, біології та економіці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Болсинов А. В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет", 1999. – Том.1. – 444 с.
2. Кронрод А. С. О функциях двух переменных / А. С. Кронрод // Успехи мат. наук. – 1950, вып. 5(35). – С. 24–134.
3. Кудрявцева Е. А. Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты / Е.А. Кудрявцева // Матем. сборник. – 1999. – Т.190 (3). – С. 29-88.
4. Максименко С. І. Еквівалентність m -функцій на поверхнях / С. І. Максименко // Некоторые вопр. совр. математики. Ин-т математики НАНУ. – 1998. – Т.25. – С. 128–134.
5. Милнор Дж. Теория Морса / Дж. Милнор. – М.: Мир, 1964. – 184 с.
6. Пришляк О. О., Пришляк К. О., Вятчанинова О. М. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах // Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2010. – №2(101) – с.113–119.
7. Пришляк О. О. Теория Морса: навч. посібник / О. О. Пришляк. – К.: Київський університет, 2002. – 65 с.
8. Пришляк А. О. Эквивалентность m -функций на трехмерных многообразиях с углами // Доклады НАНУ. – 2000. - №6. – С. 22–26
9. Пришляк А. О. Топологические свойства функций на двух- и трехмерных многообразиях. Топологическая классификация функций – PalmariumAcademicPublishing. – 2012. – С. 33–53.
10. Шарко В. В. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты) / В. В. Шарко. – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с.
11. Шарко В. В. Функции на поверхностях I. – К.: Ин-т математики, 1998. – С. 408–434. – (Некоторые вопросы совр. математики) (Труды / Ин-т математики НАН Украины; т.25)
12. Morse M. The calculus of variations in the large – New York, 1934. – 352 pp.
13. Prishlyak A. O. Equivalence of Morse function on 3-manifolds // Methods of Func. Ann. and Topology. – 1999. – Vol. 5, №3. – P. 49–53.
14. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de Pfaff completement integrable ou de une function numerique // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de Academie des Sciences. – 1954. – Vol. 222. – P.847–849

Стаття надійшла до редколегії 29.01.15

**Prishlyak A., Full Doctor, Serdechniuk K., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv**

**TOPOLOGY OF HEIGHT FUNCTIONS IN ADDITION
TO THREE-DIMENSIONAL DISK IN THREE-DIMENSIONAL SPACE**

We constructed the topological classification of height functions with not more than six critical points in addition to the three-dimensional disk in three-dimensional space and stated the rule to determine the direction of the gradient of height function.

Пришляк А., д-р физ.-мат. наук, Сердечнюк К., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ТОПОЛОГІЯ ФУНКЦІЙ ВИСОТИ НА ДОПОЛНЕННІ К ТРЕХМЕРНОМУ ДИСКУ В ТРЕХМЕРНОМУ ПРОСТРАНСТВЕ

Построена топологическая классификация функций высоты с количеством критических точек не более шести на дополнении к трехмерному диску в трехмерном пространстве и получено правило, по которому можно определить направление поля градиента функции высоты.

УДК 512.5; 519.1

М. Зельдич, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: zeldich@mail.ru

ПРО ЦІЛОЧИСЕЛЬНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ФОРМ, АСОЦІЙОВАНИХ ІЗ САГАЙДАКОМ

Наведено просте та елементарне доведення канонічної \mathbb{Z} – еквівалентності двох цілих квадратичних (відповідно, білінійних) форм, природним чином асоційованих зі скінченним графом (сагайдаком) Γ без петель та орієнтованих циклів. Подано застосування цього результату для форм відношення часткового порядку на скінченній множині. Використовуючи розвинену техніку доведення, зазначений вище результат узагальнюється на випадок, коли сагайдак може мати петлі і орієнтовані цикли (наведено короткий начерк такого узагальнення).

ВСТУП. Нехай Γ – сагайдак, тобто орієнтований граф зі скінченною кількістю вершин $\{1, \dots, n\}$ та стрілок, без петель та орієнтованих циклів, λ_{ij} – кількість (орієнтованих) шляхів, що ведуть з вершини i у вершину j (вона скінченна згідно умов на Γ). Тоді з Γ природно зв'язати (несиметричну) білінійну "форму шляхів", або, по іншому, кратно транзитивну форму $\Pi_{\Gamma}(x, y) = \Pi_{\Gamma}(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} x_i y_j$ та відповідну квадратичну "форму шляхів". $\Pi_{\Gamma}(x) = \Pi_{\Gamma}(x_1 \dots x_n) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$ (див., напр., [3, 11]).

З іншого боку, в теорії зображень важливу роль відіграє введена П.Габрієлем квадратична форма Тітса сагайдака Γ ([8], [9]), що визначається як $T_{\Gamma}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \rightarrow j} x_i y_j$ (остання сума береться по усім стрілкам сагайдака Γ). Відповідну їй несиметричну білінійну форму $T_{\Gamma}(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i \rightarrow j} x_i y_j$ природно назвати (несиметричною) формою Тітса сагайдака Γ . Виявляється, має місце наступний дивовижний факт, анонсований в [11].

Теорема 1. Білінійна форма шляхів $\Pi_{\Gamma}(x, y)$ сагайдака Γ є канонічним чином цілочисельно еквівалентною білінійній формі Тітса $T_{\Gamma^0}(x, y)$ сагайдака Γ^0 , що є антиізоморфним (дуальним) сагайдаку Γ , тобто отриманого з Γ шляхом перевороту усіх стрілок Γ .

Наслідок. Квадратична форма шляхів $\Pi_{\Gamma}(x)$ та квадратична форма Тітса $T_{\Gamma}(x)$ сагайдака Γ є канонічно цілочисельно еквівалентними одна одній.

Дійсно, очевидно, $T_{\Gamma^0}(x) = T_{\Gamma}(x)$. Метою цієї замітки є наведення короткого та елементарного доведення цього результату, а також подальше його застосування до інших задач, пов'язаних з цілочисельними квадратичними формами, зокрема, в теорії зображень.

Доведення теореми 1.

Дамо коротке та елементарне доведення теореми 1. Позначимо через a_{ij} кількість стрілок з вершини i у вершину j сагайдака Γ . Тоді для матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ нескладно за індукцією по k перевірити, що її k – ий ступінь $A^k = (a^{(k)}_{ij})_{n \times n}$ складається з компонент (елементів) $a^{(k)}_{ij}$, що дорівнюють кількості орієнтованих шляхів довжини k з вершини i до вершини j ($k = 0, 1, 2, \dots$). Тоді $A^k = 0$ при $k > m$, де $m = m(\Gamma)$ – довжина максимального орієнтованого шляху в Γ (m , очевидно, є скінченним згідно умов на Γ).

Розглянемо матрицю $\Lambda \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^m A^k = E + A + \dots + A^m$, де через E позначено одиничну матрицю порядку n . Тоді елементи λ_{ij} матриці $\Lambda = (\lambda_{ij})_{n \times n}$ визначаються, очевидно, за формулами: $\lambda_{ij} = \sum_{k=0}^m a_{ij}^{(k)}$ і тому кожний такий елемент λ_{ij} є не що інше, як кількість (орієнтованих) шляхів з вершини i у вершину j в сагайдаку $\Gamma(i, j = 1, \dots, n)$. Зауважимо, що традиційно ми тут за означенням вважаємо, що при $k=0$ $A^k = E$ та при $i=j$ $\lambda_{ij} = 1$, тобто існує єдиний орієнтований шлях з будь-якої вершини i сагайдака Γ у ту ж саму вершину $j=i$, а саме так званий "одиначний" шлях довжини 0. Тому Λ є матриця форм шляхів $\Pi_{\Gamma}(x, y)$ та $\Pi_{\Gamma}(x)$ сагайдака Γ .

З іншого боку, як легко бачити, $(E - A)\Lambda = (E - A)\sum_{k=0}^m A^k = (E - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = E$, тобто матриця $E - A$ є неособливою і має обернену матрицю $(E - A)^{-1} = \Lambda$, яка співпадає з матрицею Λ . Звідси маємо: $(E - A^T) = (E - A^T)E = (E - A^T)(E - A)^{-1}(E - A) = (E - A)^T \Lambda (E - A)$, або остаточно: $E - A^T = (E - A)^T \Lambda (E - A)$, де, як зазвичай, індекс T зверху позначає операцію транспонування матриці. Зауважимо тепер, що ліва частина останньої рівності – суть матриця форм Тітса $T_{\Gamma^0}(x, y)$ та $T_{\Gamma^0}(x)$ дуального до Γ сагайдака Γ^0 , а права – отримується з матриці $\Lambda = (\lambda_{ij})_{n \times n}$ форм шляхів $\Pi_{\Gamma}(x, y)$ та $\Pi_{\Gamma}(x)$ вихідного сагайдака Γ за допомогою канонічного перетворення цілочисельної еквівалентності матриць: $\Lambda \rightarrow (E - A)^T \Lambda (E - A)$, що задається неособливою цілочисельною матрицею $E - A$ та індукує відповідну цілочисельну еквівалентність відповідних цим матрицям білінійних та квадратичних форм. Теорема доведена.

Як зауважили проф. Ю. А. Дрозд і проф. В. В. Кириченко, теорема 1 має гомологічну інтерпретацію і відповідне доведення, та допускає узагальнення для сагайдаків із співвідношеннями у випадку скінченної глобальної гомологічної розмірності відповідних (до цих сагайдаків із співвідношеннями) асоціативних алгебр над алгебраїчно замкненим полем (детальніше про це – див. § 3).

Застосування теореми 1.

Нехай тепер (M, \leq) – скінченна частково впорядкована множина (далі – ЧВМ) з елементами

$$\{m_1, m_2, \dots, m_n\} = M, \quad \chi_{ij} = \begin{cases} 1, & m_i \leq m_j \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad \text{– характеристична функція відношення часткового порядку на}$$

M , $\chi(x) = \chi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \chi_M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \chi_{ij} x_i x_j$ – (характеристична) квадратична форма відношення часткового порядку на множині M (яка була введена А. В. Ройтером в роботах [5, 6] у зв'язку з поняттям Р-точної множини). Позначимо також через $\Gamma = \Gamma_M$ сагайдак (або діаграму) Хассе ЧВМ (M, \leq) , тобто сагайдак з вершинами $\{1, 2, \dots, n\}$ (що відповідають елементам m_1, m_2, \dots, m_n ЧВМ (M, \leq)) та стрілками $i \rightarrow j$, які взаємно однозначно відповідають відношенню "безпосереднього порядку" на множині M (m_i безпосередньо менше ніж m_j , якщо $m_i < m_j$ і не існує такого елемента $m \in M$, що $m_i < m < m_j$).

В [1, 2, 3] доведено наступний цікавий факт, який використано як важливу складову частину при доведенні гіпотези Ройтера про Р-точні множини ([6, 4]).

Теорема 2. Якщо сагайдак Хассе $\Gamma = \Gamma_M$ частково впорядкованої множини (M, \leq) не містить обходів (обхідних шляхів), тобто в Γ немає двох різних орієнтованих шляхів з тотожними початками та тотожними кінцями (так що кожний з цих двох шляхів обходить другий), то квадратична форма $X_M(x)$ відношення часткового порядку на множині M є (канонічно) цілочисельно еквівалентною квадратичній формі Тітса $T_{\Gamma}(x)$ сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_M$ цієї ж частково впорядкованої множини (M, \leq) .

Покажемо тепер, як теорема 2 легко випливає з теореми 1, яка, по суті, є її узагальненням. Дійсно, з самого означення сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_M$ частково впорядкованої множини (M, \leq) очевидним чином випливає, що для будь-якої впорядкованої пари (m_i, m_j) елементів з множин M : $m_i \leq m_j$ тоді і тільки тоді, коли в сагайдаку Хассе $\Gamma = \Gamma_M$ існує (орієнтований) шлях з вершини i у вершину j . Але, за умовою теореми 2 (про відсутність обхідних шляхів), цей шлях, якщо він є, може бути лише єдиним. Отже, якщо $\Pi_{\Gamma}(x) = \Pi_{\Gamma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} x_i x_j$ – квадратична форма шляхів сагайдака $\Gamma = \Gamma_M$, де λ_{ij} – кількість шляхів, що ведуть з вершини i у вершину j , то

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1, & m_i \leq m_j \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}. \quad \text{Тобто, іншими словами, } \lambda_{ij} = \chi_{ij} \text{ при всіх } i, j = 1, \dots, n. \text{ Отже, } \Pi_{\Gamma}(x) \equiv \chi_M(x). \text{ А оскі-}$$

льки, згідно наслідку теореми 1, квадратична форма шляхів $\Pi_{\Gamma}(x)$ та квадратична форма Тітса $T_{\Gamma}(x)$ є (канонічно) цілочисельно еквівалентними одна одній, то в кінцевому рахунку ми приходимо до потрібного висновку про (канонічну) цілочисельну еквівалентність між квадратичною формою $\chi_M(x) \equiv \Pi_{\Gamma}(x)$ відношення часткового порядку на множині M та квадратичною формою Тітса $T_{\Gamma}(x)$ сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_M$ ЧВМ (M, \leq) , що й треба було довести. Аналогічні міркування, якщо користуватись не наслідком теореми 1, а самою теоремою 1, доводять, що (несиметрична) білінійна форма $\chi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \chi_{ij} x_i x_j$ відношення часткового порядку на множині M є канонічно цілочисельно еквівалентною (несиметричній) білінійній формі Тітса $T_{\Gamma^0}(x, y)$ сагайдака Γ , дуального (анти ізоморфного) до сагайдака Хассе $\Gamma = \Gamma_M$ частково впорядкованої множини (M, \leq) . Отже, якщо коротко підсумувати, з теореми 1 та її наслідку випливає, що $\chi_M(x, y) \underset{\mathbb{Z}}{\equiv} T_{\Gamma^0}(x, y)$ та $\chi_M(x) \underset{\mathbb{Z}}{\equiv} T_{\Gamma}(x)$, де Γ – сагайдак Хассе частково впорядкованої множини (M, \leq) , Γ^0 – дуальний (антиізоморфний) йому сагайдак, а \mathbb{Z} – еквівалентність $\underset{\mathbb{Z}}{\equiv}$ між білінійною (відповідно, квадратичною) формою відношення часткового порядку $\chi_M(x, y)$ /відповідно, $\chi_M(x)$ / на частково впорядкованій

множині (M, \leq) та білінійною /відповідно, квадратичною/ формою Тітса $T_{\Gamma^0}(x, y)$ /відповідно, $T_{\Gamma^0}(x) \equiv T_{\Gamma}(x)$ / сагайдака Γ^0 , дуального (антиізоморфного) до сагайдака Хассе Γ – є канонічною.

ЗАУВАЖЕННЯ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ. Зауважимо, що комбінаторний результат теореми 1 має гомологічну інтерпретацію в теорії зображень скінченновимірних алгебр і його нескладно можна вивести також з результатів [10], де вперше була введена так звана гомологічна білінійна (та відповідна їй квадратична) форма Ейлера на групі Гротендіка $K_0(A) \cong \mathbb{Z}^n$ скінченновимірної асоціативної алгебри A (скінченної глобальної гомологічної розмірності над алгебраїчно замкненим полем k), а також з результатів Бонгартца, який в [7], зокрема, довів, що у випадку, коли сагайдак Габріеля $\Gamma = \Gamma(A)$ алгебри A (кількість вершин якого співпадає з рангом n вільної абелевої групи $K_0(A) \cong \mathbb{Z}^n$, тобто з кількістю n класів ізоморфізму простих скінченновимірних A -модулів) не містить орієнтованих циклів, а також $gl\dim_k A \leq 2$ (зокрема, якщо сагайдак Γ є вільним від співвідношень між різними орієнтованими шляхами, тобто коли $gl\dim_k A = 1$), білінійна (відповідно, квадратична) форма Ейлера алгебри A збігається з білінійною (відповідно, квадратичною) формою Тітса сагайдака Габріеля $\Gamma = \Gamma(A)$ алгебри A .

Втім, для комбінаторного лінійно-алгебраїчного результату, який елементарно формулюється, також природно мати і відповідне елементарне комбінаторне лінійно-алгебраїчне доведення, яке не використовує потужний апарат гомологічної алгебри та сучасні результати теорії зображень (Габріеля, Рінгеля, Бонгартца). Саме таким є отримане автором (цієї статті) доведення теореми про цілочисельну еквівалентність двох форм, асоційованих із сагайдаком і тому воно становить самостійний інтерес з точки зору природності і суттєвого спрощення доведення та відповідності використаних в ньому засобів елементарності формулювання самої теореми. Більш того, як виявляється, використання цілком елементарної техніки, розвиненої в цьому комбінаторному доведенні, дозволяє узагальнити теорему 1 про цілочисельну еквівалентність також на випадок, коли сагайдак Γ має орієнтовані цикли (зокрема, і петлі). В цьому випадку, як встановлено автором, має місце природне узагальнення теореми 1 (див. [12]), яке полягає в тому, що над кільцем $\mathbb{Z}[[h]]$ формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами існує канонічна $\mathbb{Z}[[h]]$ -еквівалентність між відповідними цим двом формам (Тітса та шляхів) їхніми природними $\mathbb{Z}[[h]]$ -деформаціями (квантуваннями), узгодженими зі стандартним градуванням вільної категорії $k\Gamma$ над полем k , породженої сагайдаком Γ (об'єктами $k\Gamma$ є вершини Γ , морфізмами – орієнтовані шляхи з градуванням по ступенях шляхів).

При цьому, у випадку, коли сагайдак Габріеля $\Gamma = \Gamma(A)$ не містить орієнтованих циклів (у тому числі і петель), при граничному переході $h \rightarrow 1$, побудована у вищезазначеному узагальненні канонічна $\mathbb{Z}[[h]]$ -еквівалентність між відповідними сагайдаку Γ вищезазначеними природними демоформаціями (квантуваннями) форм Тітса та шляхів збігається з раніш встановленою згідно теореми 1 канонічною \mathbb{Z} -еквівалентністю між звичайними формами Тітса та шляхів, відповідними сагайдаку Γ (як щодо квадратичних так і щодо несиметричних білінійних форм – в останньому випадку також з аналогічною до теореми 1 заміною сагайдака Γ на двоїстий до нього сагайдак Γ^0). Більш детальний виклад формулювання цього узагальнення та його доведення автор планує подати у своїй статті у наступному номері журналу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Зельдич М. В. Про характеристичні форми частково впорядкованих множин з однозв'язним графом Хассе / Вісник Київського університету – серія: фізико-математичні науки – 2001 – № 4 – С. 36–44.
2. Зельдич М. В. О формах отношений частичного порядка на конечном множестве: Праці Українського математичного конгресу, 2001, Секція 1 Алгебра і теорія чисел – С. 62–70.
3. Зельдич М. В. О характеристических и кратно транзитивных формах частично упорядоченных множеств: препринт: Зельдич М. В. р-точные частично упорядоченные множества и характеристические формы: КНУ им. Т. Шевченко, издательский дом "Академперіодика" НАН Украины – Киев – 2002 – С. 3–14.
4. Зельдич М. В. О р-точных (Р-точных) частично упорядоченных множествах: препринт: Зельдич М. В. р-точные частично упорядоченные множества и характеристические формы: КНУ им. Т. Шевченко, издательский дом "Академперіодика" НАН Украины – Киев – 2002 – С. 15–68.
5. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления и формы слабо пополненных частично упорядоченных множеств: Линейная алгебра и теория представлений: Киев – Ин-т математики АН УССР – 1983. – С. 19–54.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Норма отношений, разделяющие функции и представления маркированных колчанов / Украинский математический журнал. – 2002. – 54, № 6. – С. 808-841.
7. Bongartz K.: Algebras and quadratic forms. / J. London math. Soc. 28, 1983, P. 461–469.
8. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I / Manuscripta Math. – 1972 – 6 – P. 71–103.
9. Gabriel P. Representations indecomposables: Seminaire Bourbaki, 1973–1974, Lecture Notes in Mathematics, 431 Springer, Berlin – 1975 – P. 143–170.
10. Ringel C. M.: Representation of K–Species and Bimodules / Journal of Algebra 41 – 1976 – no. 2 – P. 269–302.
11. Zeldich M. V.: On paths form and Tits form for a quiver: 4th International Algebraic Conference in Ukraine, August 4–9, 2003 – Lviv, Abstracts – 243 p.
12. Zeldich M. V.: On equivalence of two forms associated with a quiver: 9th International algebraic conference in Ukraine, July 8–13, 2013 – L'viv, Ukraine – Book of abstracts – 226 p.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.15

Zeldich M., PhD

Taras Shevchenko National university of Kyiv

ON INTEGER EQUIVALENCE OF TWO FORMS ASSOCIATED WITH A QUIVER

A simple and elementary proof for canonical \mathbb{Z} – equivalence of two integer unit quadratic (respectively, bilinear) forms, naturally associated with a finite graph (quiver) Γ without loops and oriented cycles was done. Some application of this result for quadratic (respectively, bilinear) forms of partial ordered relations on finite set are presented. Using a technique, developed for the proving, the result mentioned above, is generalized in the case when a quiver Γ contains some loops or /and oriented cycles (a brief sketch of this generalization is presented).

Зельдич М., канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ФОРМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОЛЧАНОМ.

Приведено простое и элементарное доказательство канонической \mathbb{Z} – эквивалентности двух целых квадратичных (соответственно, билинейных) форм, естественным образом ассоциированных с конечным графом (колчаном) Γ без петель и ориентированных циклов. Дано применение этого результата для форм отношения частичного порядка на конечном множестве. Используя развитую технику доказательства, указанный выше результат обобщается на случай, когда колчан может иметь петли и/или ориентированные циклы (приведен краткий набросок такого обобщения).

УДК 539.3

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук
Національний транспортний університет, Київ
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

ПЛОСКА ЗАДАЧА ПРО УДАР ЖОРСТКОГО ЦИЛИНДРА ПО ПРУЖНОМУ ШАРУ

Досліджується плоска задача пружного співудару абсолютно жорсткого циліндру з пружним шаром. Розглядається контактна задача з динамічно змінною областю контакту, при цьому враховується підйом середовища. Задача зводиться перетворенням Лапласа і методом розв'язання в ряд за власними функціями до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду, яка чисельно реалізується методом редукції та механічних квадратур. Визначені кількісні динамічні та кінематичні характеристики, що описують процес співудару у залежності від значення початкової швидкості удару і параметрів шару.

ВСТУП. Задачі удару жорстких тіл по деформівних тілах та їхнього співудару залишаються актуальними і досліджуються у різних постановках. Один із найважливіших напрямків таких досліджень є виявлення особливостей руйнування надрізаних балкових зразків при їхньому руйнуванні на триточковий згин за допомогою ударника. Відповідні експерименти дають можливість визначити вкрай необхідну механіці руйнування характеристику матеріалу – в'язкість його руйнування, пов'язану із коефіцієнтом інтенсивності напружень у вістрі тріщини. Оскільки процес є динамічним і може супроводжуватися значними пластичними деформаціями, то його вивчення є складною та багатопланою задачею, яка вимагає аналізу впливу ударника на випробовуване тіло, динамічної взаємодії тіла із опорами, а також процесу початку руйнування та його розвитку. Тема ця надзвичайно широка і пов'язана із численними публікаціями, з масиву яких для цієї публікації вибрано лише достатній мінімум.

У її основу окладаються задачі нестационарної [1–9] ударної взаємодії абсолютно жорсткого плоского ударника з надрізаним у серединному перерізі балковим зразком у динамічній пружно-пластичній постановці. У праці [10] розв'язано відповідну до [1] тривимірну квазістатичну задачу у пружно-пластичній постановці і при цьому виявлено, що напруження значно відрізняються від напружень, отриманих з розв'язку аналогічної задачі у динамічній пружно-пластичній постановці. У публікації [2] розв'язується задача визначення напружень і граничного стану за плоского деформованого стану від триточкового згину балкового зразка з крайовим надрізом. У роботі [3] розв'язується аналогічна задача плоского напруженого стану за критеріальної умови про початок підростання тріщини у момент переміщення розрахованого максимуму напружень від місця безпосереднього продовження вістря тріщини на певну відстань від нього з тим, щоб забезпечити існування максимуму безпосередньо на продовженні вістря тріщини. В публікаціях [4, 6] розв'язано плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого станів з тріщиною, підростання якої контролюється узагальненим локальним $\sigma_{\theta\theta}$ -критерієм крихкого руйнування. У публікаціях [5, 7] в'язкість руйнування матеріалу визначалася відповідно на основі дослідження розв'язків плоского деформованого стану і просторової задач у припущенні, що тріщина нерухома. Запропоновані моделі дали можливість у своєму розвитку значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У роботі [23] виявлено, що кількісні характеристики необхідних умов утворення холодних (крихких) тріщин при зварюванні низьколегованих високоміцних сталей проявляються достатньо чітко при використанні імовірнісної моделі крихкого руйнування з функцією розподілу Вейбула, параметри якого в загальному випадку залежать від мікроструктури матеріалу і проценту дифузного водню, що міститься у метали. При цьому не згадано про математичну модель і задачу, з якої визначені напруження, використані у співвідношеннях розподілу Вейбула. Це свідчить, що імовірнісний підхід достатньо універсальний та продуктивний, однак зрозуміло, що якщо використовувати більш точну динамічну пружно-пластичну постановку, то отриманий результат буде більш вірогідним. Саме тому у роботах [8, 9] було досліджено тривимірний процес підростання тріщини з прямолінійним фронтом за умови зсуву максимальних напружень від вістря тріщини і локального критерію крихкого руйнування відповідно.

У публікаціях [28–31] запропоновано підхід вивчення динамічного розвитку тріщини у дослідних зразках, який базується на методі Релея. Його суть полягає в моделюванні перебігу динамічних процесів у балці-зразку. Це створює можливість замінити динамічну модель квазістатичною. У [28–30] рух балки описується у вигляді суперпозиції вібраційних мод. Для досягнення більшої точності моделі враховується також кривина поверхні ударника і опор. За такою методикою визначається динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень (ДКІН). У [31] запропонована експериментально-розрахункова методика визначення ДКІН K_1 . Експериментально визначалися навантаження і час руйнування коротких компактних зразків. Одиначний сигнал-відповідь обчислювався окремо методом скінченних елементів. ДКІН визначався згідно лінійної теорії як згортка навантаження і одиначного сигналу-відповіді. При цьому критичне значення ДКІН відповідало моментові часу старту руйнування. Увесь проміжок часу, на якому досліджувався процес руйнування до його завершення, дорівнював 40 мс.

Дослідження з динаміки жорстко-пластичних конструкцій теж охоплюють дуже широке коло питань. Оскільки імпульсне навантаження використовують при штампуванні виробів, то доволі докладно досліджено статичні й динамічні задачі для прямокутних, колових, кільцевих пластин і мембран із різною формою імпульсу навантаження [25].

Основний масив публікацій пов'язаний із вивченням пружного деформування тіл при ударному впливі абсолютно жорстких тіл. Наприклад, у пружній постановці досліджуються [13–15] відповідно плоска й осесиметрична задачі удару штампів по пружному шару без урахування піднімання чи опускання середовища поблизу області контакту. У

[16] досліджено дію нестационарного навантаження на торцеву поверхню пружної півсмуги. У роботі [24] розглянуто плоску пружну задачу динамічної взаємодії абсолютно твердого ударника з пружним ізотропним однорідним півпростором на надзвуковій стадії взаємодії в умовах жорсткого зчеплення контактуючих поверхонь. Тут допускається, що зона контакту може бути багатозв'язною областю. Для розв'язування цієї задачі, зведеної до початкової задачі Коші для системи квазілінійних диференціальних рівнянь, розвинуто гібридні методи.

Удар жорсткого циліндру є цікавим, як граничний випадок удару пружних оболонок [11]. У даній статті використовується підхід [13–15, 11, 12, 17–21, 26], що заснований на зведенні вихідних рівнянь динаміки системи оболонка-шар до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Це дає можливість ефективно здійснювати числову реалізацію задачі і надійно визначити кількісні динамічні й кінематичні характеристики, що описують процес співудару, в залежності від величини початкової швидкості удару, параметрів оболонки і шару. В [13, 15] на відміну від даної статті розв'язується удар з надзвуковою швидкістю.

МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. Абсолютно жорстке циліндричне тіло, що рухається з швидкістю V_0 перпендикулярно до поверхні $Z = 0$ пружного шару завтовшки h , в момент часу $t = 0$ досягає цієї поверхні (рис. 1). Контакт відбувається уздовж твірної циліндра. Жорсткий ударник зв'язуємо з рухомою циліндричною системою координат $r\theta z'$, вісь z' збігається з віссю циліндра, а з шаром – нерухому декартову систему координат xuz .

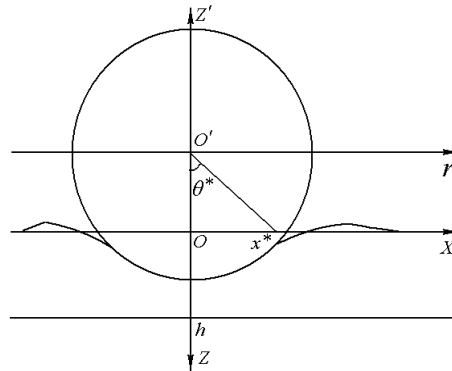


Рис.1. Геометрична схема задачі

Циліндр заглиблюється в пружне середовище зі швидкістю $V_T(t)$, ($0 \leq t \leq T$), причому початкова швидкість проникання $V_0 = V_T(0)$; T – час, на протязі якого циліндр взаємодіє із шаром. Введемо безрозмірні змінні так, як це було зроблено в [11, 19], при цьому ρ , μ , K , C_p і C_S – відповідно густина, модуль зсуву, модуль об'ємної деформації і швидкості розповсюдження повздовжніх і поперечних хвиль в пружному середовищі:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{C_0 t}{R}; \quad x' = \frac{x}{R}; \quad z' = \frac{z}{R}; \quad u'_i = \frac{u_i}{R}; \quad u'_0 = \frac{u_0}{R}; \quad w'_0 = \frac{w_0}{R}; \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{K}; \\ v'_T &= \frac{v_T}{C_0}; \quad w'_T = \frac{w_T}{R}; \quad p' = \frac{p}{KR}; \quad q' = \frac{q}{KR}; \quad M' = \frac{M}{\rho R^2}; \quad (i, j = x, y, z); \\ \beta^2 &= \frac{C_S^2}{C_0^2} = \frac{\mu}{K}; \quad \alpha^2 = \frac{C_p^2}{C_0^2} = \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right); \quad C_0^2 = \frac{K}{\rho}; \quad b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{3\mu}{3K + 4\mu}. \end{aligned}$$

Тут $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ – вектор переміщення точок середовища; σ_{zz} , σ_{xz} – ненульові компоненти тензора напружень середовища; M , v_T , w_T – погоня маса, швидкість і переміщення ударника як твердого тіла. Далі використовуватимемо лише безрозмірні величини, тому нижче штрих упускаємо.

Рівняння руху пружного шару записуються у вигляді потенціалів [18]:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\alpha^2 \partial t^2}; \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\beta^2 \partial t^2}; \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Якщо модуль зсуву μ вважати рівним нулю, то рівняння руху пружного середовища будуть рівняннями акустики. Фізичні безрозмірні величини виражаються через хвильові потенціали [19] так:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad u_y = 0; \\ \sigma_{zz} &= (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right); \\ \sigma_{xz} &= 2\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0; \\ \Theta &= \sigma_{zz} + \sigma_{xx} = 2(1 - b^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}; \quad \sigma_{xx} = \Theta - \sigma_{zz}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для розв'язування задачі використовується підхід [11, 17, 18], який дає можливість на початковому етапі проникнення ототожнити лінійні координати вздовж поверхні шару і циліндра, внаслідок чого будуть виконуватися наближені співвідношення

$$r \approx \theta; \quad \text{ctg}\theta \approx 1/\theta. \tag{2}$$

Враховуючи (2), для переміщення u_z і тиску p в області контакту будуть виконуватися залежності

$$u_z(t, x, 0) = w_T(t) - 1 + \sqrt{1 - x^2}; \quad |x| < x^*; \quad w_T(t) = \int_0^t V_T(\tau) d\tau; \\ p(t, x) = -\sigma_{zz}(t, x, 0); \quad |x| < x^*. \tag{3}$$

Лінеаризовані крайові умови такі:

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=0} \equiv V(t, x) = v_T(t); \quad |x| < x^*(t); \tag{4}$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0; \quad |x| > x^*(t); \tag{5}$$

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0; \quad |x| < \infty.$$

На межі шару $z = h$ умови жорсткого зчеплення.

Для часу взаємодії $0 \leq t \leq T$ зі смуги виокремлюємо прямокутник скінченних розмірів $\{|x| \leq l; 0 \leq z \leq h\}$ і задачу удару по шару вважатимемо задачею удару по прямокутнику. Довжина прямокутника l вибирається так, щоб збурені хвилі не встигали дійти до його межі $|x| = l$ ($l > \alpha(T - t_0) + x^*(t_0)$, $\left. \frac{dx^*}{dt} \right|_{t=t_0} = \alpha$).

Для визначеності розглянемо для прямокутника нульові початкові умови, а на бічній поверхні прямокутника - умови ковзного закріплення

$$u_x|_{|x|=l} = 0; \quad \sigma_{zx}|_{|x|=l} = 0; \\ \phi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad \psi|_{t=0} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Рух циліндру як тіла визначається з другого закону Ньютона

$$M\ddot{w}_T(t) = -F(t); \quad V_T(0) = V_0; \quad w_T(0) = 0, \tag{6}$$

де $F(t)$ – сила реакції пружного шару, що визначається з врахуванням (3), (5) як інтеграл від тиску по області контакту

$$F(t) = 2 \int_0^{x^*(t)} p(t, x) dx.$$

Межа області контакту x^* з урахуванням підйому середовища і уповільнення проникання циліндру в пружне середовище визначається з умови

$$w_T(t) - 1 + \sqrt{1 - x^{*2}} - u_z(t, x^*, 0) = \{0, \quad |x| \leq x^*(t); \quad \varepsilon < 0, \quad |x| > x^*(t)\}.$$

СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ. Застосовуючи до рівнянь (2) перетворення Лапласа за змінною t з параметром s і метод Фур'є відокремлення змінних, їх загальний розв'язок з урахуванням умов зникання на нескінченності запишемо у вигляді

$$\phi^L(s, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \exp\left(-z\sqrt{s^2/\alpha^2 + \lambda_n^2}\right) \cos \lambda_n x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \exp\left(z\sqrt{s^2/\alpha^2 + \lambda_n^2}\right) \cos \lambda_n x; \\ \psi^L(s, x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) \exp\left(-z\sqrt{s^2/\beta^2 + \lambda_n^2}\right) \sin \lambda_n x + \sum_{n=0}^{\infty} D_n(s) \exp\left(z\sqrt{s^2/\beta^2 + \lambda_n^2}\right) \sin \lambda_n x, \tag{7}$$

де $\lambda_n = n\pi/l$; $n = \overline{0, \infty}$ – власні числа задачі, що визначаються з умов на бічних поверхнях.

Функції V , u_z , σ_{zz} , σ_{zx} на поверхні прямокутника записуються у вигляді рядів за системою власних функцій, а функція p – у вигляді тригонометричного ряду:

$$V(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cos \lambda_n x; \quad u_z(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(t) \cos \lambda_n x; \tag{8}$$

$$\sigma_{zz}(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zn}(t) \cos \lambda_n x; \quad \sigma_{zx}(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zxn}(t) \sin \lambda_n x;$$

$$p(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos(n\pi x). \tag{9}$$

У (3), враховуючи (8) і використовуючи ортогональність тригонометричних функцій, отримуємо вираз для n -х гармонік тиску

$$p_n(t) = - \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}(x^*) \sigma_{zz,m}(t); \quad \gamma_{mn}(x^*) = \frac{\alpha}{\bar{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \cos nx \cos(\lambda_m x) dx; \quad \bar{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 nxdx. \tag{10}$$

Далі розв'язується задача для рівнянь (1) з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=0} = V(t, x); \quad \sigma_{zx} \Big|_{z=0} = 0; \quad u_z \Big|_{z=h} = 0; \quad u_x \Big|_{z=h} = 0. \quad (11)$$

Задовольняючи (5) з урахуванням (7) і (8), а також застосовуючи обернене перетворення Лапласа і теорему про згортку, отримуємо рівність, що дає зв'язок між компонентами нормальних напружень і вертикальної складової швидкості на поверхні шару:

$$\sigma_{zn}(t) = -\alpha \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \tilde{F}_n(t) + \phi_1(n, t) + \int_0^t (J_0(\beta \lambda_n \xi) \phi_2(n, t - \xi) + J_0(\alpha \lambda_n \xi) \phi_3(n, t - \xi)) d\xi; \\ \tilde{F}_n(t) &= -\alpha \lambda_n J_1(\alpha \lambda_n t) + 2b\beta \lambda_n \left\{ \beta^2 \lambda_n^2 t^2 (\bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t)) - J_1(\alpha \lambda_n t) + J_1(\beta \lambda_n t) \right\} + \\ &+ \beta \lambda_n t (b J_0(\alpha \lambda_n t) - J_0(\beta \lambda_n t)) + (2 - b^2) \bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t); \\ \phi_j(n, t) &= \gamma_j(n, \alpha, \beta, h) + \sum_{i=2}^4 H_j(n, s_i, h) \cos \beta_i t; \quad \beta_i = |\operatorname{Im} s_i|; \quad (i = 2; 3; 4); \quad (j = 1; 2; 3); \\ H_j(n, s_i, h) &= \frac{2N_j(n, s_i)}{\Delta(s_i)}; \quad \gamma_j(n, \alpha, \beta, h) = -\frac{1}{a_0} \left(\delta_{3j} b_0 + \frac{B_j}{a_1^2} + \frac{D_j}{b_1^2} + \frac{F_j}{c_1^2} \right); \\ \Delta(s) &= a_0 s^2 (9s^6 + 7(a_1 + b_1 + c_1)s^4 + 5(a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1)s^2 + 3a_1 b_1 c_1); \\ a_0 &= \frac{b^4 h^6}{108}; \quad a_1 = \beta^2 \lambda_n^2 + \frac{6\alpha^2}{h^2}; \quad b_1 = \beta^2 \left(\lambda_n^2 + \frac{6}{h^2} \right); \quad c_1 = \frac{3}{h^2} \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 h^2 \lambda_n^2}{3} \right); \\ N_1(n, s) &= a_{01} + a_{11} s^2 + a_{21} s^4 + a_{31} s^6; \quad N_2(n, s) = a_{02} + a_{12} s^2 + a_{22} s^4 + a_{32} s^6; \\ N_3(n, s) &= a_{03} + a_{13} s^2 + a_{23} s^4 + a_{33} s^6 + a_{43} s^8; \quad a_{01} = 2h\beta^9 b \lambda_n^2 (1 + b^2) (1 + h^2 \lambda_n^2 - 2h^2 \lambda_n^4 / 3); \\ a_{11} &= \beta^5 b (\beta^2 + 2h^2 \lambda_n^2 (\beta^2 (1 + b^2) (1 + h^2 \lambda_n^2 / 3) - b^2 (2\beta^2 (1 + \lambda_n^4 / 3) - h^2 \lambda_n^2 (1 - b^2)^2 / 6))) / h; \\ a_{21} &= \beta^5 b h ((1 + b^2) (1 + h^2 \lambda_n^2 / 3) + h^2 \lambda_n^2 (1 + 2b^2 - 3b^4) / 3) / 2; \quad a_{31} = \beta^3 b h^3 (1 + 6b^2 + b^4) / 24; \\ a_{02} &= 2\beta^{10} b \lambda_n^4 (2b^2 + h^2 \lambda_n^2 (2(1 + b^2) + 13h^2 \lambda_n^2 / 20) / 3); \quad a_{32} = \beta^4 b^3 \lambda_n^2 (1 + 2b^2 + b^4 / 5) / 6; \\ a_{12} &= 2\beta^8 b \lambda_n^2 (6b^2 + (2 + b^2 (5 + b^2)) h^2 \lambda_n^2 + (7 / 20 + b^2 (7 / 5 + 2b^2)) h^4 \lambda_n^4) / 3; \\ a_{22} &= 2\beta^6 b h^2 \lambda_n^2 (b^2 (1 + b^2 / 3) + (4 / 5 + b^2 (4 + b^2 (10 + b^2 / 5))) h^2 \lambda_n^2); \\ a_{03} &= -2\beta^{10} \lambda_n^4 (2 + (19 / 3 - b^2) h^4 \lambda_n^4 / 20 + 2(1 - b^2 / 3) h^2 \lambda_n^2); \\ a_{13} &= -2\beta^8 \lambda_n^2 (2 + (2 + b^2 / 3 + b^4 / 3) h^2 \lambda_n^2 + (23 / 60 + 3b^2 / 10 + 2b^4 / 15) h^4 \lambda_n^4); \\ a_{23} &= -\beta^6 (2 + (2 + 10b^2 / 3 + 4b^4 / 3) h^2 \lambda_n^2 + (7 / 12 + 19b^2 / 20 + 8b^4 / 15 + \beta^2 b^2 (1 + 2b^2 + \\ &b^4 / 5) / 3) h^4 \lambda_n^4) / 2; \quad a_{43} = -\beta^4 h^4 b^2 (1 + 2b^2 + b^4 / 5) / 24; \quad b_0 = 2a_{43} / a_0; \\ a_{33} &= -\beta^4 (h^2 (b^2 (1 + b^2 / 3) + (8b^4 / 5 + 3b^2 + 4 / 5) h^2 \lambda_n^2 / 12) + (1 + 2b^2 + b^4 / 5) \beta^2 h^2 \lambda_n^2 b^2 / 3); \\ \|B_j; D_j; F_j\| & \| (a, b, c) = \|B; D; F\| (b_{2j}, b_{1j}, b_{0j}); \quad B = (a_1^2 a + c - a_1 b)(c_1 - b_1) / \Delta_0; \\ D &= (b_1^2 a + c - b_1 b)(a_1 - c_1) / \Delta_0; \quad F = (c_1^2 a + c - c_1 b)(b_1 - a_1) / \Delta_0; \\ \Delta_0 &= a_1^2 (c_1 - b_1) + b_1^2 (a_1 - c_1) + c_1^2 (b_1 - a_1); \quad b_{0k} = a_{0k} - a_{3k} m_2 / a_0; \quad b_{1k} = a_{1k} - a_{3k} l_2 / a_0; \\ b_{2k} &= a_{2k} - a_{3k} k_2 / a_0; \quad (k = 1; 2); \quad b_{03} = a_{03} - m_2 (a_{33} - a_{43} k_2 / a_0) / a_0; \\ b_{13} &= a_{13} - a_{43} m_2 / a_0 - l_2 (a_{33} - a_{43} k_2 / a_0) / a_0; \quad b_{23} = a_{23} - a_{43} l_2 / a_0 - k_2 (a_{33} - a_{43} k_2 / a_0) / a_0; \\ k_2 &= (a_1 + b_1 + c_1) a_0; \quad l_2 = (a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1) a_0; \quad m_2 = a_1 b_1 c_1 a_0; \\ s_1 &= 0; \quad s_2 = i\alpha \sqrt{6 / h^2 + \lambda_n^2}; \quad s_3 = i\beta \sqrt{6 / h^2 + \lambda_n^2}; \quad s_4 = i\sqrt{3\beta^2 / h^2 + \alpha^2 \lambda_n^2}. \end{aligned}$$

При цьому експоненти у (7) було розкладено в степеневі ряди, у яких було утримано шість перших членів. Тут $J_0(t)$, $J_1(t)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку відповідно, а функцію $\bar{J}_0(t)$ означено та-

ким чином: $\bar{J}_0(t) = \int_0^t J_0(\tau) d\tau$.

Легко перевірити, що коли товщина шару прямує до нескінченності $\lim_{h \rightarrow \infty} \phi_i(h, n, t) = 0$ ($i = 1; 2; 3$), функції ϕ_i дорівнюють нулю і рівність (11) збігається з відповідною рівністю для півпростору [12, 19–21].

Використовуючи останню рівність при задоволенні змішаних крайових умов (4), (5), роблячи перерозвинення в ряди за власними функціями і прирівнюючи коефіцієнти при однакових $\cos \lambda_n x$, отримуємо нескінченну систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих компонент вертикальної складової швидкості

$$V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = C_n(x^*) v_T(t), \tag{13}$$

де $\alpha_{mn}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^l \cos \lambda_m x \cos \lambda_n x dx$; $C_n(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \cos \lambda_n x dx$; $N_n^2 = \int_0^l \cos^2 \lambda_n x dx$.

Рівняння (6) руху циліндра з урахуванням (3), (9), (10) набуде вигляду

$$\frac{dv_T(t)}{dt} = -2\alpha \frac{2\alpha}{M} \left\{ v_T(t) x^*(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x^*(t)}{\lambda_n} \int_0^t V_n(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right\}. \tag{14}$$

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ. Числова реалізація розв'язувальної системи рівнянь (13), (14) полягає у сумісному застосуванні методів квадратур і редукції. Інтеграли в (12)–(14) обчислювалися за симетричною квадратурною формулою Грегорі для рівновіддалених вузлів п'ятого порядку [27]. Задача Коші для диференціального рівняння (14) розв'язувалася методом Адамса четвертого порядку з локальною похибкою присікання $O(\Delta t^6)$ [27], де Δt – довжина часткових інтервалів, на які розбивали відрізок $[0; T]$. Почало розв'язку розраховувалося з кроком $\Delta t / 16$. Порядок редукції N вибирався із міркувань забезпечення практичної збіжності. Для згладжування осциляцій, що виникають при додаванні скінченної кількості членів ряду, а також ефекту Гіббса застосовувалася операція усереднення [22], що зводиться для суми скінченного числа членів тригонометричного ряду до почленного добутку членів скінченної суми на множники Ланцоша $\sigma_n = (\sin(n\pi / N)) / (n\pi / N)$ ($n = 0, N$).

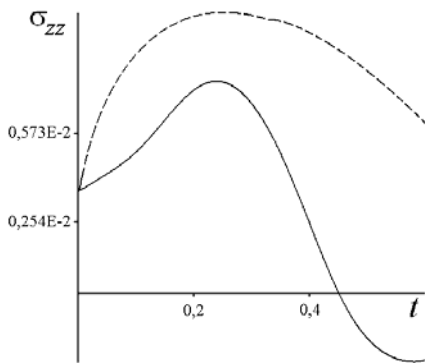


Рис. 2. Нормальні напруження σ_{zz}

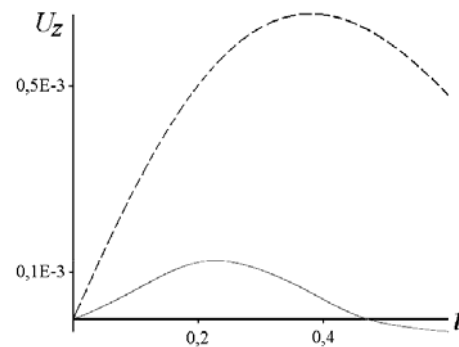


Рис. 3. Переміщення u_z

Надаючи модулю зсуву μ значення нуль, маємо, як частковий випадок, задачу удару циліндра по поверхні шару рідини. Для прикладу обчислення було здійснено для алюмінієвого шару результати для випадку, коли $V_0 = 0,003$, $\mu = 0,3582K$, $M = 0,03$, $l = 10$, $T = 0,6$, $h = 2$. На рис. 2–5 суцільними лініями зображено залежності від часу відповідно нормальних напружень σ_{zz} , нормальних переміщень u_z в точці початкового дотику циліндра, сила реакції пружного шару P і швидкість v_T проникання тіла в середовище. Для порівняння штриховими лініями зображені дані аналогічної задачі удару жорсткого циліндра по алюмінієвому півпростору.

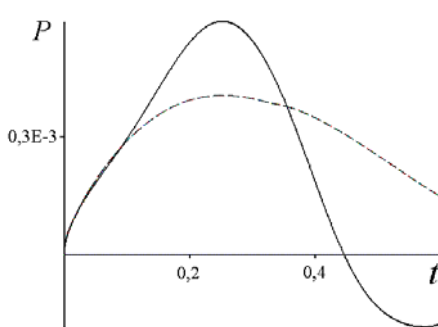


Рис. 4. Сила реакції P

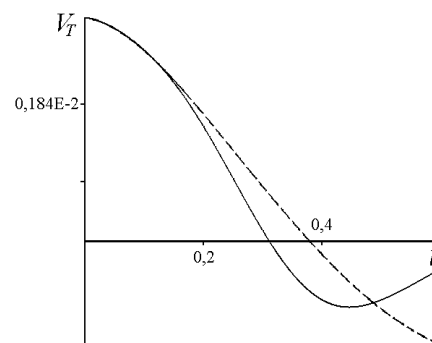


Рис. 5. Швидкість v_T

На початковій стадії удару (при безрозмірному часі, меншому від 0,07 – це є час на протязі якого ударна хвиля C_S не досягає нижньої межі шару) розв'язки для смуги і півпростору збігаються. Оскільки у (7) у просторі трансформант Лапласа було здійснене розкладання у степеневі ряди, то фактично було змодельовано досить усталений за часом процес удару, однак отримані результати значно відрізняються від випадку удару по поверхні півпростору,

коли взагалі немає відбитих від нижньої межі хвиль. Варто звернути увагу і на те, що при менших на 30 % нормальних напруженнях σ_{zz} , переміщення u_z у точці початкового дотику у разі удару по півпростору у п'ятеро менше.

ВИСНОВКИ. Розв'язана контактна задача плоскої деформації про пружний співудар абсолютно жорсткого циліндру з пружним шаром, зчепленим із абсолютно жорсткою основою, у якій область контакту вважається динамічно змінюваною, причому додатково враховується можливість піднімання поверхні шару в околі краю зони контакту вище від первісного рівня. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа та застосування розвиненого у ряди за власними функціями задачу зведено до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, яка розв'язується числово методом редукції та механічних квадратур. Розроблена методика дає можливість визначити кількісні динамічні та кінематичні характеристики, що описують процес співудару у залежності від значення початкової швидкості удару і параметрів шару.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Богданов В. Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини. // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. "Фіз.-мат. науки" – 2009. – Вип. 2. – С. 51–56.
2. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упруго-пластических деформаций при динамическом нагружении // Теор. и прикл. мех., Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.
3. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
4. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделювання руху тріщини на основі чисельного розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
5. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.
6. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Збірник наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій", Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44.
7. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник "Надежность и долговечность машин и сооружений". – 2010. – № 33. – С. 153–166.
8. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі чисельного розв'язування // Збірник наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій", Дніпропетровськ. – 2012. – № 19. – С. 10–19.
9. Богданов В. Р., Сулим Г. Т. Моделювання руху тріщини у компактному зразку на основі чисельного розв'язування просторової задачі // Збірник наукових праць "Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла", Дніпропетровськ. – 2012. – № 13. – С. 60–68.
10. Богданов В. Р. О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца // Теор. и прикл. мех., Донецьк. – 2011. – Вип. 3 (49). – С. 51–58.
11. Богданов В. Р., Левицька О. Р., Приходько Т. Б., Радзівіл О. Ю., Самборська Л. С. Плоска задача удару оболонки об пружний шар // Вісник НТУ. – Київ. – 2009. – С. 283 – 292.
12. Богданов В. Р. Задача соударения тонкостенных оболочек с упругой средой // Ин-т механики АН Украины – Киев. – 1994. Рус. – Рук. Деп. В ГПНТБ Украины от 13.12.94 г. № 2388 – Ук94.
13. Кубенко В. Д. Нестационарное вдавливание затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя // Доповіді Нац. Акад. Наук. – 2007. – № 4. – С. 58–65.
14. Кубенко В. Д. Осесимметричная задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого тела в поверхность упругого слоя // Доповіді Нац. Акад. Наук. – 2008. – № 1. – С. 58–67.
15. Кубенко В. Д., Марченко Т. А. Плоская задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого индентора в поверхность упругого слоя // Прикл.механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 55–65.
16. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Тарлаковский Д. В. Действие нестационарной нагрузки на поверхность упругой полосы // Доповіді Нац. Акад. Наук. – 2008. – № 1. – С. 59–65.
17. Кубенко В. Д. Об одном способе решения задач проникания тел в акустическую и упругую среду // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред: Тездокл. – Ереван, 1984. – С.183–187.
18. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. – Киев: Наук.думка, 1981. – 160 с.
19. Кубенко В. Д., Богданов В. Р. Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл.механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 78–86.
20. Кубенко В. Д., Попов С. Н., Богданов В. Р. Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность упругого полупространства // Доп.нац.акад.наук України – 1995. – № 7. – С. 40–44.
21. Кубенко В. Д., Попов С. Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл.механика. – 1988. – 24, № 7. – С. 69–77.
22. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М: Физматгиз, 1961. – 524 с.
23. Махненко В. И., Позняков В. Д., Великоиваненко Е. А., Розынка Г. Ф., Пивторак Н. И. Риск образования холодных трещин при сварке конструкционных высокопрочных сталей // Збірник наукових праць "Обробка матеріалів у машинобудуванні", Національний університет кораблебудування, Миколаїв. – 2009. – № 3. – С. 5–12.
24. Медведский А. Л., Тарлаковский Д. В. Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения // Вестник МАИ. – 2011. – Т. 18. – №6. – С. 125–132.
25. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград // Новосибирск: Академическое изд-во "Гео". – 2009. – 311 с.
26. Попов С. Н. Вертикальный удар жесткого кругового цилиндра боковой поверхностью об упругое полупространство // Прикл.механика. – 1989. – 25, № 12. – С. 41–47.
27. Хемминг Р. В. Численные методы. М: – Наука, 1972. – 399 с.
28. Rokach I. V. On the numerical evaluation of the anvil force for accurate dynamic stress intensity factor determination // Engineering Fracture Mechanics. – 70. – 2003. – P. 2059–2074.
29. Rokach I. V. Modal approach for processing one- and three-point bend test data for dsif-time diagram determination. Part I-theory // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. – 21. – 1998. – P. 1007–1014.
30. Rokach I. V. Influence of contact compliance on dynamic stress intensity factor variation during an impact test // International Journal of Fracture. – 126. – 2004. – P. 41–46.
31. Weisbrod G., Rittel D. A method for dynamic fracture toughness determination using short beams // International Journal of Fracture. – 104. – 2000. – P. 89–103.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.14

Bogdanov V., PhD
National Transport University, Kyiv

THE PLANE PROBLEM OF AN IMPACT OF A HARD CYLINDER ELASTIC LAYER

A plane problem of an elastic impact of the absolute hard cylinder against an elastic layer is considered, taking in account the lift of the layer material. The linearized boundary problem with a time-variable velocity of change point of the boundary conditions is reduced to the infinite system of an integral second-kind Volterra equations and integral-differential equation of the body motion. The numerical solution of the problem is obtained by the method of reduction and mechanical quadratures. Dependence of the main dynamic and the cinematic characteristics of the impact process of the starting speed of the impact process, parameters of the elastic layer have been determined.

Богданов В., канд.-фіз.-мат. наук
Національний транспортний університет, Київ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА УДАРА ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА ПО УПРУГОМУ СЛОЮ

Исследуется плоская задача упругого соударения абсолютно жесткого цилиндра с упругим слоем. Рассматривается контактная задача с динамически изменяющейся областью контакта, при этом учитывается подъем среды. Задача сводится преобразованием Лапласа и методом разложения в ряд по собственным функциям к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая численно реализуется методом редукции и механических квадратур. Определены динамические и кинематические характеристики, что описывают процесс соударения в зависимости от значения начальной скорости удара и параметров слоя.

УДК 532.5

О. Курилко, канд. фіз.-мат. наук
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
 e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

АНАЛІЗ ПРОЦЕСУ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ ВСЕРЕДИНІ ПРЯМОКУТНОЇ ПОРОЖНИНИ

Розглянуто двовимірну періодичну течія в'язкої нестисливої рідини в наближенні Стокса всередині прямокутної порожнини при синусоїдальному розподілі швидкості на верхній та нижній границі відповідно. Досліджено процес перемішування в'язкої рідини при відповідному розподілі швидкості. Проведено порівняння отриманих чисельних результатів з відомими експериментальними даними.

ВСТУП. Проблема перемішування рідин ламінарними течіями має важливе значення в мікротехнологіях при конструюванні змішувальних пристроїв в хімічних технологіях і мікробіології. Інтерес дослідників до цієї проблеми викликаний не тільки широким проявом процесів перемішування в природі, але і застосуванням різноманітних технологій перемішування в промисловості і техніці (аеро- та гідродинаміка, океанологія, біологія, хімія, геологія та астрономія) [2, 6, 7, 10, 13]. Контроль умов проведення нестійких хімічних реакцій вимагає створення спеціальних хімічних мікропроцесорів, які підтримують фізичні умови проведення хімічних реакцій у вузькому діапазоні фізичних параметрів. Вони здатні перемішувати в рідинах високомолекулярні сполуки, молекули яких не витримують великих зсувних напружень. Проведення якісного перемішування реагентів перед проведенням реакції, розмішування в полімерах невеликий добавки пігментів, пом'якшувачів реагентів дозволило одержати нові матеріали зі значно кращими фізичними властивостями.

Аналіз масштабів різних течій дозволяє зробити висновок про те, що на початкових етапах течій з різними геометричними масштабами переважаючими є конвективні механізми перемішування [3], і завдання перемішування зводяться до аналізу процесів деформації виділеної рідини в розглядуваному полі швидкості. Фактично ця задача пов'язана з лагранжевим описом руху в гідродинаміці і зводиться до аналізу руху системи лагранжових рідких частинок в ейлеровому полі швидкості. Така задача в літературі [5, 12] отримала назву *задача про адвекцію* рідини, яка в двовимірному випадку описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (1)$$

з початковими умовами $X = X_0, Y = Y_0$ при $t = t_0$.

Адвекція рідини пов'язана із вивченням деформації в часі виділених об'ємів або площ (в двовимірному випадку) рідини, які складаються із нескінченного набору матеріальних рідких частинок. Незважаючи на те, що такі системи мають нескінченне число степенів вільності, вивчення процесу адвекції окремих рідких частинок в гідродинамічних течіях приділяється особлива увага. Зменшення числа степенів вільності дозволяє не тільки спростити аналіз явища, але й виявляти основні властивості й закономірності інтенсивних режимів адвекції.

Дана стаття присвячена аналізу процесу адвекції виділеного об'єму рідини в прямокутній порожнині під дією дотичних швидкостей, прикладених на верхній та нижній стінках з використанням техніки відображення Пуанкаре. Рух стінок задається згідно закону, який розглянутий в експериментальній роботі Оттіно [11]. Вивчення хаотичних режимів перемішування, що виникають в деяких областях течії, зводиться до послідовного вирішення двох задач. Перша задача пов'язана з визначенням поля швидкості всередині прямокутної порожнини для заданого розподілу швидкості руху границь. До цього завдання висуваються високі вимоги до точності отриманого розв'язку, оскільки друга задача, пов'язана з отриманням траєкторій руху окремих рідких частинок виділеної області, деформацією границь виділеної рідини пов'язані з динамічно нестійким рухом рідини усередині порожнини. Для розв'язання першої задачі використано метод суперпозиції, який дозволяє знаходити асимптотику невідомих коефіцієнтів в рядах загальних розв'язків і тим самим дозволяє отримати практично будь-яку потрібну точність.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини в прямокутній порожнині з розмірами $2a \times 2b$ з рухомими верхньою та нижньою границями в декартовій системі координат, пов'язаної з центром порожнини (рис. 1). Течія у прямокутній порожнині, викликається заданими дотичними швидкостями

$U_{top}(t) = U \cos^2 \frac{\pi t}{T}$ та $U_{bot}(t) = -U \sin^2 \frac{\pi t}{T}$ на верхній ($Y = b$) та нижній ($Y = -b$) стінках відповідно, а бічні стінки ($X = \pm a$) – нерухомі (рис. 1).

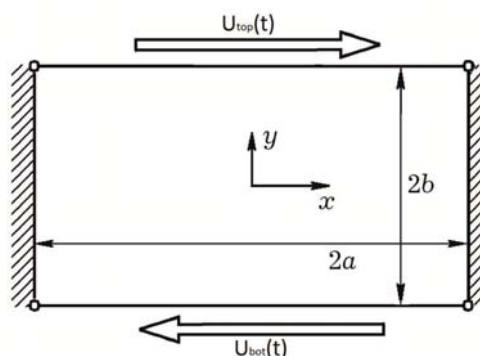


Рис. 1. Геометрія задачі

В наближенні Стокса (число Рейнольда $Re \rightarrow 0$) впливом інерційних сил на течію можна знехтувати в порівнянні з впливом сил в'язкості. Тоді після введення функції течії $\Psi(X, Y, t)$, за допомогою якої компоненти вектора швидкості визначаються за формулами

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (2)$$

розв'язок стаціонарної задачі зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta \Psi = 0. \quad (3)$$

У цьому випадку крайові умови для рівняння (2) мають вигляд

$$\begin{aligned} \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad \text{при } X = \pm a, \quad |Y| \leq b, \\ \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = U_{top}(t) \quad \text{при } Y = b, \quad |X| \leq a, \\ \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = U_{bot}(t) \quad \text{при } Y = -b, \quad |X| \leq a. \end{aligned} \quad (4)$$

Введемо безрозмірні координати та безрозмірний час: $x = X/b$, $y = Y/b$, $h = a/b$, $\tau = 2t/T$, де T – період руху верхньої та нижньої стінок рідини.

З огляду на лінійність задачі (2), (3) та загального алгоритму розв'язку задач для прямокутника, її розв'язок можна подати у вигляді

$$\psi(x, y, \tau) = U_1(\tau)\psi_1(x, y) + U_2(\tau)\psi_2(x, y), \quad (5)$$

де

$$U_1(\tau) = \frac{1}{2}(U_{top}(\tau) - U_{bot}(\tau)) = \frac{U}{2}, \quad U_2(\tau) = \frac{1}{2}(U_{top}(\tau) + U_{bot}(\tau)) = \frac{1}{2}U \cos \pi\tau, \quad (6)$$

а бігармонічні функції $\psi_k(x, y)$ ($k = 1, 2$) є розв'язками наступних граничних задач

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \psi_k = 0, \\ \psi_k = 0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm h, \quad |y| \leq 1, \\ \psi_k = 0, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = (-1)^k \quad \text{при } y = \pm 1, \quad |x| \leq h. \end{aligned} \quad (7)$$

Задачі (7) представляють собою симетричну ($k = 1$) та антисиметричну ($k = 2$) бігармонічні задачі з постійною швидкістю на границях прямокутної області.

З урахуванням (5) та (6) рівняння адвекції (1) матимуть наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = \bar{D} [v_1(x, y) + u(\tau)v_2(x, y)], \\ \frac{dy}{d\tau} = \bar{D} [u_1(x, y) + u(\tau)u_2(x, y)], \end{aligned} \quad (8)$$

де $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$ ($k = 1, 2$) – компоненти поля швидкості, що відповідають розв'язкам задач (7), а

$\bar{D} = \frac{UT}{4b}$ – безрозмірна величина, яка характеризує переміщення кожної з рухомих стінок протягом одного періоду руху. Періодична функція $u(\tau)$ на інтервалі $[0, 2]$ має вигляд

$$u(\tau) = \cos \pi\tau. \quad (9)$$

ПОБУДОВА АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ. Крайові задачі (7) розв'язуємо аналітичним методом суперпозиції, який є ефективним для багатьох двовимірних бігармонічних задач в теорії пружності, згину пластин і течії Стокса [4, 8, 9]. У цих працях можна знайти детальний опис методу, нижче подамо зведені результати. Шляхи побудови розв'язків для шуканих функцій $\psi_k(x, y)$ ($k = 1, 2$) течії мають ідентичну структуру, тому ми зупинимося детально на побудові аналітичного розв'язку задачі (7) для невідомої функції течії $\psi_2(x, y)$ ($k = 2$).

Згідно методу суперпозиції загальний розв'язок крайової задачі (7) ($k = 2$) шукаємо у вигляді

$$\psi_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} X_m^{(2)} P_m^{(2)}(y) \cos \alpha_m x - h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} Y_k^{(2)} q_k^{(2)}(x) \sin \delta_k y, \quad (10)$$

де

$$P_m^{(2)}(y) = \coth(\alpha_m) \frac{\sinh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} - y \frac{\cosh(\alpha_m y)}{\cosh(\alpha_m)}, \quad \alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h},$$

$$q_k^{(2)}(x) = h \tanh(\delta_k h) \frac{\cosh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} - x \frac{\sinh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)}, \quad \delta_k = k\pi.$$

З крайових умов отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів Фур'є $X_m^{(2)}, Y_k^{(2)}$

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} \Delta_2(\alpha_m) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(2)} \frac{4\delta_k \alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= \alpha_m U_m^{(2)}, \quad m = 1, 2, \dots, \\ Y_k^{(2)} h \Delta_1(\delta_k h) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{11}$$

де використано позначення

$$\Delta_1(\xi) = \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi}, \quad \Delta_2(\xi) = \coth \xi - \frac{\xi}{\sinh^2 \xi}. \tag{12}$$

Коефіцієнти Фур'є $U_m^{(2)}$ обраховуємо за формулою

$$U_m^{(2)} = \frac{(-1)^{m-1} h}{h} \int_{-h}^h \cos(\alpha_m x) dx = \frac{2}{\alpha_m h}.$$

Система (11) має особливість, яка полягає у не спаданні вільних членів. Тому застосувати вже існуючі методи для вивчення асимптотичного характеру поведінки невідомих в системах типу (11) безпосередньо неможливо, оскільки вільні члени не задовольняють умову спадання $O\left(\frac{1}{\alpha_m^2}\right)$ [1]. Щоб отримати можливість використати розвинуту

методику аналізу регулярних систем, введемо нові невідомі $x_m^{(2)}, y_k^{(2)}$ згідно формул

$$X_m^{(2)} = X_2 + x_m^{(2)}, \quad Y_k^{(2)} = Y_2 + y_k^{(2)}, \tag{13}$$

де X_2, Y_2 невідомі постійні величини. Підставивши (13) в систему рівнянь (11), отримуємо нову систему для визначення нових невідомих коефіцієнтів

$$\begin{aligned} x_m^{(2)} \Delta_2(\alpha_m) - \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} \frac{4\delta_k \alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= F_m^{(2)}, \quad m = 1, 2, \dots, \\ y_k^{(2)} h \Delta_1(\delta_k h) - \sum_{m=1}^{\infty} x_m^{(2)} \frac{4\delta_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} &= G_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{14}$$

де в правій частині функції визначено згідно формул

$$\begin{aligned} F_m^{(2)} &= 4Y_2 \alpha_m^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} - X_2 \Delta_2(\alpha_m) + \frac{2}{h}, \quad m = 1, 2, \dots, \\ G_k^{(2)} &= 4X_2 \delta_k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{(\alpha_m^2 + \delta_k^2)^2} - Y_2 h \Delta_1(\delta_k h), \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{15}$$

На праві частини $F_m^{(2)}, G_k^{(2)}$ накладається вимога спадання $O\left(\frac{1}{\alpha_m^2}\right)$, що призводить до виразів для коефіцієнтів

X_2, Y_2 у вигляді

$$X_2 = \frac{2\pi^2}{h(\pi^2 - 4)}, \quad Y_2 = \frac{4\pi}{h(\pi^2 - 4)}. \tag{16}$$

Отже, система (14) задовольняє умови регулярності і розв'язок цієї системи можна знайти методом простої редуції. Таким чином, число невідомих $x_m^{(2)}$ та $y_k^{(2)}$ вважається скінченим (M та K), а сума всіх членів, що слідують за першими M та K членами, передбачаються рівною нулеві. Невідомі коефіцієнти $x_m^{(2)}$ та $y_k^{(2)}$ в скінчених системах можна знайти, розв'язавши скінчену систему $M + K$ лінійних рівнянь.

Вважаємо, що $x_m^{(2)}$ та $y_k^{(2)}$ відомі величини. Обчислимо функцію течії $\psi_2(x, y)$, яка з урахуванням співвідношень (13) має наступний вигляд

$$\psi_2(x, y) = \psi_2^{(x,y)}(x, y) + \psi_2^{(h)}(x, y), \tag{17}$$

де

$$\psi_2^{(x,y)}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} x_m^{(2)} p_m^{(2)}(y) \cos \alpha_m x - h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} y_k^{(2)} q_k^{(2)}(x) \sin \delta_k y, \quad (18)$$

$$\psi_2^{(h)}(x,y) = X_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} p_m^{(2)}(y) \cos \alpha_m x - Y_2 h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} q_k^{(2)}(x) \sin \delta_k y. \quad (19)$$

В подальшому скористаємось співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh \xi} &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r e^{-(2r+1)\xi}, & \frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) e^{-(2r+1)\xi}, \\ \frac{1}{\sinh \xi} &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} e^{-(2r+1)\xi}, & \frac{\cosh \xi}{\sinh^2 \xi} &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) e^{-(2r+1)\xi} \end{aligned} \quad (20)$$

для перетворення виразів $p_m^{(2)}(y)$ та $q_k^{(2)}(x)$ в (19). Після підстановки виразів (20) в (19), зміни порядку сумування та проведення не складних перетворень отримаємо наступний вираз для функції $\psi_2^{(h)}(x,y)$

$$\begin{aligned} \psi_2^{(h)}(x,y) &= X_2 \sum_{r=0}^{\infty} [(2r+1-y) S_1(x, 2r+1-y) - (2r+1+y) S_1(x, 2r+1+y)] - \\ &- Y_2 h \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r [(2rh+h-x) S_2(y, 2rh+h-x) - (2rh+h+x) S_2(y, 2rh+h+x)], \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} S_1(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} e^{-\alpha_m \eta} \cos(\alpha_m \xi) = -\frac{h}{\pi} \arctan \left[\frac{\cos(\pi \xi / 2h)}{\sinh(\pi \eta / 2h)} \right], \\ S_2(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} e^{-\delta_k \eta} \cos(\delta_k \xi) = -\frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{\sin(\pi \xi)}{\exp(\pi \eta) + \cos(\pi \xi)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Компоненти швидкості обчислимо згідно формул (2) як відповідні похідні по x та y функції течії, що має вигляд (17) і представимо в наступному вигляді

$$u_2(x,y) = u_2^{(x,y)}(x,y) + u_2^{(h)}(x,y), \quad v_2(x,y) = v_2^{(x,y)}(x,y) + v_2^{(h)}(x,y), \quad (23)$$

де $u_2^{(x,y)}(x,y)$ та $v_2^{(x,y)}(x,y)$ виражається згідно наступних формул з коефіцієнтами $x_m^{(2)}$ та $y_k^{(2)}$

$$\begin{aligned} u_2^{(x,y)}(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x_m^{(2)} \left(\coth(\alpha_m) \frac{\cosh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} - y \frac{\sinh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} \right) \cos(\alpha_m x) - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} x_m^{(2)} \frac{\cosh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} \cos(\alpha_m x) - h \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k y_k^{(2)} q_k^{(2)}(x) \sin(\delta_k y), \\ v_2^{(x,y)}(x,y) &= h \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k y_k^{(2)} \left(h \tanh(\delta_k h) \frac{\sinh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} - x \frac{\cosh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} \right) \sin(\delta_k y) - \\ &- h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} y_k^{(2)} \frac{\sinh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} \sin(\delta_k y) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m x_m^{(2)} p_m^{(2)}(y) \sin(\alpha_m x), \end{aligned} \quad (24)$$

а $u_2^{(h)}(x,y)$ та $v_2^{(h)}(x,y)$ містять члени з постійними коефіцієнтами X_2 та Y_2 і можуть бути отримані як похідні по x та y складової функції течії $\psi_2^{(h)}(x,y)$, що виражається формулою (21)

$$\begin{aligned} u_2^{(h)}(x,y) &= X_2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\coth(\alpha_m) \frac{\cosh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} - y \frac{\sinh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} \right) \cos(\alpha_m x) - \\ &- X_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} \frac{\cosh(\alpha_m y)}{\sinh(\alpha_m)} \cos(\alpha_m x) - Y_2 h \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q_k^{(2)}(x) \sin(\delta_k y) = \\ &= X_2 \sum_{r=0}^{\infty} [(2r+1-y) S_3(x, 2r+1-y) + (2r+1+y) S_3(x, 2r+1+y)] - \\ &- X_2 \sum_{r=0}^{\infty} [S_1(x, 2r+1-y) + S_1(x, 2r+1+y)] - \\ &- Y_2 h \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r [(2rh+h-x) S_4(y, 2rh+h-x) + (2rh+h+x) S_4(y, 2rh+h+x)], \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$S_3(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\alpha_m \eta} \cos(\alpha_m \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\cos(\pi \xi / 2h) \cosh(\pi \eta / 2h)}{\cos^2(\pi \xi / 2h) + \sinh^2(\pi \eta / 2h)},$$

$$S_4(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\delta_k \eta} \cos(\delta_k \xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\pi \eta)}{\cos(\pi \xi) + \cosh(\pi \eta)} - 1 \right]$$
(26)

та

$$v_2^{(h)}(x, y) = Y_2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(h \tanh(\delta_k h) \frac{\sinh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} - x \frac{\cosh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} \right) \cos(\delta_k y) -$$

$$- Y_2 h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k} \frac{\sinh(\delta_k x)}{\cosh(\delta_k h)} \sin(\delta_k y) + X_2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m p_m^{(2)}(y) \sin(\alpha_m x)$$

$$= Y_2 h \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left[(2rh + h - x) S_6(y, 2rh + h - x) - (2rh + h + x) S_6(y, 2rh + h + x) \right] -$$

$$- Y_2 h \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left[S_2(y, 2rh + h - x) - S_2(y, 2rh + h + x) \right] +$$

$$+ X_2 \sum_{r=0}^{\infty} \left[(2r + 1 - y) S_5(x, 2r + 1 - y) - (2r + 1 + y) S_5(x, 2r + 1 + y) \right],$$
(27)

де

$$S_5(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\alpha_m \eta} \sin(\alpha_m \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi \xi / 2h) \sinh(\pi \eta / 2h)}{\cos^2(\pi \xi / 2h) + \sinh^2(\pi \eta / 2h)},$$

$$S_6(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\delta_k \eta} \sin(\delta_k \xi) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi \xi)}{\cos(\pi \xi) + \cosh(\pi \eta)}.$$
(28)

Таким чином, функцію течії $\psi_2(x, y)$ у цьому випадку можна обчислити за допомогою комбінації формул (17)–(19) та (21), а компоненти швидкості $u_2(x, y)$ та $v_2(x, y)$ – шляхом комбінації формул (23)–(25) та (27).

ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ. В якості прикладу розглянуто періодичну течію Стокса в'язкої нестисливої рідини всередині прямокутної порожнини при складному розподілі заданої швидкості на верхній та нижній границях. Розміри порожнини та швидкість руху верхньої та нижньої границь відповідають даним з роботи [11], а саме: $2a = 10.35$ см, $2b = 6.2$ см, $a/b = 1.67$, $U = 2.69$ см/с, $T = 15.4$ с. В'язкою рідиною в експерименті є гліцерин – речовина, число Рейнольдса якої близьке до 0. Переходячи до безрозмірних величин маємо: $h = 1.67$, $T = 2$, $n = 40$ – кількість періодів руху стінок прямокутної порожнини.

Протягом одного періоду T рухомі стінки проходять відповідні відстані

$$d_{top} = \int_0^T U_{top}(t) dt, \quad d_{bot} = \int_0^T U_{bot}(t) dt,$$
(29)

$$D = \frac{|d_{top}| + |d_{bot}|}{2h},$$
(30)

де d_{top} та d_{bot} є переміщеннями верхньої та нижньої стінок відповідно, а D – безрозмірна величина, яка характеризує переміщення рухомих стінок порожнини за один період T .

Для вивчення процесу перемішування в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини під дією дотичних швидкостей за заданим синусоїдальним законом [11, с. 469], розглянемо адвекцію виділеної плями (рис. 2), розміри та положення якої відповідають експериментальним даним [11, с. 468, рис. 3(b)].

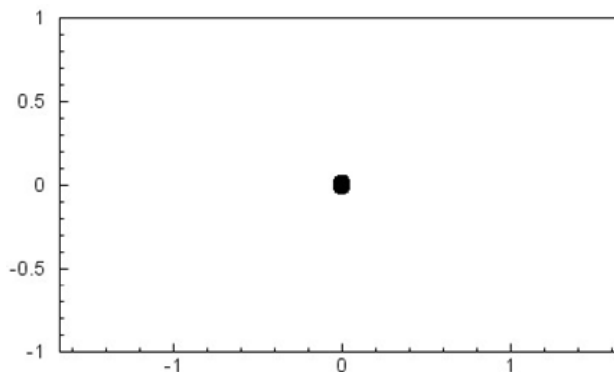


Рис. 2. Початкове положення плями в прямокутній порожнині

Початкова пляма має кругову форму, внутрішність якої заповнена 1000 точками. Будемо розглядати адвекцію кожної з точок і фіксувати їх положення в кінці кожного періоду. В результаті ми отримуємо відображення Пуанкаре для всіх точок, на основі якого можна зробити певні висновки про характер перемішування рідини. На рис. 3 (a)–(d) показано відображення Пуанкаре системи із 1000 точок при різних значеннях D : (a) відповідає значенню $D = 3.5$, (b) відповідає значенню $D = 3.8$, (c) відповідає значенню $D = 4.1$ та (d) – значенню $D = 4.4$. Бачимо, що зі збільшенням параметру D , спостерігається краще заповнення плямою прямокутної порожнини і якісніше перемішування з оточуючою рідиною. На рис. 3(a) бачимо, що пляма не значним чином перемішується з оточуючою рідиною, а рух кожної внутрішньої точки близький до регулярного. Зі збільшенням D від 3.5 до 4.4 траєкторія кожної точки стає складнішою та хаотичною, про що свідчить зростання області перемішування плями з оточуючою рідиною. Відмітимо, що зі збільшенням параметру D , площі періодичних островів (порожні області порожнини) в хаотичному морі зменшуються і в результаті мають місце 4 (рис. 3d) періодичні острови третього порядку, так звані "очі", "ніс" та "рот". Цей результат добре узгоджується з експериментальним результатом, який описаний в роботі Оттіно [11, с. 483, рис. 11]. При $D = 5.2$ пляма скрізь заповнює прямокутну порожнину, повністю перемішуючись з оточуючою рідиною. Дане значення параметру свідчить про граничне значення швидкості руху границь, при якому буде спостерігатися якісне перемішування.

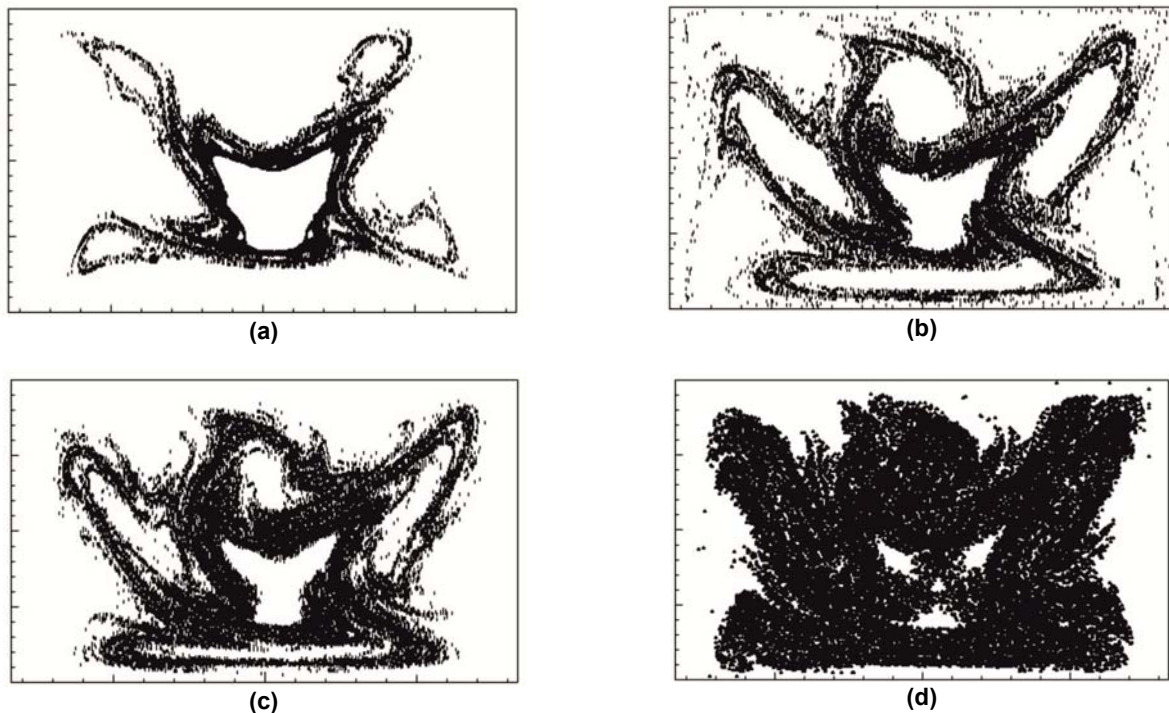


Рис. 3. Чисельне моделювання процесу перемішування виділеної плями

ВИСНОВКИ. Розглянуто задачу про двовимірну течію Стокса в'язкої рідини при складному розподілі швидкості руху границь. Метод суперпозиції є ефективним аналітичним засобом для розв'язання двовимірної крайової задачі для прямокутника. Застосування методу покращеної редукції при розв'язанні бігармонічних задач дозволяє суттєво покращити збіжність нескінченних рядів представлення розподілу функції течії і, як наслідок, компонент поля швидкості течії всередині прямокутної порожнини зі складним розподілом швидкості руху границь. Незважаючи на громіздкі математичні обчислення, кінцеві формули виявилися дуже простими для проведення чисельних обчислень. Проведено аналіз процесу адвекції плями на протязі скінченного проміжку часу за допомогою методики відображення Пуанкаре. Отримані чисельні результати узгоджуються з експериментальними результатами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гомилко А. М. Об одном классе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики – 1993. – № 33(7). – С.979–995.
2. Краснопольская Т. С., Мелешко В. В. Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования // Прикладная гидромеханика. – 2004. – Т.4. – С.45–58.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – М.: Наука, 1986. – 736с.
4. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность. Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, №3. – С.45–68.
5. Aref H. Stirring by chaotic advection // Journal of Fluid Mechanics. – 1984. – Vol.143. – P.1–23.
6. Beebe D. J., Mensing G. A., Walker G. M. Physics and applications of microfluidics in biology // Annual Review of Biomedical Engineering. – 2002. – Vol. 4. – P.261–286.
7. Maderich V. Reconstruction and prediction of the radionuclide transport in the Mediterranean seas chain // Journal of Environmental Radioactivity. – 1999. – Vol. 43, N.2. – P.205–219.
8. Meleshko V. V. Biharmonic problem in a rectangle // Appl. Sci. Res. – 1998. – 58. – P. 217–249.
9. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proceedings of the Royal Society of London. – 1996. – Vol. A452. – P.1999–2022.
10. Muller P., Garret C. From stirring to mixing in a stratified ocean // Oceanography. – 2002. – Vol.15, N.3. – P.12–19.
11. Ottino J. M. Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity // Journal of Fluid Mechanics – 1989. – Vol. 209. – P.463–499.
12. Ottino J. M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport // Cambridge: Cambridge University Press. – 1989. – 683 p.
13. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2004. – Vol.36. – P. 381–411.

Kurylko O., PhD

Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

THE ANALYSIS OF THE STIRRING PROCESS OF A VISCOUS FLUID INSIDE A RECTANGULAR CAVITY

The two-dimensional periodic flow of viscous incompressible fluid in the Stokes approximation in a rectangular cavity with sinusoidal velocity distribution on the top and bottom boundaries is considered. The stirring process of a viscous fluid at a corresponding velocity distribution is investigated. The obtained numerical results agree with well-known experimental data.

Курилко А., канд. физ.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрено двумерное периодическое течение вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса внутри прямоугольной полости при синусоидальном распределении скорости на верхней и нижней границах соответственно. Исследован процесс перемешивания вязкой жидкости при соответствующем распределении скорости. Проведено сравнение полученных численных результатов с известными экспериментальными данными.

УДК 539. 595

І. Семенова, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ В ГІПЕРБОЛОЇДІ ОБЕРТАННЯ

Для задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в гіперболічному резервуарі визначені частоти і форми коливань, які додатково задовольняють умові розв'язності нелінійної задачі. Порівняно три методи визначення частотних параметрів: класичний, ітераційний та модифікований. Для трьох випадків нециліндричного резервуару (гіперboloїд, параболоїд та еліпсоїд) побудовано системи координатних функцій і для них визначені похибки задовільнення граничних умов.

ВСТУП. Проблеми коливань рідини в резервуарах останній час приваблюють все більше уваги. Задачам динаміки тіл з рідиною, що частково заповнює їх, присвячена значна кількість наукових праць. Такий інтерес пов'язаний з практичними потребами техніки, такими як, транспортування рідких вантажів, ускладнення умов об'єктів машинобудування, підвищення вимог до надійності транспортних систем, проблемами будування літаків і ракетобудування. У більшості праць досліджено коливальний рух в баках з вертикальними стінками. Також вивчено клас споріднених задач для резервуарів конічної, еліптичної, сферичної та параболічної форм [1–3]. Проте процес утворення хвиль на поверхні ідеальної рідини в резервуарі, що має форму гіперboloїда обертання, іншими авторами не розглядався.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ. Моделювання задачі про коливальний рух ідеальної нестисливої рідини в резервуарі гіперболічної форми пов'язано з некласичною крайовою задачею:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{\|\vec{\nabla}\eta\|} \frac{\partial\eta}{\partial t} \text{ на } S \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + U = 0 \text{ на } S$$

Складність розв'язання нелінійних крайових задач гідродинаміки обмеженого об'єму рідини із вільною поверхнею полягає не тільки в тому, що крайові умови на вільній поверхні нелінійні, але й тому, що вільна поверхня невідома і область визначення потенціалу швидкостей рідини наперед невідома. До того ж межа області змінюється у часі. У випадку порожнини нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає із незбуреною вільною поверхнею. Ця додаткова складність (геометрична нелінійність) не дозволяє сформулювати задовільний алгоритм розв'язку нелінійних задач для порожнини будь-якої форми. Особливістю розв'язання таких задач варіаційним методом є побудова таких розкладів розв'язків, які б задовольняли кінематичним умовам задачі і умовам її розв'язності. Обрана математична модель базується на варіаційному принципі Гамільтона-Остроградського, коли динамічні умови і рівняння руху одержуються як природні, а кінематичним граничним умовам і умовам розв'язності задачі необхідно задовольняти до реалізації варіаційного принципу.

Для опису динаміки рідини в резервуарі введемо недекартову параметризацію області, яку займає рідина. В нових координатах рідина, набуває циліндричної форми, що надалі дозволяє записати рівняння вільної поверхні рідини у вигляді, розв'язаному відносно вертикальної координати.

Ефективність реалізації моделі коливального руху рідини з вільною поверхнею в нециліндричних резервуарах тісно пов'язана з умовою розв'язності крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа. Ця умова з механічної точки зору пов'язана з умовою збереження об'єму рідини. Тому для адекватності нелінійної задачі необхідно з високою точністю задовольнити умовам збереження об'єму на вільній поверхні, а також крайові умови неперетікання не лише на змочуваній в незбуреному стані бічної поверхні резервуару Σ_0 , а і на деякому її продовженні $\Delta\Sigma$, куди досягають гребені хвиль під час збуреного руху рідини.

Важливим етапом при вирішенні розглянутої задачі є розклад потенціалу швидкостей

$$\varphi \sim w_k^{(m)}(r, z) \frac{\sin m\theta}{\cos}$$

розклад φ_{km} є двохпараметричним, m – параметр розкладу по кутовій координаті, k – параметр розкладу по радіусу. Оскільки для тіла обертання відділення кутової координати виконується точно, фактично у подальшому буде вирішуватися задача для кожного фіксованого m , а по k буде здійснюватися перебір. Базис $w_k^{(m)}(r, z)$ є системою гармонічних поліномів [4], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи координат, перетвореними до циліндричної системи. Ці функції взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення, що значно полегшує процес чисельного моделювання:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial z} &= (k-m)w_{k-1}^{(m)}; \quad r \frac{\partial w_k^{(m)}}{\partial r} = kw_k^{(m)} - (k-m)zw_{k-1}^{(m)}; \\ (k+m+1)w_k^{(m)} &= (2k+1)zw_k^{(m)} - (k-m)(z^2+r^2)w_{k-1}^{(m)}; \\ (k+m+1)rw_k^{(m)} &= 2(m+1)\left[(z^2+r^2)w_{k-1}^{(m)} - zw_k^{(m)}\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Прийнятий розклад задовольняє вимоги повноти, ортогональності та гармонічності, проте не задовольняє кінематичні крайові умови на твердих стінках і на вільній поверхні.

Класична задача про визначення частот і форм вільних коливань рідини має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad \text{в } \tau_0; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Sigma_0; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \lambda\varphi \quad \text{на } S_0, \end{aligned} \quad (3)$$

а її варіаційне формулювання: $\delta I = 0$, де $I = \int_{\tau_0} (\nabla\varphi)^2 d\tau - \lambda \int_{S_0} \varphi^2 ds$.

Ця задача вирішується за допомогою методу Рітца. Після підстановки розкладів за методом Рітца отримуємо задачу на власні значення:

$$Ax - \lambda Bx = 0 \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\tau^*} \left[\frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial r} \frac{\partial w_j^{(m)}}{\partial r} + \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial z} \frac{\partial w_j^{(m)}}{\partial z} - \frac{m^2}{r^2} w_i^{(m)} w_j^{(m)} \right] r dr dz; \\ b_{ij} &= \int_{S^*} w_i^{(m)} w_j^{(m)} \Big|_{z=0} dS^* = \int_0^R w_i^{(m)} w_j^{(m)} \Big|_{z=0} r dr. \end{aligned}$$

Задача (3) не містить ніяких обмежень на рух рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні, тому для успішного розв'язання нелінійної задачі застосовується метод допоміжної області [1, 2]. При цьому у якості базису приймаються не форми коливань рідини з вільною поверхнею, а близькі до них функції, які додатково задовольняють умови розв'язності задачі. Першим етапом в алгоритмі побудови системи базисних функцій є додаткове збільшення глибини заповнення резервуару $\Delta\tau$, де $\Delta\tau$ вибирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні змочуваної стінки бака з урахуванням очікуваних амплітуд збурень вільної поверхні. Класичним методом розв'язується задача для області $\tau + \Delta\tau$. Знайдений розв'язок ітераційно уточнюється, а функції з однаковим окружним номером ортогоналізуються. При цьому особливості рішення виявлятимуться вище за рівень реальної поверхні, а в околі $L = \tau \cap \Sigma$ розв'язок буде регулярним. Розв'язок з вільної поверхні S , що відповідає $\tau + \Delta\tau$ зноситься на S_0 . Таким чином особлива точка піднімається над рівнем реальної вільної поверхні. Пропонується в якості $\bar{\psi}_j$ розглядати значення ψ'_j на поверхні S_0 , оскільки по характеру поведінки $\bar{\psi}_j$ близько до ψ'_j і ψ_j , а власні числа, отримані по методу Релея для $\bar{\psi}_j$, незначно відрізняються від λ_j . На відміну від класичного методу, коли в постановку завдання не входить характер зміни поверхні $\Delta\Sigma$ над рівнем незбуреної вільної поверхні, метод допоміжної області показує залежність рішення задачі від характеристик $\Delta\Sigma$.

Метод ітераційного уточнення рішення складається з того, що після вирішення варіаційної задачі знайдені форми вільних коливань застосовуються у якості координатних функцій для рішення задачі на наступному кроці. Така схема може виконуватися неодноразово. Аналітично така процедура відповідає наступній обчислювальній схемі. Нехай $Ax - \lambda Bx = 0$ є алгебраїчною задачею на власні значення, що отримана на основі (3), D – матриця, що складається з власних векторів розв'язків задачі (4). Тоді один етап метода послідовних уточнень дорівнює переходу від задачі (3) до задачі

$$\left[D^T (A - \lambda B) D \right] x = 0 \quad (5)$$

Враховуючи невивроженість матриці D , інакше розв'язки залежні, а власні числа задач (4) та (5) співпадають. Оскільки рішення задачі (4) мають властивість ортогональності, то матриця $B^* = D^T B D$ близька до діагональної, що сприяє підвищенню точності чисельної реалізації. Застосування цього методу дозволяє збільшити розмірність задачі (кількість гармонічних поліномів у розкладі). При цьому навіть при нестійкому розв'язку задачі на першому етапі ітерації другий крок забезпечує стійкість обчислюваного процесу.

Для оцінки точності отриманого розв'язку приймається відносна похибка у вигляді

$$\delta = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} / \max \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_0}$$

Проілюструємо застосування методу допоміжної області на прикладі резервуара, що має форму гіперболоїда обертання. Чисельна реалізація описаного алгоритму проводилась при врахуванні 22 гармонічних поліномів. Модифікаційний метод використовувався при $\Delta H = 0.2R$ (значення ΔH визначає розмір областей $\Delta \Sigma$ та $\Delta \tau$).

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ. Розглянемо результати розв'язання задачі для гіперболоїда обертання $r = \frac{a}{c} \sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$ з наступними параметрами: $a = 1, c = 2.4, H = 1$. Радіус незбуреної вільної поверхні $R = 1$.

Результати визначення частотних параметрів координатних функцій приведені у таб.1. У першому рядку розташовані значення частотного параметру, розрахованого за модифікаційним методом, який є сукупністю застосування допоміжної області і ітераційного уточнення розв'язку. У другому рядку містяться частоти, отримані класичним методом, варіант 3 відповідає реалізації методу ітераційного уточнення, а в останньому знаходиться відсоток відмінності частот. Проаналізувавши таблицю 1, можна перекоонатися, що застосування методу ітераційного уточнення на значення частотного параметру не впливає, а застосування модифікаційного методу збільшує частоту у четвертому розряді після коми для частот, що відповідають $k = 1$. Більше відрізняються значення частот, що відповідають формам параметру розкладу по радіусу $k = 2$. Для форм, відповідних $k = 2$ відмінність більша в наслідок того, що із застосуванням допоміжної операції зносу значень координатних функцій на реальну незбурену вільну поверхню властивості ортогональності функцій з однаковими окружними номерами втрачається.

Таблиця 1

Результати визначення частотних параметрів

Гіперболоїд : $a = 1, c = 2.4, H = 1$.						
	$m = 1, k = 1$	$m = 0, k = 1$	$m = 2, k = 1$	$m = 1, k = 2$	$m = 3, k = 1$	$m = 0, k = 2$
1	1.25131803	3.35410333	2.21274335	4.0594845	3.12908412	5.808212414
2	1.25128227	3.35088589	2.21249423	4.89522178	3.12846530	6.60080140
3	1.25128227	3.35088589	2.21249423	4.89524100	3.12846530	6.59586912
%	0.00002858	0.00096017	0.00011260	-0.17072511	0.00019780	-0.12007466

У таб. 2 подано значення частотного параметру, розрахованого за методом допоміжної області і класичним методом для трьох форм резервуарів: гіперболоїда обертання $r = \frac{a}{c} \sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$ з параметрами:

$a = 1, c = 2.4, H = 1$, еліпсоїда $a = 1, b = 2, H = 1$, а також для параболоїда обертання $r = \sqrt{x+H}$, який досліджувався раніше [3]. Радіус дзеркала вільної поверхні в резервуарах однаковий $R = 1$.

Аналіз числових даних таб.2 свідчить, що відмінність розрахунку частот для гіперболоїда найбільша, а у випадку еліптичного резервуара найменша. Відомо, що частота власних коливань рідини є найбільш чітко вираженим фізичним параметром задачі і залежить лише від геометрії порожнини, у першу чергу від геометричних характеристик в околі вільної поверхні рідини. Для резервуарів циліндричної форми кутова точка взагалі втрачає сингулярність, що виникає в баках з нахиленими стінками [3]. Чим більше порожнини відрізняються від вертикальних, тим більше відмінність у значенні частот, обрахованих за методом допоміжної області.

Таблиця 2

Порівняння результатів класичного та модифікаційного методів

Резервуар	Гіперболоїд		Параболоїд		Еліпсоїд	
	$m = 1, k = 1$	$m = 2, k = 1$	$m = 1, k = 1$	$m = 2, k = 1$	$m = 1, k = 1$	$m = 2, k = 1$
1	1.251318	2.212743	1.301650	2.307789	1.693709	2.978664
2	1.251282	2.212494	1.301628	2.307623	1.693705	2.978660
%	0.000030	0.000100	0.000020	0.000070	0.0000020	0.0000016
δ_h	-0.000112 (-0.068952)	-0.000322 (-0.309975)	0.000206 (0.101911)	-0.000505 (-0.262053)	0.00030014 (0.0804574)	-0.0000896 (-0.020359)
δ_c	0.000005 (-0.000061)	0.000017 (-0.000145)	-0.000001 (-0.000102)	0.000005 (-0.000223)	0.000004 (0.0003001)	0.0000001 (-0.0000896)

Отримані результати свідчать про те, що застосування модифікаційного методу дозволяє отримати більш точні результати задоволення умови неперетікання на Σ_0 , а також на $\Delta \Sigma$ (δ_h) вище рівня незбуреної вільної поверхні, що дослідити класичним методом неможливо. Значення похибки виконання вимоги неперетікання на $\Delta \Sigma$ (δ_h) в найвищій точці бічної стінки резервуара, куди очікувано досягають гребні хвиль, дає кращий результат для гіперболоїда (зменшується в 600 разів), параболоїд (в 500 разів), гірший для еліпсоїда (в 250 разів). Умова неперетікання

на Σ_0 в кутовій точці δ_c виконується з менш високою точністю для гіперboloїда обертання, що визначається збільшенням нахилів стінок до вертикалі.

ВИСНОВКИ. Розглянуто застосування модифікованої схеми визначення частот і форм коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарі гіперболічної форми. Визначені форми коливань задовольняють умовам розв'язності задачі краще у порівнянні з класичним методом (точність підвищується більш ніж на два порядки). Метод допоміжної області дозволяє покращити точність виконання умови неперетікання навіть на подовженні бічної поверхні резервуара, куди досягають гребні хвиль. Показано, що застосування методу ітераційного уточнення на значення частотного параметру не впливає, а точність частот, визначених модифікаційним методом, змінюється лише на 10^{-5} . Частоти, що відповідають $k=2$ визначаються з меншою точністю. Застосування модифікаційного методу незначно завищує частоту і є прийнятним для визначення частот в гіперболічному резервуарі. Побудовані розв'язки на вільній поверхні є близькими до розв'язку класичної задачі про визначення частот і форм коливань. Показано ефективність застосування даної методики при побудові нелінійних дискретних моделей руху ідеальної рідини в резервуарі гіперболічної форми.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лимарченко О. С. Моделирование динамики конструкций, несущих жидкость со свободной поверхностью – К., 1991.
2. Лимарченко О. С., Ружицкий И. С. Побудова координатних функцій для нелінійної задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в еліптичному резервуарі // Вісник Київського університету, серія Фізико-математичні науки. – 2009. – №1. – С. 59–62.
3. Лимарченко О. С., Семенова И. Ю. Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебаниях жидкости в параболоиде вращения // Комплексный анализ и течи с вільними границями: Збірник праць Інституту математики НАН України, 2006. – Т. 3, № 4.
4. Луковский И. А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы – К., 1975.

Стаття надійшла до редакції 18.11.14

Semenova I. Y., PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

THE ALGORITHM FOR DETERMINING THE FREQUENCIES OF OSCILLATIONS OF AN INCOMPRESSIBLE LIQUID IN THE HYPERBOLOID OF REVOLUTION

For the problem about nonlinear oscillations of liquid with a free surface in hyperbolic reservoir we found frequencies and forms of oscillations, which supplementary satisfies solvability conditions for the nonlinear problem. Three methods for determining the frequency settings were compared: classical, iterative and modified. For three variants of reservoir (hyperboloid, paraboloid and ellipsoid) we constructed systems of basis functions and determined for them errors of realization of boundary conditions.

Семенова И. Ю., канд. физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГИПЕРБОЛОИДЕ ВРАЩЕНИЯ

Для задачи о нелинейных колебаниях жидкости со свободной поверхностью в гиперболическом резервуаре определены частоты и формы колебаний, которые дополнительно удовлетворяют условиям разрешимости нелинейной задачи. Сравнились три метода определения частотных параметров: классический, итерационный и модифицированный. Для трех случаев нецилиндрического резервуара (гиперболоид, параболоид и эллипсоид) построены системы координатных функций и для них определены погрешности удовлетворения граничных условий.

УДК 539.3

Л. Федорченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: fedorchenko555@gmail.com

ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКОЇ ОРТОТРОПНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ОРТОТРОПНОЮ ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЮ З ДІА- ТА ПАРАМАГНІТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розглянуто нелінійну задачу магнітопружності в осесиметричній постановці для зрізаної ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю. Отримано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформівний стан зрізаної ортотропної сферичної оболонки. Наведено числовий приклад. Зроблено аналіз напруженого стану сферичної оболонки в залежності від матеріалу оболонки.

ВСТУП. Сферичні оболонки сталої та змінної товщини широко застосовуються в різних галузях техніки як елементи конструкцій та деталі машин. Тонкостінні струмопровідні оболонки часто можуть знаходитися в магнітному полі та зазнавати впливу стороннього струму чи механічних навантажень. Цей факт викликає підвищений інтерес до теорії магнітопружності.

При розрахунку міцності оболонкових конструкцій необхідно мати інформацію про їх напружено-деформований стан. Важливим при визначенні напружено-деформованого стану є врахування змінної товщини оболонки, оскільки в багатьох випадках необхідно вибирати оптимальні параметри.

Наслідком впливу нестационарних полів на металеві тонкостінні елементи є поява об'ємних електромагнітних сил. Такі сили, при деяких параметрах полів, здатні викликати великі деформації конструкцій.

Останнім часом великий інтерес викликають задачі напружено-деформівного стану гнучких ортотропних оболонок з урахуванням ортотропної електропровідності, які знаходяться у нестационарному магнітному полі. Такі задачі даного класу мають як фундаментальний, так і прикладний характер.

В даній статті приведено розв'язувальну систему рівнянь магнітопружності осесиметричних ортотропних оболонок обертання та запропонована методика її розв'язання. Проводиться порівняльний аналіз напружено-деформівного стану зрізаних сферичних оболонок зроблених з діамагнітних (кадмій, берилій) та парамагнітних (бороалюміній) матеріалів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо гнучку ортотропну зрізану сферичну оболонку змінної товщини. Вважаємо, що тіло знаходиться у зовнішньому магнітному полі під дією механічних навантажень. Нехтуємо впливом процесів поляризації і намагнічування.

Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криволінійної системи координат s і θ , де s – довжина дуги меридіана, θ – центральний кут. Координатні лінії $s = const$, $\theta = const$ є лініями головних кривизн серединної поверхні.

Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} діелектричної проникливості ε_{ij} та магнітної проникливості μ_{ij} . Розглядаємо тіла з ромбічною кристалічною структурою. Виходячи з кристалографії [3] тензори ε_{ij} , σ_{ij} , μ_{ij} приймають діагональний вигляд.

Враховуючи діагональний вигляд тензорів і згідно роботам [2, 8] розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричних ортотропних оболонок обертання має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} u - \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} w + \frac{w}{R_s} - \frac{1}{2} \vartheta_s^2, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta_s + \frac{u}{R_s}, \quad \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta \cos \varphi}{r} \vartheta_s, \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) N_s + e_0 h \left(\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - F_s - h J_{0CT} B_\gamma - \frac{1}{R_s} Q_s - \\ &\quad - \sigma_1 h \left[E_0 B_\gamma + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \varphi}{r} Q_s + \left(\frac{1}{R_s} + \frac{\nu_\theta \sin \varphi}{r} \right) N_s + e_0 h \frac{\sin \varphi}{r} \left[\frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right] - F_\gamma - \\ &\quad - 0.5 h J_{0CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h [-0.5 E_0 (B_s^+ + B_s^-) - 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \varphi}{r} \left[(\nu_\theta - 1) M_s + \frac{e_0 h^3 \cos \varphi}{12 r} \vartheta_s \right] + Q_s + N_s \vartheta_s - \frac{\sin \varphi}{r} \left[\nu_\theta M_s + \frac{e_0 h^3 \cos \varphi}{12 r} \vartheta_s \right] \vartheta_s + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu_3 \sigma_2 \left[E_0 + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{\mu_1 h}, \quad \frac{\partial E_0}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \varphi}{r} E_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут u, w – переміщення; N_s – нормальні зусилля; Q_s – поперечні зусилля; M_s – згинальний момент; ϑ_s – кут повороту нормалі; $h = h(s)$ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу; R_s – головний радіус кривизни; φ – кут нормалі до серединної поверхні оболонки; $r(s)$ – радіус паралельного кола оболонки; ν_s, ν_θ – коефіцієнти Пуассона; e_s, e_θ – модулі Юнга; F_i – механічна сила; E_0 – компонента напруженості електричного поля; B_γ – нормальна складова магнітної індукції; B_s^+, B_s^- – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки; J_{0CT} – складова густини стороннього електричного струму.

Виходячи з геометрії сферичної оболонки, в (1) покладаємо $R_s = R_\theta = R$, де R – радіус оболонки;

$r = R \sin \varphi$, $\sin \varphi = \frac{s}{R}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - s^2}}{R}$. Тоді (1) переписеться у вигляді [1,4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h} N_s - \frac{\vartheta_s \operatorname{ctg} \varphi}{R} u - \frac{(\nu_\theta - 1)}{R} w - 0.5 \vartheta_s^2; \quad \frac{\partial w}{\partial s} = -\vartheta_s + \frac{u}{R}; \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{\nu_\theta}{R} (\operatorname{ctg} \varphi \vartheta_s - 0.5 \vartheta_s^2); \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R} (\nu_\theta - 1) N_s + \frac{Q_s}{R} - P_s - h J_{0CT} B_\gamma - \sigma_1 h \left[E_0 B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma \right] + \\ &\quad + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi e_0 h}{R^2} (\operatorname{ctg} \varphi u + w); \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R} Q_s + \frac{1}{R} (1 + \nu_\theta) N_s + \frac{e_0 h \operatorname{ctg} \varphi}{R^2} (\operatorname{ctg} \varphi u + w) - \\ &\quad - P_\gamma + 0.5 h J_{0CT} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_2 h \left[0.5 E_0 (B_s^+ + B_s^-) + 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_\gamma \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{ctg\varphi}{R}(v_\theta - 1)M_s + \frac{\vartheta_s e_0 h^3 ctg^2 \varphi}{12R^2} + Q_s + N_s \vartheta_s - \frac{v_\theta}{R} M_s \vartheta_s - \frac{\vartheta_s^2 e_0 h^3}{8R^2} ctg\varphi;$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h};$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{ctg\varphi}{R} E_\theta.$$

Отримана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку описує напружено-деформівний стан гнучкої струмонесучої ортотропної усіченої сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю.

Додавши до отриманої системи рівнянь початкові й граничні умови, одержуємо крайову задачу.

АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ. Дослідження осесиметричного напружено-деформівного стану оболонок обертання змінної вздовж меридіана товщини під дією силових і температурних навантажень приводить до розв'язання нелінійної крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = \vec{F}(s, \vec{N}), \quad (3)$$

$$\vec{g}_1(\vec{N}(s_0)) = 0, \vec{g}_2(\vec{N}(s_N)) = 0, \quad (4)$$

де $\vec{N} = \{u, w, \vartheta_s, N_s, Q_s, M_s, B_\gamma, E_\theta\}^T$; \vec{F} – вектор правої частини системи рівнянь (1); \vec{g}_1, \vec{g}_2 – задані вектори.

Крайова задача розв'язується чисельно відповідно до методики, яка ґрунтується на основі послідовного застосування схеми Ньюмарка [9], методу квазілінеаризації [5] та методу дискретної ортогоналізації [6].

На першому кроці, у системі диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, щоб відокремити змінні за часом, використовуємо неявну схему Ньюмарка для інтегрування магнітопружних рівнянь. Неявна схема, як правило, абсолютно стійкі і дозволяють великі кроки за часом.

На наступному етапі застосовуємо метод квазілінеаризації, за допомогою якого нелінійна задача замінюється послідовністю лінійних крайових задач.

Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації. Спочатку, за початкове наближення вибирається розв'язок лінійної задачі, на наступному етапі, обираються розв'язки, які отримані на попередньому кроці. Така схема значно зменшується кількість ітерацій, необхідних для розв'язання цієї проблеми [7]

ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД. Розглянемо задачу про напружено-деформівний стан зрізаної сферичної оболонки змінної товщини $h = 8 \cdot 10^{-2} (1 - 0.2 \sin \frac{\pi s}{l})$ (l – довжина дуги). Оболонка знаходиться під впливом нормального навантаження $P_\gamma = 1.3 \cdot 10^2 \sin \omega t$ (ω – колова частота) і зовнішнього електричного струму $J_{\theta cm} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$.

Граничні умови обрані наступним чином:

$$u = w = \vartheta_s = 0; \quad B_\gamma = 0.3 \sin \omega t \quad \text{при } s = s_0;$$

$$u = w = M_s = 0; \quad E_\theta = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

Параметри оболонок: $s_0 = 0.4 \text{ м}; \quad s_N = 0.78 \text{ м}; \quad \omega = 314.16 \text{ с}^{-1}; \quad B_s^\pm = 0.5 \text{ Т}.$

Для дослідження впливу матеріалу оболонки на напружено-деформівний стан порівняємо напружено-деформівний стан ортотропних зрізаних оболонок з бороалюмінію, берилію та кадмію.

Параметри матеріалів:

1) бороалюміній

$$e_s = 22.9 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2; \quad e_\theta = 10.7 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2;$$

$$v_s = 0.262; \quad v_\theta = 0.32; \quad \rho = 2600 \text{ кг / м}^3; \quad \mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн / м};$$

$$\sigma_1 = 0.454 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \quad \sigma_2 = 0.454 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1};$$

2) кадмій

$$e_s = 8.1 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2; \quad e_\theta = 2.82 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2;$$

$$v_s = 0.3; \quad v_\theta = 0.3; \quad \rho = 8640 \text{ кг / м}^3; \quad \mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн / м};$$

$$\sigma_1 = 0.147 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \quad \sigma_2 = 0.147 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1};$$

3) берилій

$$e_s = 28.8 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2; \quad e_\theta = 33.53 \cdot 10^{10} \text{ Н / м}^2;$$

$$v_s = 0.03; \quad v_\theta = 0.09; \quad \rho = 2300 \text{ кг / м}^3; \quad \mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн / м};$$

$$\sigma_1 = 0.279 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \quad \sigma_2 = 0.0321 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1};$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Результати розв'язку розглянутої задачі приведені нижче у вигляді графіків.

На Рис. 1 показано розподіл максимального прогину w вздовж меридіана s в момент часу $t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. З Рис. 1 видно, що найбільший прогин відповідає матеріалу кадмію. Точки 1–11 за віссю s – це точки видачі результатів, які

відповідають $s = 0.4; 0.438; 0.476; 0.514; 0.552; 0.590; 0.628; 0.666; 0.704; 0.742; 0.78$. Оскільки $w/h \approx 12.33$, то прогин відповідає мембранній теорії. Значення прогину оболонки з берилію близький до нуля. Прогин для оболонки з бороалюмінію протилежно направлений прогину оболонки з кадмію. Відношення $w/h \approx 7.73$.

На Рис. 2. наведено розподіл прогину $w(t)$. Максимальні значення прогину досягаються при $t = 4 \cdot 10^{-3} c$, що відповідає результатам приведеним на Рис. 1.

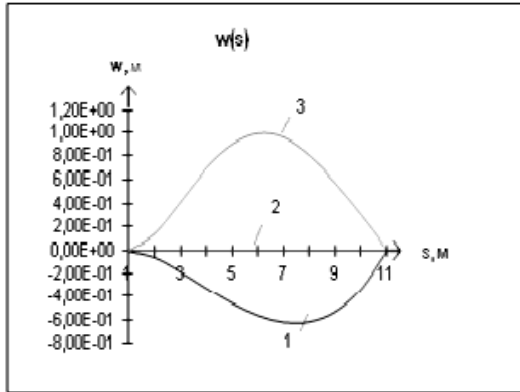


Рис. 1. Розподіл максимального прогину w вздовж меридіана s в момент часу $t = 4 \cdot 10^{-3} c$. (1–бороалюміній, 2–берилій, 3–кадмій)

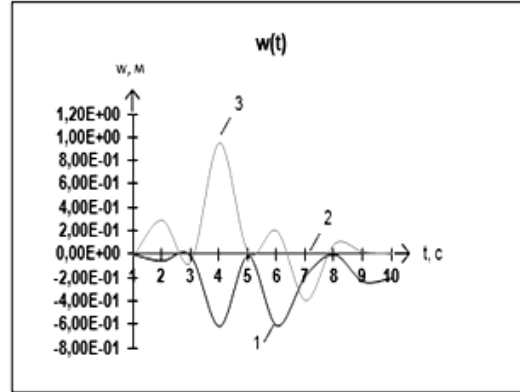


Рис. 2. Розподіл прогину w в залежності від часу t при $s = 0.4m$. (1–бороалюміній, 2–берилій, 3–кадмій)

На Рис. 3. показано розподіл нормальної складової сили Лоренца $\rho F_y^+(s)$ при $t = 4 \cdot 10^{-3} c$. Максимальні значення сили Лоренца виникають при дії електромагнітного поля для оболонок з бороалюмінію і кадмію при $s = 0.59m$. Зміщення максимальних значень пояснюється дією інерційних сил.

На Рис. 4. та Рис. 5. наведені значення колових напружень Максвелла на верхній поверхні оболонки T_0^+ та механічні напруження σ_0^+ на тій же поверхні оболонки з кадмію. Бачимо, що магнітні напруження Максвелла більші від механічних напружень на декілька порядків.

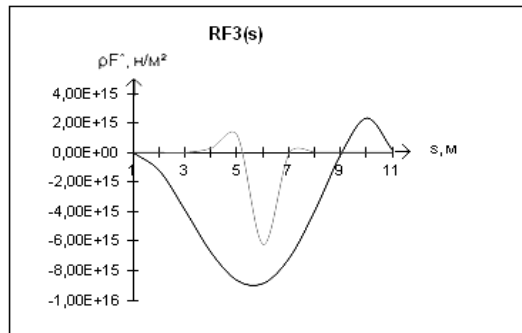


Рис. 3. Розподіл сили Лоренца ρF_y^+ вздовж меридіана s в момент часу $t = 4 \cdot 10^{-3} c$. (1–бороалюміній, 2–берилій, 3–кадмій)

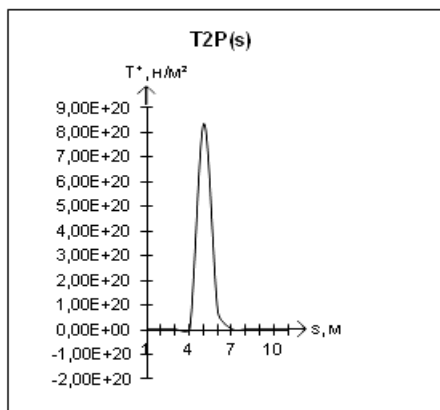


Рис. 4. Напруження Максвелла T_0^+ для оболонки з кадмію

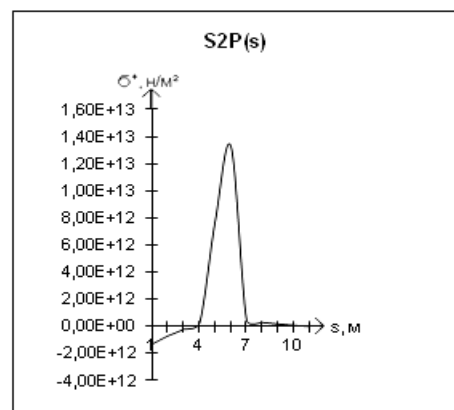


Рис. 5. Механічні напруження σ_0^+ для оболонки з кадмію

ВИСНОВКИ. В даній статті отримано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформівний стан гнучкої ортотропної сферичної оболонки з урахуванням ортотропної електропровідності. Наводиться числовий приклад. Проведено аналіз дослідження впливу матеріалу оболонки на напружено-деформівний стан ортотропних зрізаних оболонок з бороалюмінію, берилію та кадмію.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наукова думка, – 1988. – 261 с.
2. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. Учебник. – К.: ИПЦ "Киевский университет", 2010. – 403с. (укр.)
3. Келли А., Гроувс Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
4. Мольченко Л. В., Лоос И. И. Напряженное состояние гибкой ортотропной сферической оболочки в магнитном поле при воздействии внешнего тока и механической силы // Прикл. механика – 2013. – 49, №5, – С. 34–39.
5. Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary- Value Problems – Rand Corp., 1965 — P. 208.
6. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaikov G. G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – Kiev: S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical center of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2009. – P.550.
7. Molchenko L. V. A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells// Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol.41, No 5.
8. Molchenko L. V., Loos I. I., Indiaminov R. Sh. Determining the Stress State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 8. – P. 882–891.
9. Newmark N. M. A Method of Computation for Structural Dynamics //J. End Mech. Div. Proc. ASCE.–1959. – 85, No 7.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.14

Федорченко Л., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ ОРТОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ С ДИА- И ПАРАМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В статье рассмотрено нелинейную задачу магнитоупругости в осесимметричной постановке ортотропной сферической оболочки с учетом ортотропной электропроводности. Получена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений, которая описывает напряженно-деформированное состояние усеченной ортотропной сферической оболочки переменной жесткости. Проведен анализ напряженного состояния сферической оболочки в зависимости от материала оболочки.

Fedorchenko L., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

DEFORMATION OF FLEXIBLE ORTHOTROPIC SPHERICAL SHELL WITH ORTHOTROPIC ELECTROCONDUCTIVITY WITH DIA- AND PARAMAGNETIC MATERIALS

In article, the nonlinear problem of magnetoelastic orthotropic spherical shell with orthotropic electroconductivity in axisymmetrical position has been considered. The resolving system of differential equation for stress-strain state truncated orthotropic spherical shell of variable stiffness. The analysis of strain state orthotropic spherical shell depending on the material of the shell has been carried.

УДК 534 +531.7+53.082.5

Л. Яровой, канд. техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ФАЗИ В ЛАЗЕРНОМУ ДОППЛЕРІВСЬКОМУ ВІБРОМЕТРІ З ТРИХВИЛЕВИМ ФОТОЗМІШУВАННЯМ

Для ефективного використання лазерного доплерівського віброметра з трихвилевим фотозмішуванням (ТХФ) запропоновано алгоритм визначення оптимальної фазової різниці між зондувальним та додатковим опорним променями. Особливістю нового підходу є його проста практична реалізація, яка не потребує додаткових технічних засобів. Метод теоретично обґрунтовано та практично підтверджено за допомогою комп'ютерної моделі лазерного віброметра з ТХФ. Подано аналіз похибок застосування зазначеного методу, показано його високу ефективність і високу точність, що сягає рівня ± 0.015 радіан.

ВСТУП. Вимірювання вібрації та механічних коливань поверхонь та тіл посідає значне місце у засобах прикладної механіки. У поєднанні з лазерними доплерівськими засобами вимірювання (ЛДВ) безконтактні методики дозволяють вирішувати різноманітні унікальні задачі. Можна, наприклад, згадати визначення параметрів руху [5] методи неруйнівного контролю [7, 8], зокрема, дефектоскопії [6] та інше.

Метод лазерної віброметрії з трихвилевим фотозмішуванням (ТХФ) є відносно новим перспективним методом, який забезпечує вимірювання коливань з надвисокою чутливістю до малих амплітуд [2, 9]. Особливістю метода ТХФ є залучення до процесу вимірювання додаткової когерентної хвилі в додаток до двох інтерферуючих хвиль в класичному ЛДВ. Шляхом тонкого налаштування амплітуди і фази цієї хвилі відносно таких в основній зондувальній хвилі можна досягти суттєвого підвищення чутливості приладу [3]. Вимірювання та налаштування інтенсивностей двох взаємодіючих хвиль, в принципі, може бути виконано в реальному часі суто оптоелектронними засобами [1]. Наявність, відслідковувати фазову різницю, котра часто змінюється в часі, вкрай важко, а подекуди й неможливо. Ця проблема обмежує використання віброметрів з ТХФ випадками, коли експериментом жорстко задані та лишаються незмінними фазові співвідношення між взаємодіючими лазерними хвилями. Метою даної роботи є розробка підходів, що надають можливість вимірювати та налаштовувати фазову різницю в схемі ЛДВ безпосередньо під час експерименту засобами самого віброметра.

АНАЛІЗ СИГНАЛІВ ЛАЗЕРНОГО ВІБРОМЕТРА З ТХВ В НАБЛИЖЕННІ МАЛИХ АМПЛІТУД КОЛИВАНЬ. При трихвилевому фотозмішуванні на поверхні фотодетектору інтерферують три когерентні хвилі: e_0 – опорна хвиля, e_1 – зондувальна хвиля та ще одна хвиля e_2 . Найбільш поширені лазерні віброметри, що побудовані за гетеро-

динною схемою. Це означає, що опорна хвиля e_0 має зсув по частоті гетеродина f_0 відносно зондувальної e_1 та третьої хвилі e_2 . Третя хвиля також e_2 може розглядатися в залежності від схеми ЛДВ як друга опорна [2], або як друга зондувальна хвиля. Головна вимога для цієї додаткової хвилі, щоби її несуча співпадала з несучою зондувальної хвилі e_1 .

Струм i_{det} фотоприймача вібрметра є пропорційним сумарній інтенсивності лазерного випромінювання $E^2 = (e_0 + e_1 + e_2) \cdot (e_0 + e_1 + e_2)^*$. Як показано в [9], складова фотоструму на частоті гетеродина може бути записана у вигляді $i_{det}(t) = I(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t - \phi(t))$. Саме спостереження за фазовою чинником (точніше миттєвою частотою $\omega(t)$, як похідною від фази) дозволяє відновити закон зміни миттєвої швидкості $v(t)$ досліджуваного об'єкту за формулою

$$v(t) = \frac{\omega(t)}{2k}, \tag{1}$$

де k – хвилевий вектор лазерного випромінювання.

У загальному випадку, коли обидва промені відбиваються від поверхні, що коливається за гармонічним законом $x_{1,2}(t) = X_{1,2} \cos(\Omega t)$, де X_1 та X_2 – амплітуди в точках опромінювання, а Ω – частота досліджуваних коливань, формула для миттєвої частоти має вигляд:

$$\omega'(t) = -k \cdot \Delta X \Omega \sin(\Omega t) \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cdot \cos(2k \cdot \Delta X \cos(\Omega t) + \Delta\phi) + \eta^2 + 1} \right] - 2k \cdot X_2 \Omega \sin(\Omega t) \tag{2}$$

де $\Delta X = X_1 - X_2$, $\eta = E_1 / E_2$ – відношення амплітуд, а $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ початкова фазова різниця зондувальної та додаткової хвиль. Зазначимо, також, що надалі будемо використовувати термін "вихідний сигнал вібрметра" маючи на увазі електричний сигнал, котрий пропорційний миттєвій частоті (2) і пов'язаний з досліджуваною миттєвою швидкістю (1).

Як було зазначено в [3, 9] при наявності ТХФ спектр доплерівського сигналу (2) має складний вигляд. За певних умов [3], коли амплітуди коливань значно менші від довжини хвилі форма сигналу наближається до гармонічної досягаючи максимального значення при умові $\Delta\phi = \pi$. Іншою умовою значного підсилення сигналу є наближення $\eta \rightarrow 1$.

Експериментально показано, що контролювати амплітуди (інтенсивності) E_1 та E_2 і регулювати їх величину можна за допомогою оптоелектронних засобів, наприклад, додаткових фотоприймачів та рідкокристалічних комірок [2, 3]. На відмінність амплітудам початкова фазова різниця $\Delta\phi$ є сталим або повільно змінним чинником фазового сигналу. Тому вона не може бути автоматично відокремлено від сигналу доплерівського вібрметра з метою контролю її контролю.

Дослідимо спектр функції (2) для довільних величин фази $\Delta\phi \neq \pi$. Для отримання аналітичного результату обмежимося практично важливим випадком, а саме $k\Delta X \ll 1$. Для цієї умови можна вважати, що $\cos(2k \cdot \Delta X \cdot \cos(\Omega t)) \approx 1$, а $\sin(2k \cdot \Delta X \cdot \cos(\Omega t)) \approx 2k \cdot \Delta X \cdot \cos(\Omega t)$. Тоді знаменник у формулі (2) можна записати, як $1 + \eta^2 + 2\eta \cdot \cos(\Delta\phi) - 4\eta k \Delta X \sin(\Delta\phi) \cos(\Omega t)$. Розкладемо дріб у формулі (2), виділяючи малу змінну в знаменнику. У результаті отримаємо співвідношення:

$$\omega'(t) = -2\eta k \Delta X \Omega \sin(\Omega t) \cdot \left[\frac{\cos(\Delta\phi) + \eta}{2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)} + \frac{X_2}{\Delta X \eta} + \frac{k \Delta X (\eta^2 - 1) \sin(\Delta\phi) \cos(\Omega t)}{[2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)]^2} \right]. \tag{3}$$

З формули, що надана вище, отримуємо амплітуди першої та другої гармонік сигналу:

$$\omega'_I = -\Omega \cdot \frac{2\eta k \Delta X (\cos(\Delta\phi) + \eta)}{2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)} - 2k \cdot X_2 \Omega; \tag{4}$$

$$\omega'_{II} = -\Omega \cdot \frac{\eta k^2 \Delta X^2 (\eta^2 - 1) \sin(\Delta\phi)}{[2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)]^2}.$$

Аналіз амплітуди першої гармоніки показує, що вона дорівнює нулю в точках $\Delta\phi_z$:

$$\Delta\phi_z = \pi \pm \arccos\left(\frac{\eta^2 X_1 + X_2}{\eta(X_1 + X_2)}\right). \tag{5}$$

Якщо $X_2 = 0$, тобто третій промінь виконує функцію другої опорної хвилі, то формула (5) спрощується:

$$\Delta\phi_z = \pi \pm \arccos(\eta). \tag{6}$$

В точках $\Delta\phi_z$ амплітуда ω'_I перетинає вісь абсцис і в межах похибки експерименту, завжди $|\omega'_{II}| \gg |\omega'_I|$. Це наочно видно з графіків на рис. 1, де зображені амплітуди першої гармоніки для двох випадків: $X_2 = 0$ (суцільна

лінія) та $X_2 \neq 0$ (точкова лінія). Таким чином потрапляння системи в точки поблизу $\Delta\phi_z$ спричиняє видиме подвоєння частоти доплерівського сигналу і може бути просто зареєстровано вимірювальними засобами.

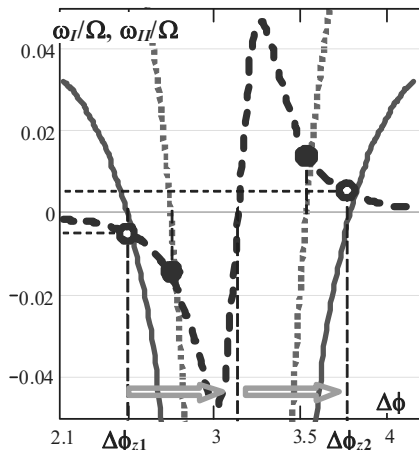


Рис. 1. Графіки залежності основної (суцільна та точкова криві) та другої (перервна лінія) гармонік доплерівського сигналу від фазової різниці $\Delta\phi$, розраховані за допомогою формули (4).

Точками показані амплітуди другої гармоніки для $\Delta\phi_z$, при яких перша гармоніка дорівнює нулю.

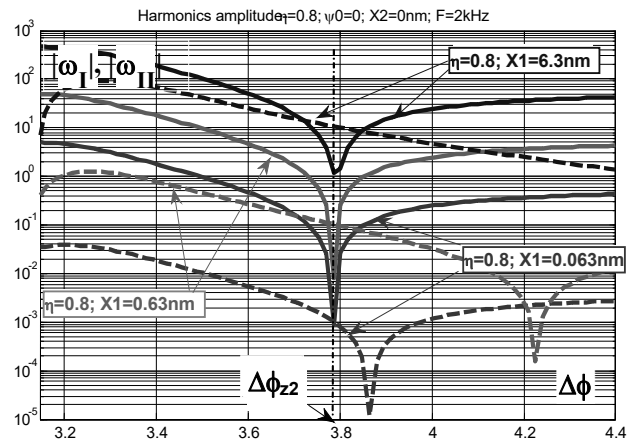


Рис. 2. Графіки залежності модуля основної (суцільна крива) та другої (перервна лінія) гармонік доплерівського сигналу від фазової різниці, розраховані чисельно за формулою (2).

Аналіз формул (5–6) також показує, що умовою існування точок $\Delta\phi_z \in \frac{X_2}{X_1} \leq \eta \leq 1$. Тому найширший діапазон можливих η існує при $X_2 = 0$.

Як впливає з формули (6) для випадку $X_2 = 0$ зв'язок між фазою $\Delta\phi$ та параметром η не залежить від частоти Ω та амплітуди коливання X_1 (за умови $kX_1 \ll 1$). Як підтвердження цього, на рис.2 представлено графіки першої гармоніки $|\omega_I(\Delta\phi)|$ (суцільна лінія) та другої гармоніки $|\omega_{II}(\Delta\phi)|$ (перервна лінія) для амплітуд 6.3 нм, 0.63 нм та 0.063 нм, які отримані з точної формули (2) чисельним методом.

Зауважити, що діапазон амплітуд з боку більших амплітуд обмежується умовою $kX_1 \ll 1$ (для лазерного випромінювання $\lambda = 0.63 \mu$ ця границя знаходиться приблизно на 10 нм).

З боку малих амплітуд обмеження стосуються тільки технічних можливостей апаратури та рівня завад в системі оскільки амплітуда другої гармоніки зменшується як квадрат амплітуди X_1 .

Точний спектральний аналіз формули (2) (дивись графіки для $|\omega_I(\Delta\phi)|$ та $|\omega_{II}(\Delta\phi)|$ на рис.2) вказує і на інший чинник, який залишився непоміченим при спрощеннях (3) – це існування точки мінімуму (або перетину осі абсцис) функцією ω'_{II} .

Таким чином, в діапазоні приблизно трьох декад нанометрових амплітуд існує можливість отримання точного значення величини фазової різниці прямо під час процесу вимірювань та керування її величиною для забезпечення ефективного підсилення сигналу в умовах ТХФ.

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ФАЗИ. На підставі отриманих результатів можна запропонувати алгоритм вимірювання невідомої фазової різниці $\Delta\phi_z$ між зондувальним та додатковим опорним променями ЛДВ. Нагадаємо, що для формування умов ефективного прийому сигналу ця фазова різниця повинна дорівнювати $\Delta\phi_{opt} = \pi$ [3].

Для функціонування запропонованого алгоритму може використовуватися та ж вимірювальна система, що описана в [3, 4]. Необхідні технічні умови – це можливість контролювати відношення амплітуд оптичних хвиль, котрі інтерферують на фотодетекторі (в установці [3] це досягається за допомогою двох додаткових фотодетекторів та керованих рідкокристалічних комірок). Інша технічна вимога – це можливість керувано змінювати фазу $\Delta\phi$ одного з променів, наприклад, додаткового опорного e_2 за допомогою, наприклад, п'єзо-комірки. В якості коливачів може бути використана вібрація досліджуваного об'єкту. Частота коливачів не має суттєвого значення, головне, щоб амплітуда коливачів відповідала умові $kX_1 \ll 1$.

Встановлення оптимальної фазової різниці виконується в два етапи. Спочатку, послаблюючи фільтрами промені e_1 або e_2 , встановлюється параметр $\eta < 1$, наприклад $\eta_z = 0.8$. Після цього, змінюючи оптичний шлях додаткового опорного променя, візуально спостерігають форму сигналу на осцилоскопі, або досліджують спектр на спектралізаторі. В момент подвоєння частоти коливачів на осцилоскопі, або зникнення основних частот у спектрі сигналу фіксують фазову різницю $\Delta\phi$. Нехай це буде перше рішення рівняння (6), у нашому випадку $\Delta\phi_{z1} = \pi - \cos(\eta_z) = 2.44$. Після цього змінюють оптичний шлях додаткового опорного променя в напрямку значного росту основної гармоніки сигналу (на рис. 1 це показано двома стрілками). Після подолання максимуму сигналу амплітуда основної гармоніки

знов починає зменшуватись і зникає при $\Delta\phi_{z2} = \pi + \cos(\eta_z) = 3.84$. Очевидно, що оптимальна фазова різниця

$$\Delta\phi_{opt} = \pi \text{ знаходиться точно посередині між } \Delta\phi_{z1} \text{ та } \Delta\phi_z : \Delta\phi_{opt} = \frac{1}{2}(\Delta\phi_{z2} + \Delta\phi_{z1}).$$

Зазначимо, що для визначення $\Delta\phi_{opt}$ нема необхідності вираховувати поточні фазові різниці $\Delta\phi_z$ на підставі зміни оптичних шляхів: треба тільки встановити оптичний шлях додаткового променя точно посередині між виміряннями "1" та "2" і фазова різниця автоматично набуде величини $\Delta\phi_{opt} = \pi$.

Оскільки запропонований метод не залежить ні від частоти, ні від амплітуди (в межах зазначених вище) коливань, тому встановлення $\Delta\phi_{opt}$ може відбуватися безпосередньо під час вимірювань, коли параметри реального сигналу змінюються у часі.

СИМУЛЯЦІЯ МЕТОДА ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ФАЗИ. Перевірка ефективності запропонованого підходу до знаходження та встановлення оптимальної фазової різниці була проведена за допомогою моделі лазерного вібрметра, побудованої в середовищі MATLAB.

При моделюванні було вибрано такі параметри: частота коливань $F = 2kHz$, амплітуда коливань $\Delta X_1 = 0.63 \mu$, співвідношення амплітуд зондувального та додаткового опорного променів $\eta = 0.8$. Було виконано два типа симуляцій, а саме, ідеальний випадок та випадок з наявністю завад. У другому випадку в систему були введені амплітудні адитивні шуми заданого рівня, тобто моделювались обмеження реальної електронній системі обробки сигналу.

Відповідно до вище запропонованої методики при зміні фазової різниці спостерігалися сигнали та відмічались моменти зникнення основної гармоніки сигналу. На рис. 3 А–В подано відповідні графіки функції $u(t)$, яка пропорційна вихідному сигналу ЛДВ з ТХФ.

Рис. 3А зображує три епюри вихідного сигналу вібрметра поблизу фазової різниці $\Delta\phi_{z1}$. Суцільна крива показує форму сигналу в точці $\Delta\phi_{z1} = 2.4976$, точкова та перервні лінії відображають форму сигнал при відхиленні фази від $\Delta\phi_{z1}$ на 0.016 радіан (приблизно 0.9°). Видно, що навіть такі незначні відхилення суттєво змінюють форму сигналу і можуть бути надійно зареєстровані.

Картину погіршує наявність шумів. Рис. 3Б показує сигнал в присутності завади, середньоквадратичний рівень якої дорівнює амплітуді сигналу (0.63 нм). Бачимо, що як і в попередньому випадку, так і при наявності шумів зміна форми сигналу (принаймні його амплітуди) при переході через точку $\Delta\phi_{z1}$ (неперервна лінія) може бути також зареєстрована з похибкою не гірше ніж $\delta\phi = \pm 0.016$.

На рис. 3В зображено сигнал поблизу (перервна та точкова лінії) та безпосередньо в точці $\Delta\phi_{z2} = 3.786$ (неперервна лінія). Графіки подібні до рис.3А тільки форма сигналів змінилась на дзеркальну. Урахування завад дає таку ж картину, як і на рис.3Б, з тим ж самими висновками.

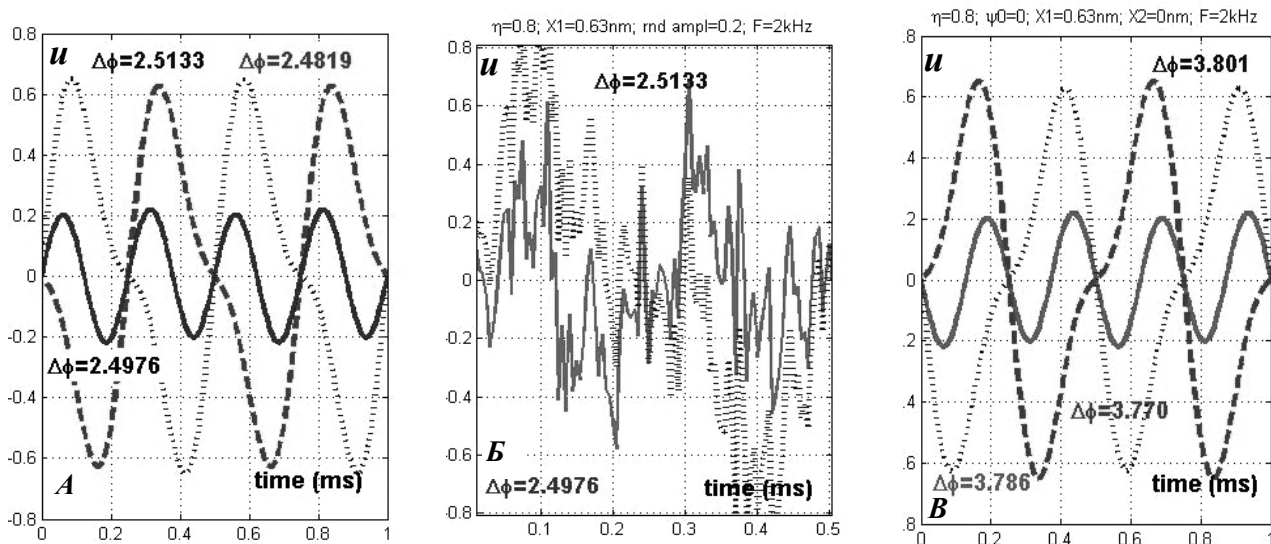


Рис. 3. Результати симуляції доплерівського сигналу ЛДВ з ТХФ для різних величин $\Delta\phi$ за допомогою комп'ютерної моделі, частота коливань – $F = 2kHz$, амплітуда коливань – $\Delta X_1 = 0.63 \mu$, $\eta = 0.8$.

А – форма сигналі (умовні одиниці) в окості $\Delta\phi_{z1}$; Б – ті ж сигнали в присутності адитивних завад;

В – форма сигналі в окості $\Delta\phi_{z2}$.

Досліджуючи результати симуляції на рис.3А, В слід звернути увагу ще й на те, що при переході через точку $\Delta\phi_{z2}$ (як і точку $\Delta\phi_{z1}$) фаза сигналу мінє знак.

За отриманими значеннями $\Delta\phi_{z1} = 2.4976$ та $\Delta\phi_{z2} = 3.786$ розраховано $\Delta\phi_{opt}$, що, як і очікувалось, дає $\Delta\phi_{opt} = 3.1418 = \pi$. Параметру $\eta=0.8$ відповідає зростання сигналу в чотири рази. З формули (2) слідує, що від-

хилення фази від $\Delta\phi_{opt}$ на $\delta\phi = \pm 0.016$ дає зменшення амплітуди підсиленого сигналу відносно максимального менше ніж 1%. Це означає, і що похибка вимірювання доплерівської частоти через невизначеність оптимальної фазової різниці буде менша одного відсотку.

ВИСНОВКИ. Для вимірювання субнанометрових коливань запропоновано метод, який дозволяє визначати та налаштовувати фазову різницю $\Delta\phi$ між двома хвилями в лазерному віброметрі з трихвильовим фотозмішуванням. Це надає можливість оптимального налаштувати параметри ТХФ безпосередньо під час експерименту і, як результат цього, суттєво підвищує чутливість до коливань з малою амплітудою.

В основу методу покладено факт, що при певних величинах $\Delta\phi_z$ амплітуда основної частоти доплерівського сигналу наближається до нуля, а друга гармоніка навпаки зростає. Таким чином, спостерігається подвоєння спектру, яке може бути легко зафіксовано як приладами, так і візуально. Важливо, що а ні частота досліджуваних коливань, а ні їх амплітуда (при умові $X \ll \lambda$) не впливають на величину $\Delta\phi_z$. Це означає, що всі маніпуляції з визначення $\Delta\phi_z$ можливо виконувати безпосередньо під час дослідження невідомих механічних процесів.

Встановлений зв'язок між величиною $\Delta\phi_z$ та відношенням амплітуд світлових променів η дозволяє за відомими значенням η знайти $\Delta\phi_z$, та навпаки.

Основні обмеження методу полягають в нестабільності параметра η , а, крім того, малого рівня другої гармоніки сигналу для коливань з амплітудами менше ніж 0.01 нм.

Метод перевірено за допомогою комп'ютерної моделі ЛДВ з ТХФ. Точність визначення оптимальної величини фазової різниці складає близько ± 0.016 рад, що при підсиленні в 12 дБ дає похибку менше ніж 1%.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Тришенков М. А. Фотоприемные устройства и ПЗС. Обнаружение слабых оптических сигналов // Москва. Радио и связь. – 1992. – 270с.
2. Яровой Л. К. Вимірювання наноамплітудних механічних коливань лазерним доплерівським віброметром з модуляцією зондувальної хвилі // Вісник Київського університету. Серія: механіка та математика. 2013. – Випуск. 30. – С. 55–59.
3. Яровой Л. К. Особливості роботи лазерного доплерівського віброметра з трихвильовим фотозмішуванням в нанометровому діапазоні // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. 2011. – Випуск. 26. – С. 39–43.
4. Пат. 94564 Україна G01B 9/02, G01C 3/00. Спосіб вимірювання миттєвої віброшвидкості / Яровой Л. К.; заявник власник патенту Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – №201013706 з'явл. 18.11.10; друк. 10.05.2011, Бюл. № 9.
5. López P. C. and Santoyo F. M. Measurement of dynamical paths from elastic objects at the entrainment frequencies using high speed digital holographic interferometry // . AIP Conf. Proc. Conf. on Vibration Measurements by Laser Techniques, – 2012. V. –1457. – P. 437–443.
6. Podzorny T., Budzyń G., and Rzepka J. In-site defectoscopy of granite blocks with a laser vibrometer // AIP Conf. Proc. Conf. on Vibration Measurements by Laser Techniques, Ancona, Italy. – 2012. – V.1457. P. – 377–385.
7. Pai P. F., Jin S. Locating structural damage by detecting boundary effects // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – V. 231, N4. – P. 1079–1110.
8. Staszewsk W. J., Lee B. C. and Traynor R. Fatigue crack detection in metallic structures with Lamb waves and 3D laser vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2007. – V.18. – P. 727–739.
9. Yarovi L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – V. 15. – P.2150–2156.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.15

Yarovi L., PhD Tech
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

DETERMINATION OF OPTIMAL PHASE IN LASER VIBROMETER WITH THREE WAVE INTERFERENCE

An efficient algorithm for determining the optimal phase difference between the probing and additional reference beam in the laser vibrometer with three waves interference (TWI) is found. The feature of the proposed approach is its simple practical implementation that does not require additional technical means. The method is theoretically grounded and practically confirmed with computer model of laser vibrometer with TWI. The paper analyzes the application of this method errors shows its high efficiency and high precision that reaches of ± 0.015 radians.

Яровой Л. К., канд. техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФАЗЫ В ЛАЗЕРНОМ ДОПЛЕРОВСКОМ ВИБРОМЕТРЕ С ТРЕХВОЛНОВЫМ ФОТОСМЕЩЕНИЕМ

Для эффективного использования лазерного доплеровского виброметра с трехволновым фотосмещением (ТВФ) предложен алгоритм определения оптимальной фазы между зондирующим и дополнительным лучами. особенностью подхода является его простая практическая реализация, которая не требует дополнительных измерительных средств. Метод теоретически обоснован и практически подтвержден с помощью компьютерной модели лазерного виброметра с ТВФ. В статье дан анализ ошибок предложенного метода, показано его высокая эффективность и высокая точность, которая достигает ± 0.015 радиан.

УЛІТКО АНДРІЙ ФЕОФАНОВИЧ (28.08.1934 – 24.06.2015)



24 червня 2015 року перестало битися серце доктора фізико-математичних наук, професора, члена-кореспондента НАН України, Заслуженого діяча науки УРСР, лауреата Державної премії УРСР в галузі науки і техніки, лауреата премії ім. О. М. Динника НАН УРСР, заслуженого професора Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кавалера ордена "За заслуги" III-го ступеня Андрія Феофановича Улітка – видатного вченого у галузі механіки, науково-педагогічна діяльність якого біля 40 років була пов'язана з механіко-математичним факультетом.

Андрій Феофанович народився в с. Богодарівка Лубенського району Полтавської області у селянській родині. Після закінчення середньої школи із золотою медаллю навчався на механіко-математичному факультеті Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у 1957 р. Згодом, у 1961 р. захистив кандидатську (науковий керівник – академік АН УРСР А. Д. Коваленко), а у 1971 р. – докторську дисертації (тема дисертації "Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости"). Працював у Інституті механіки НАН України на посадах молодшого, старшого наукового співробітника, очолював відділ електропружності (з 1972 р.).

У 1979 р. А. Ф. Улітко перейшов на викладацьку роботу до Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка. З 1980 р. по 1985 р. він – декан механіко-математичного факультету, з 1985 р. по 1988 р. – перший проректор університету, з 1985 р. по 2002 р. – завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки. Згодом Андрій Феофанович обіймав посаду завідувача науково-дослідної лабораторії механіки спряжених хвильових полів, створеної за його ініціативи у 1980 р., та провідного наукового співробітника НДЧ механіко-математичного факультету.

А. Ф. Улітко – автор понад 250 наукових праць, серед яких 8 монографій і декілька винаходів. Андрій Феофанович вніс помітний вклад в розвиток сучасної механіки. З його іменем пов'язане формування нового розділу механіки – "електропружність". Фундаментальні результати отримані А. Ф. Улітком з теорії зв'язаних електромеханічних процесів в п'єзоактивних керамічних середовищах. У його наукових працях вперше сформульовані фізично обґрунтовані умови електропружного навантаження п'єзокерамічних тіл, умови на дефектах в кераміці (тріщини), на внутрішніх електродах та при контактній взаємодії. А. Ф. Улітко отримано також фундаментальні результати з проблем механіки спряжених хвильових полів та векторних крайових задач математичної фізики. Зокрема, ним створено ефективний метод розв'язання векторних крайових задач просторової теорії пружності та електропружності, відомий в науковій літературі як метод власних векторних функцій А. Ф. Улітка. До важливих наукових здобутків А. Ф. Улітка останнього часу слід віднести його результати з теорії просторового руху пружних тіл.

Наукові результати А. Ф. Улітка впроваджені в розробки лабораторії механіки спряжених хвильових полів Київського національного університету імені Тараса Шевченка та в численні нормативні і спеціальні курси для студентів механіко-математичного факультету: на протязі багатьох років він читав розроблені ним спеціальні курси лекцій з теорії електромеханічних коливань, хвильових гірскопів та механіки контактної взаємодії тіл, що деформуються.

У 1984 р. А. Ф. Улітку за цикл наукових праць "Точні та наближені методи розв'язання тривимірних задач теорії пружності" присуджено премію ім. О. М. Динника АН УРСР, а у 1988 р., за монографію "Просторові задачі теорії пружності і пластичності" – Державну премію УРСР в галузі науки і техніки.

А. Ф. Улітко проводив значну науково-організаційну роботу: він був членом бюро Відділення механіки НАН України, головою експертної ради з механіки ВАК України, членом Комітету з Державних премій України в галузі науки і техніки, членом Національного комітету з теоретичної механіки України, членом Національного комітету з теоретичної механіки Росії, членом державної Акредитаційної комісії Міністерства освіти і науки України, членом редакційних колегій декількох наукових видань.

Під керівництвом А. Ф. Улітка на механіко-математичному факультеті тривалий час працював науковий семінар з теоретичної механіки, який мав високий авторитет серед фахівців.

Андрій Феофанович був талановитим педагогом-наставником.

На теренах вищої освіти він виховав яскраву плеяду механіків: серед його вихованців 33 кандидата і 5 докторів наук.

Світла пам'ять про Андрія Феофановича Улітка назавжди залишиться в серцях його численних друзів, учнів і колег.

Колектив механіко-математичного факультету

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферується в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/visnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними.

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

- текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows (*.doc)** без застосування **стильової розмітки**;
- поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
- комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
 - шрифт статті – Arial, розмір 9;
 - інтервал між рядками – одинарний;
 - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
 - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
 - класифікаційний індекс Універсальної десятикової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
 - відомості про авторів, що містять такі елементи перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
 - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", Шляхи..." тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку); (Arial Black, 10 pt, звичайний);
 - анотація, резюме (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."); анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
 - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
 - список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
 - дата надходження до редколегії, наприклад, "**Стаття надійшла до редколегії 09.11.05**". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

- кожну аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;
- джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!** таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
- усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;
- не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
- на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
- усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);

- усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
- формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:			Define Size:		
Text	Times New Roman		Full		9 pt
Function	Times New Roman		Subscript/Superscript		7 pt
Variable	Times New Roman	italic	Sub-Subscript/Superscript		6 pt
L.C.Greek	Symbol		Symbol		14 pt
UC.Greek	Symbol		Sub-Symbol		9 pt
Vector-matrix	Times New Roman	bold			
Number	Times New Roman				

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Bio), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (°C), Фаренгейта (°F), Реомюра (°R);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовки бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передують рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Название, Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск (2)34

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 8,6. Наклад 300. Зам. № 215-7437.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М2.
Підписано до друку 07.10.15

Видавець і виготовлювач

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"

01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43

☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128

e-mail: vpc@univ.kiev.ua

<http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02