

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

Заснований
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації
Серія КВ № 15436-4008 ПР,
22.06.2009 р.

Адреса редакції:
Україна, 69600,
м. Запоріжжя, МСП-41,
вул. Жуковського, 66

Телефон
для довідок:
(061) 228-76-28

Факс: (061) 764-45-46

В і с н и к

Запорізького національного університету

- **Фізико-математичні науки**

№ 2, 2013

Запоріжжя 2014

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2013. – 110 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Постанова президії ВАК України №1-05/4 від 14.10.09 р., бюлетень ВАК України №11, 2009 р.)

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 6 від «28» січня 2014 р.)

РЕДАКЦІЙНА РАДА

Головний редактор	– Гришак В.З.,	доктор технічних наук, професор
Заступник головного редактора	– Гребенюк С.М.,	кандидат технічних наук, доцент
Відповідальні редактори	– Гоменюк С.І.,	доктор технічних наук, професор
	Тамуров Ю.М.,	доктор фізико-математичних наук, професор
	Клименко М.І.,	кандидат фізико-математичних наук, доцент
	Швидка С.П.,	кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Андріанов І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина)
Ванько В.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)
Гіржон В.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гоман О.Г.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Гудрамович В.С.	– доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Козін І.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Колаковські З.	– доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)
Кондрат'єва Н.О.	– кандидат фізико-математичних наук, доцент
Кузьменко В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Маневич Л.І.	– доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)
Морачковський О.К.	– доктор технічних наук, професор
Ольшанецький В.Ю.	– доктор технічних наук, професор
Павленко А.В.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Перепелиця В.О.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Пожуєв В.І.	– доктор фізико-математичних наук, професор
Толок О.В.	– доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)

ЗМІСТ

АЛЕКСАНДРОВ И.А., МАТУЗКО Ю.О., ПРИВАРНИКОВ А.К. ДЕЙСТВИЕ НОРМАЛЬНОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗОК НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО.....	4
ГИБКИНА Н.В., РОГОВОЙ Н.С., СИДОРОВ М.В., СТАДНИКОВА А.В. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ.....	11
ГУЦУЛ О.В., СЛОБОДЯН В.З. ОСОБЛИВОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РІДИН ЕЛЕКТРОДНИМ ТА БЕЗЕЛЕКТРОДНИМ МЕТОДАМИ	21
ЖАРИКОВА И.В., КУРАПОВ С.В., НЕВЛЮДОВ И.Ш., ПАЛАГИН В.А., РАЗУМОВ-ФРИЗЮК Е.А., ЧЕЧЕНЯ В.С. ТРАССИРОВКА ПОДКЛЮЧАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ МНОГОЗОНДОВОГО УСТРОЙСТВА КОНТРОЛЯ BGA-КОМПОНЕНТОВ	28
ЗИНОВЕЕВ И.В., МАНЬКО Н.И.-В., СПИЦА И.А. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ НА ОСНОВЕ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКОЙ SIR-МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ	36
KEBERLE N.G. ANSWERING CONJUNCTIVE QUERIES OVER A TEMPORALLY-ORDERED FINITE SEQUENCE OF ABOXES SHARING ONE TBOX.....	41
КОСОЛАП А.И., ПЕРЕТЯТЬКО А.С. ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	50
КРАСІКОВА І.В. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЧИСЛОВИМ РАДІУСОМ ТА НАПІВНОРМОЮ МОРЕ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА ПРОСТОРАХ L_p ПРИ $1 < p < \infty$	55
МУХИН В.В., ЧОПОРОВ С.В. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ ДАННЫХ.....	60
НАУМЕНКО Д.А., КОНДРАТЬЕВА Н.А., МУХИН В.В., ЛЕОНТЬЕВА В.В. ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	65
НОВИЦЬКИЙ В.В., КОЛОМІЙЧУК О.П., СВЯТОВЕЦЬ І.Ф. МОДЕЛЮВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ.....	76
ROMANUKE V.V. REDUCING THE m -PARAMETER N -MODEL UNCERTAINTY TO A PROBABILISTIC DISTRIBUTION OVER MODELS THROUGH HAVING UNIFIED MODEL OUTPUTS	83
СЕМЕНЮТА М.Ф., ПЕТРЕНЮК Д.А. ПРО ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНОСТЬ ГРАФОВ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ	89
СЕМЧИШИН Л.М. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	94
ЩЕРБИНА И.В., БЕЛОВА О.В. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ ОРТОТРОПНЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ СЕКТОР И В ПОЛУПОЛОСУ	103
ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»	108

ДЕЙСТВИЕ НОРМАЛЬНОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗОК НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Александров И. А., аспирант, Матушко Ю. О., к. ф.-м. н., ст. преподаватель,
Приварников А. К., д. ф.-м. н., профессор

Запорожский национальный университет

Получено точное решение (в квадратурах) граничной задачи теории упругости о действии на многоугольную область границы однородного изотропного полупространства касательной нагрузки, направленной в одну сторону, и нормальной нагрузки, равномерно распределенных в области. Проведен анализ числовых результатов, обоснована их достоверность.

Ключевые слова: первая граничная задача теории упругости, упругое однородное изотропное полупространство, нормальная и касательная нагрузки, многоугольная область нагружения.

Александров І. О., Матушко Ю. О., Приварников А. К. ДІЯ НОРМАЛЬНОГО ТА ДОТИЧНОГО НАВАНТАЖЕНЬ НА ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР / Запорізький національний університет, Україна

Отримано точний розв'язок (у квадратурах) граничної задачі теорії пружності про дію на багатокутну область межі однорідного ізотропного півпростору дотичного навантаження, спрямованого в один бік, та нормального навантаження, які рівномірно розподілені в області. Проведено аналіз чисельних результатів, обґрунтована їх вірогідність.

Ключові слова: перша гранична задача теорії пружності, пружний однорідний ізотропний півпростір, нормальне та дотичне навантаження, багатокутна область навантаження.

Alexandrov I. A., Matuzko Yu. O., Privarnikov A. K. AN ELASTIC SEMISPACE UNDER THE NORMAL AND TANGENTIAL LOAD / Zaporizhzhya national university, Ukraine

In the case of finding of the stresses and the displacements in the automobile roads the road itself is considered to be an elastic multilayer semispace with the finite number of layers [1, 2]. The load, created by the wheel, consists of two components – the normal load and the tangential load. It is considered that these components are evenly distributed in the domain of the contact of the wheel with the road [2, 3]. It is convenient to consider the domain of the contact as the convex polygon. It is necessary to solve the problem of elasticity theory, connected with the action of the normal and the tangential loads, which are evenly distributed in the polygonal domain, on the elastic multilayer foundation. To evaluate the stresses and the displacements in the multilayer foundation with the required accuracy it is necessary to solve an analogical problem for the elastic homogeneous semispace [3, 4, 5]. Note that the solution for the polygonal domain 10 of the semispace has been obtained only for the case of the normal load [5]. This article gives the exact solution (in quadratures) of the problem connected with the action of the normal and the *tangential loads*, which are evenly distributed in the polygonal domain. The method of the solution is based on the principle of superposition and on the known solutions of Boussinesq problem and Cherutti problem, connected with the action of the normal and the tangential concentrated forces on the elastic homogeneous isotropic semispace. The stresses and the displacements in the semispace $z \geq 0$ have been given in the form of the double integrals over the polygonal domain. The subintegral functions can have the integrable singularity, if the point (x, y, z) belongs to the loading site. These singularities have been eliminated and the double integrals have been transformed into the one-dimensional integrals after the division of the loading site into the triangles with the common vertex at the point $(x, y, 0)$ and the change of the variables. The exact expressions for all subintegral functions of the one-dimensional integrals have been obtained. These functions have the derivatives of any order. That is why it is recommended to use Gauss quadrature formula of the highest accuracy degree for the approximate evaluation of the one-dimensional integrals with the help of the computer [8]. The numerical results for the case of the semispace under the normal and the tangential evenly distributed in the polygonal domain loads have been given in the paper. The normal loading is directed to the exterior of the semispace and the tangential loading is parallel to the side of the rectangle. The characteristic of the laws of the distribution of the stresses and the displacements in the elastic semispace corresponds to the physics. The stresses and the displacements in the semispace in the distance from the loading site have been compared with the corresponding stresses and displacements in the semispace under the concentrated forces. The concentrated forces are statically equivalent to the distributed loads, the forces act in the center of the rectangle. The proximity of the numerical values in the points of the semispace, which are remote from the load, substantiates the validity of the theoretical results, the calculating formulas and the numerical results.

Key words: the first boundary problem, the elastic homogeneous isotropic semispace, the normal and tangential load, the polygonal domain.

ВВЕДЕНИЕ

В расчетах автомобильных дорог на прочность и жесткость дорожная одежда рассматривается как упругое многослойное полупространство с конечным числом слоев [1, 2]. В большинстве случаев область контакта колеса с дорогой можно приближенно считать выпуклым многоугольником. Нагрузка на дорогу со стороны колеса имеет две составляющие – нормальную и касательную. Считается, что эти составляющие равномерно распределены в области контакта колеса с поверхностью дороги [2, 3]. Возникает потребность в решении задачи теории упругости о действии на многослойное упругое

основание нормальной и касательной нагрузок, равномерно распределённых в произвольной многоугольной области. Для решения этой задачи необходимо предварительно решить аналогичную задачу для упругого однородного полупространства [3, 4, 5]. В данной работе точно решена (в квадратурах) задача о действии на упругое однородное изотропное полупространство нормальной и касательной нагрузок, равномерно распределённых в произвольной многоугольной области.

Анализ исследований и публикаций. Сформулированная задача была поставлена и решена для многослойного основания и упругого полупространства для частного случая области нагружения в форме круга [4]. Для многоугольной области нагружения делались попытки получить решение только для нормальной нагрузки [5]. Поэтому в практическом отношении задача об определении напряжений и перемещений в упругом однородном изотропном полупространстве, нагруженном нормальной и касательной нагрузками, равномерно распределёнными в многоугольной области, остается неисследованной.

Цель работы. Получить точное решение поставленной задачи, предложить удобный способ численной реализации этого решения, обосновать достоверность расчетных формул и численных результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Упругое однородное изотропное полупространство отнесем к правой декартовой системе координат $Oxyz$ с началом O на границе. Ось z направим вглубь полупространства по нормали к граничной плоскости. На границу $z=0$ полупространства $z \geq 0$ действуют нормальная нагрузка интенсивности q , а также касательная нагрузка интенсивности τ . Нормальная нагрузка направлена в отрицательную сторону оси z , касательная – в положительную сторону оси x . Требуется определить напряжения и перемещения в произвольной точке полупространства. Этой физической постановке задачи отвечает такая ее математическая постановка: требуется определить решение уравнений теории упругости в полупространстве $z \geq 0$, которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\text{при } z=0 \quad \sigma_{zz}(x, y, 0) = \begin{cases} q, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}, \quad \sigma_{xz} = \begin{cases} \tau, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}, \quad \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0;$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad u_x(x, y, z) \rightarrow 0, \quad u_y(x, y, z) \rightarrow 0, \quad u_z(x, y, z) \rightarrow 0.$$

Здесь D – конечная многоугольная область границы полупространства, необязательно выпуклая.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Воспользуемся известными решениями задач Буссинеска и Черутти [4, 6] о действии на упругое однородное изотропное полупространство $z \leq 0$ сосредоточенных сил Q и T , которые приложены в точке $(0, 0, 0)$. Сила Q направлена в отрицательную сторону оси z , а сила T в положительную сторону оси x .

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{3Q}{2\pi} \cdot \left[\frac{x^2 z}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right) \right], \\ \sigma_{yy}(x, y, z) &= \frac{3Q}{2\pi} \cdot \left[\frac{y^2 z}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{y^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right) \right], \\ \sigma_{zz}(x, y, z) &= \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5}, \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{yz^2}{R^5}, \quad \sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{xz^2}{R^5}, \\ \sigma_{xy}(x, y, z) &= \frac{3Q}{2\pi} \cdot \left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{xy(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right], \quad 2Gu_x(x, y, z) = -\frac{Q}{2\pi} \left[\frac{xz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x}{R(R+z)} \right], \\ 2Gu_y &= -\frac{Q}{2\pi} \left[\frac{yz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{y}{R(R+z)} \right], \quad 2Gu_z(x, y, z) = -\frac{Q}{2\pi} \left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right], \\ \sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{T}{2\pi} \left[-\frac{3x^3}{R^5} + (1-2\nu) \left(\frac{x}{R^3} - \frac{3x}{R(R+z)^2} + \frac{x^3(3R+z)}{R^3(R+z)^3} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy}(x, y, z) &= \frac{T}{2\pi} \left[\frac{3xz^2}{R^5} - 2(1+\nu) \frac{x}{R^3} \right] - \sigma_{xx}, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= -\frac{T}{2\pi} \frac{3xz^2}{R^5}, \quad \sigma_{yz}(x, y, z) = -\frac{T}{2\pi} \frac{3xyz}{R^5}, \quad \sigma_{xz}(x, y, z) = -\frac{3T}{2\pi} \frac{x^2 z}{R^5}, \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= \frac{T}{2\pi} \left[-3 \frac{x^2 y}{R^5} + (1-2\nu) \left(-\frac{y}{R(R+z)^2} + \frac{x^2 y (3R+z)}{R^3 (R+z)^3} \right) \right], \\
2Gu_x(x, y, z) &= \frac{T}{2\pi} \left[\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + (1-2\nu) \left(\frac{1}{R+z} - \frac{x^2}{R(R+z)^2} \right) \right], \\
2Gu_y(x, y, z) &= \frac{T}{2\pi} \frac{xy}{R} \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1-2\nu}{(R+z)^2} \right], \quad 2Gu_z(x, y, z) = \frac{T}{2\pi} \frac{x}{R} \left[\frac{z}{R^2} + \frac{1-2\nu}{R+z} \right].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь E – модуль Юнга материала полупространства, ν – его коэффициент Пуассона, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига.

Если силы Q и T приложены в точке $(s, t, 0)$ границы полупространства, то напряжения и перемещения в полупространстве можно получить из формул (1) путем замены в них x на $x-s$, а y на $y-t$.

Пусть нормальная нагрузка q и касательная τ равномерно распределены в многоугольной области D границы полупространства, причем нормальная нагрузка направлена в отрицательную сторону оси z , а касательная – в положительную сторону оси x , тогда на основании принципа независимости действия сил для искомых величин в точке (x, y, z) полупространства получим следующие точные формулы

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{3q}{2\pi} \iint_D \left[\frac{(x-s)^2 z}{R^5} + \frac{1-2\nu}{3} \left(\frac{R^2 - Rz - z^2}{R^3(R+z)} - \frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2} \right) \right] dsdt, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= -\frac{q}{2\pi} \iint_D \left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right] dsdt, \\
\sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \iint_D \left[-\frac{3(x-s)^3}{R^5} + (1-2\nu) \left(\frac{x-s}{R^3} - \frac{3(x-s)}{R(R+z)^2} + \frac{(x-s)^3(3R+z)}{R^3(R+z)^3} \right) \right] dsdt, \\
2Gu_z(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \iint_D \frac{x-s}{R} \left[\frac{z}{R^2} + \frac{1-2\nu}{R+z} \right] dsdt,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $R = \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2 + z^2}$. Заметим, что подынтегральные функции во всех интегралах (2) при $z=0$ могут иметь особенности в области интегрирования из-за обращения в нуль величины R в точке $(x, y, 0)$. Поэтому вычисление интегралов в формулах (2) на компьютере возможно лишь после их предварительного преобразования.

Пусть $(x, y, 0)$ – точка на границе полупространства, соответствующая точке (x, y, z) , в которой определяются напряжения и перемещения по формулам (2). Вершины области D условимся последовательно нумеровать по ходу часовой стрелки. Определим угол γ_k между векторами MM_k и MM_{k+1} :

$$\gamma_k = \arccos \left(\frac{(x_k - x)(x_{k+1} - x) + (y_k - y)(y_{k+1} - y)}{\sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2} \sqrt{(x_{k+1} - x)^2 + (y_{k+1} - y)^2}} \right).$$

Обозначим символом Δ_k – треугольник с вершинами в точках $M(x, y, 0)$, $M_k(x_k, y_k, 0)$, $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}, 0)$ $k = \overline{1, n}$, где n – число вершин многоугольника D . Тогда легко убедиться в том, что для подынтегральных функций $F(x, y)$, определенных для всех действительных x и y

$$\iint_D F(s, t) ds dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k \iint_{\Delta_k} F(s, t) ds dt,$$

где $\alpha_k = \text{sign}((x_k - x)(y_{k+1} - y) - (y_k - y)(x_{k+1} - x))$. Последняя формула справедлива при любом расположении точки $M(x, y, 0)$ на границе полупространства, а также и в тех случаях, когда многоугольник D не обязательно является выпуклым.

В каждом из двойных интегралов по треугольной области сделаем замену переменных $s = x + r \cos \theta$, $t = y + r \sin \theta$, получим

$$\iint_{\Delta_k} F(s, t) ds dt = \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} d\theta \int_0^{R(\theta)} F(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) r dr. \quad (4)$$

Здесь $R(\theta)$ – расстояние от точки $M(x, y, 0)$ до стороны треугольника с вершинами в точках $(x_k, y_k, 0)$, $(x_{k+1}, y_{k+1}, 0)$. Расстояние $R(\theta)$ измеряется вдоль луча из точки $M(x, y, 0)$, который образует угол θ с другим лучом из той же точки, сонаправленным с осью x . Угол θ отсчитывается от «другого» луча по ходу часовой стрелки. При таком соглашении λ_k – это значением угла θ для точки M_k .

Несложно получить методами аналитической геометрии такую формулу для расстояния $R(\theta)$

$$R(\theta) = \frac{(x_k - x)(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y)(x_{k+1} - x_k)}{(y_{k+1} - y_k) \cos \theta - (x_{k+1} - x_k) \sin \theta}. \quad (5)$$

Преобразуем все интегралы по треугольным областям в выражениях (2) для искомых напряжений и перемещений к указанным выше повторным интегралам. Воспользовавшись таблицами интегралов, например, Двайта [7], придем к таким расчетным формулам

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \left(\cos^2(\theta) \left(\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} \left(\frac{-z}{R^2(\theta) + z^2} + \frac{3-2\nu}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z} \right) - 2(1-2\nu) L_1(R(\theta), z) \right) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left(L_1(R(\theta), z) - \frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} (\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z)} \right) \right) d\theta,$$

$$\sigma_{yy}(x, y, z) = \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \left(\sin^2(\theta) \left(\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} \left(\frac{-z}{R^2(\theta) + z^2} + \frac{3-2\nu}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z} \right) - 2(1-2\nu) L_1(R(\theta), z) \right) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \left(L_1(R(\theta), z) - \frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} (\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z)} \right) \right) d\theta,$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} (\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z)} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + \frac{z^2}{R^2(\theta) + z^2} \right) d\theta,$$

$$\sigma_{yz}(x, y, z) = \frac{-q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \sin(\theta) \frac{R^3(\theta)}{(\sqrt{R^2(\theta) + z^2})^3} d\theta, \quad \sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{-q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos(\theta) \frac{R^3(\theta)}{(\sqrt{R^2(\theta) + z^2})^3} d\theta,$$

$$\sigma_{xy}(x, y, z) = \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} \left(\frac{-z}{R^2(\theta) + z^2} + \frac{3-2\nu}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z} \right) - 2(1-2\nu) L_1(R(\theta), z) \right) d\theta,$$

$$\begin{aligned}
2Gu_x(x, y, z) &= \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos(\theta) \left(\frac{-R(\theta)z}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} - (1-2\nu)R(\theta) + 2(1-\nu)zL_2(R(\theta), z) \right) d\theta, \\
2Gu_y(x, y, z) &= \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \sin(\theta) \left(\frac{-R(\theta)z}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} - (1-2\nu)R(\theta) + 2(1-\nu)L_2(R(\theta), z) \right) d\theta, \\
2Gu_z(x, y, z) &= \frac{-q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + 2(1-\nu) \right) d\theta. \\
\sigma_{xx}(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^3 \theta \left[\frac{3R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + \frac{R^3(\theta)}{\left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right)^3} - 3\ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta + \right. \\
&\quad + (1-2\nu) \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos \theta \left[\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} - 6\frac{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{R(\theta)} + 6\frac{z}{R(\theta)} + 2\ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta - \\
&\quad \left. - (1-2\nu) \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^3 \theta \left[-8\frac{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{R(\theta)} + \frac{8z}{R(\theta)} + \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + 3\ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta \right\}, \\
\sigma_{yy}(x, y, z) &= -\sigma_{xx}(x, y, z) + \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^2 \theta \sin \theta \left[-\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} - \frac{R^3(\theta)}{3\left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right)^3} + \ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta + \right. \\
&\quad \left. + 2(1-\nu) \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos \theta \left[-\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + \ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta \right\}, \\
\sigma_{zz}(x, y, z) &= \frac{-3\tau}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos \theta \frac{R^2(\theta) d\theta}{\left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right)^3}, \\
\sigma_{yz}(x, y, z) &= \frac{-3\tau z}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \sin \theta \cos \theta \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + \frac{z^2}{3\left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right)^3} \right] d\theta, \\
\sigma_{xz}(x, y, z) &= \frac{-3\tau z}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^2 \theta \left[-\frac{1}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + \frac{z^2}{3\left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right)^3} + \frac{2}{3z} \right] d\theta, \\
\sigma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^2 \theta \sin \theta \left[\frac{3R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + \frac{R^3(\theta)}{\left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right)^3} - 3\ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta - \right. \\
&\quad \left. - (1-2\nu) \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \sin \theta \left[-2\frac{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{R(\theta)} + 2\frac{z}{R(\theta)} + \ln\left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}\right) \right] d\theta - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-2\nu) \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^2 \theta \sin \theta \left[-8 \frac{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{R(\theta)} + \frac{8z}{R(\theta)} + \frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} + 3 \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2} \right) \right] d\theta \Bigg\} \\
2Gu_x(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \left[\sqrt{R^2(\theta) + z^2} - z - (1-2\nu) \left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2} - z \ln \frac{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z}{2z} \right) \right] d\theta + \right. \\
& \left. + \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \cos^2 \theta \left[\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} - 2z + (1-2\nu) \left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2} - z \ln \frac{\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + z}{2z} \right) \right] d\theta \right\}, \\
2Gu_y(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \sin \theta \cos \theta \left[\sqrt{R^2(\theta) + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{R^2(\theta) + z^2}} - (1-2\nu) \left(\sqrt{R^2(\theta) + z^2} - 2x \ln \left(z + \sqrt{R^2(\theta) + z^2} \right) \right) \right] d\theta, \\
2Gu_z(x, y, z) &= \frac{\tau}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left\{ z \int_{\lambda_k}^{\lambda_k + \alpha_k \gamma_k} \left[R(\theta) - z \operatorname{arctg} \frac{R(\theta)}{z} \right] d\theta + (1-2\nu) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \ln \frac{z + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{2z} d\theta \right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$L_1(R(\theta), z) = \begin{cases} \ln \left(z + \sqrt{R^2(\theta) + z^2} \right) & \text{при } z \leq 1, \\ \ln \left(\frac{z + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{z} \right) & \text{при } z > 1, \end{cases} \quad L_2(R(\theta), z) = \begin{cases} \ln \left(R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2} \right) & \text{при } z \leq 1, \\ \ln \left(\frac{R(\theta) + \sqrt{R^2(\theta) + z^2}}{z} \right) & \text{при } z > 1. \end{cases}$$

Напомним, что величина $R(\theta)$ определена формулой (5).

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера определим напряжения и перемещения в упругом полупространстве при действии на него нормальной нагрузки q и касательной τ , распределённых в прямоугольнике со сторонами $\Delta x = 1 \text{ см}$, $\Delta y = 2 \text{ см}$. Центр прямоугольника находится в точке $(0, 0)$. Вершины прямоугольника имеют координаты $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Тогда в интегралах (4) $n=4$. В расчётах предполагалось, что интенсивность нормальной нагрузки $q = 10^4 \text{ Па}$, интенсивность касательной нагрузки $\tau = 10^4 \text{ Па}$, модуль Юнга материала полупространства $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона этого материала $\nu = 0,3$. Подынтегральные функции в определённых интегралах в правых частях формул (6) имеют производные любого порядка по переменной интегрирования. Поэтому для вычисления их с высокой точностью на компьютере целесообразно использовать квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы Гаусса) [8]. Экспериментами было установлено, что для получения четырёх верных десятичных цифр в конечных результатах вычислений достаточно использовать квадратурную формулу Гаусса с семью узлами для каждого определённого интеграла в формуле (4).

В таблице 1 приведены значения напряжений $\sigma_{zz}(x, y, z)$, $\sigma_{xz}(x, y, z)$, $\sigma_{xy}(x, y, z)$ и перемещения $u_x(x, y, z)$ в упругом полупространстве для нормальной нагрузки интенсивности q в прямоугольной области. Первая колонка с численными результатами для каждой величины соответствует действию нагрузки q , вторая колонка соответствует действию на полупространство сосредоточенной силы $Q = 2H$. В таблице 2 приведены значения напряжений $\sigma_{zz}(x, y, z)$, $\sigma_{xz}(x, y, z)$, $\sigma_{xy}(x, y, z)$ и перемещения $u_x(x, y, z)$ в упругом полупространстве для касательной нагрузки интенсивности τ в прямоугольной области (нагрузка направлена в положительную сторону оси x). Первая колонка с численными результатами для каждой величины соответствует действию нагрузки τ , вторая колонка соответствует действию на полупространство сосредоточенной силы $T = 2H$.

Таблица 1 – Нормальная нагрузка

x	y	z	$\sigma_{zz}(x, y, z)$		$\sigma_{xz}(x, y, z)$		$\sigma_{xy}(x, y, z)$		$u_x(x, y, z)$	
			q	Q	q	Q	q	Q	q	Q
1	0	1	0,1703	0,1688	0,1695	0,1688	$0,25 \cdot 10^{-10}$	0	$-0,488 \cdot 10^{-12}$	$-0,489 \cdot 10^{-12}$
2	0	1	0,01719	0,01708	0,03422	0,03416	$0,63 \cdot 10^{-10}$	0	$-0,141 \cdot 10^{-12}$	$-0,141 \cdot 10^{-12}$
3	0	1	0,00318	0,00301	0,00907	0,00905	$0,79 \cdot 10^{-10}$	0	$-0,827 \cdot 10^{-14}$	$-0,765 \cdot 10^{-14}$
4	0	1	0,00079	0,0008	0,00334	0,0032	$0,95 \cdot 10^{-10}$	0	$0,382 \cdot 10^{-13}$	$0,386 \cdot 10^{-13}$
5	0	1	0,00031	0,00027	0,00159	0,00138	$0,63 \cdot 10^{-10}$	0	$0,558 \cdot 10^{-13}$	$0,55 \cdot 10^{-13}$
6	0	1	0,00015	0,00011	0,00063	0,00068	$0,63 \cdot 10^{-10}$	0	$0,6 \cdot 10^{-13}$	$0,6 \cdot 10^{-13}$

Таблица 2 – Касательная нагрузка

x	y	z	$\sigma_{zz}(x, y, z)$		$\sigma_{xz}(x, y, z)$		$\sigma_{xy}(x, y, z)$		$u_x(x, y, z)$	
			τ	T	τ	T	τ	T	τ	T
1	0	1	-0,1687	-0,1688	-0,1688	-0,1688	$0,42 \cdot 10^{-10}$	0	$0,243 \cdot 10^{-11}$	$0,243 \cdot 10^{-11}$
2	0	1	-0,03417	-0,03416	-0,06833	-0,06832	$0,84 \cdot 10^{-10}$	0	$0,177 \cdot 10^{-11}$	$0,178 \cdot 10^{-11}$
3	0	1	-0,00906	-0,00905	-0,02719	-0,02716	$0,31 \cdot 10^{-10}$	0	$0,13 \cdot 10^{-11}$	$0,13 \cdot 10^{-11}$
4	0	1	-0,0032	-0,0032	-0,01283	-0,01282	$0,14 \cdot 10^{-11}$	0	$0,101 \cdot 10^{-11}$	$0,101 \cdot 10^{-11}$
5	0	1	-0,00138	-0,000138	-0,00692	-0,00692	$0,14 \cdot 10^{-10}$	0	$0,822 \cdot 10^{-12}$	$0,822 \cdot 10^{-12}$
6	0	1	-0,00069	-0,00068	-0,00413	-0,00412	$0,18 \cdot 10^{-10}$	0	$0,69 \cdot 10^{-12}$	$0,69 \cdot 10^{-12}$

Характер законов распределения вычисленных напряжений и перемещений в упругом полупространстве соответствует ожидаемой физической картине. Близость соответствующих численных значений в точках полупространства, удалённых от точек приложения рассматриваемых нагрузок, свидетельствует как о достоверности теоретических рассуждений и расчетных формул, так и о достоверности приведенных численных результатов.

ВЫВОДЫ

Получено точное решение (в квадратурах) граничной задачи теории упругости о действии на многоугольную область границы однородного изотропного полупространства касательной нагрузки, направленной в одну сторону, и нормальной нагрузки, равномерно распределенной в области. Предложен способ численной реализации этого решения. Обоснована достоверность теоретических и численных результатов, а так же расчетных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корсунский М. Б. Практические методы определения напряженно-деформированного состояния конструкций дорожных одежд / М. Б. Корсунский // В кн. : Труды Союздорнии. — М. : Союздорнии, 1966. — № 6. — С. 5-78.
2. Мозговой В. В. Розрахунок напружено-деформованого стану дорожнього одягу за допомогою ЕОМ / В. В. Мозговой // В кн. : Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. — К. : Будівельник, 1980. — № 26. — С. 9-12.
3. Приварников А. К. Об использовании адаптивных программ интегрирования при решении прикладных задач теории многослойных оснований / А. К. Приварников, А. Е. Мерзликин // Труды Союздорнии. Новое в проектировании конструкций дорожных одежд. — М. : Союздорнии, 1988. — С. 22-36.
4. Приварников А. К. Упругие многослойные основания / А. К. Приварников, В. Д. Ламзюк. — Днепропетровск, 1985. — 162 с. — Деп. в ВИНТИ 23.12.85, № 8789 – В.
5. Матузко Ю. О. Просторові контактні задачі для пружної багатопшарової основи з гладкою межею : автореф. дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» / Ю. О. Матузко. — Донецк, 2005. — 18 с.
6. Рекач В. Г. Руководство к решению задач теории упругости / В. Г. Рекач. — М. : Высшая школа, 1977. — 215 с.
7. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. — М. : Наука, 1978. — 228 с.
8. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. — М. : Наука, 1966. — 370 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Гибкина Н. В., к. т. н., доцент, Роговой Н. С., магистр, Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент,
Стаднікова А. В., ассистент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Рассматривается задача численного анализа перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей. Математической моделью служит начально-краевая задача для функции тока. Для её решения предлагается использовать структурный метод R -функций с аппроксимацией неопределенной компоненты структуры методом Галёркина. Анализ траекторий движения частиц жидкости проводится с помощью методов решения задачи Коши. Вычислительный эксперимент проведен для случая единичного квадрата с расположенными в нем двумя точечными вихрями при различных режимах их вращения. Построены линии уровня функции тока, поля скоростей жидкости и траектории движения отдельных частиц, изучены эволюции линейного и плоского элементов. Полученные результаты позволили найти эффективный режим перемешивания.

Ключевые слова: течение вязкой жидкости, задача перемешивания, функция тока, метод R -функций, метод Галёркина.

Гибкіна Н. В., Роговий Н. С., Сидоров М. В., Стаднікова Г. В. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧІ ПЕРЕМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ, ЯКЕ ВИКЛИКАНЕ СИСТЕМОЮ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Розглянуто задачу чисельного аналізу перемішування в'язкої рідини, яке викликане системою точкових вихорів. Математичною моделлю є початково-крайова задача для функції течії. Для її розв'язання запропоновано використати структурний метод R -функцій з апроксимацією невизначеної компоненти структури методом Гальоркіна. Аналіз траєкторій руху частинок рідини проводиться за допомогою методів розв'язання задачі Коші. Обчислювальний експеримент проведено для випадку одиничного квадрата із розташованими у ньому двома точковими вихорами для різних режимів їх обертання. Побудовано лінії рівня функції течії, поля швидкостей рідини і траєкторії руху окремих частинок, вивчені еволюції лінійного і плоского елементів. Отримані результати дозволили знайти ефективний режим перемішування.

Ключові слова: течія в'язкої рідини, задача перемішування, функція течії, метод R -функцій, метод Гальоркіна.

Gibkina N. V., Rogovyi N. S., Sidorov M. V., Stadnikova A. V. NUMERICAL ANALYSIS OF THE PROBLEM OF VISCOUS FLUID MIXING INDUCED BY THE POINT VORTICES SYSTEM / Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine

The paper considers the problem of numerical analysis of viscous incompressible fluid mixing caused by a system of point vortices. The solution of the mixing problem consists of two stages – the velocity field construction and the individual fluid particles trajectories study. Mathematical model of the first part of the mixing task is the initial-boundary value problem for the stream function. For its solution the R -functions structural method and the Galerkin method are proposed to use. A structure solution of the problem has been constructed and a system of ordinary differential equations for the coefficients of the uncertain component approximation has been derived. Mathematical model of the second part of the mixing task is the Cauchy problem for the trajectories of fluid particles motion. Its numerical analysis is carried out using one-step methods with automatic selection of the integration step. Using the methods of R -functions and Galerkin possible to obtain an approximate expression for the current (and hence the velocity field) in an explicit analytic form, so that the right side of the system describing the trajectory of motion of the particles is given analytically, rather than as an array. Using the R -functions method and Galerkin method allowed to obtain an approximate expression for the stream function (and hence the velocity field) in an explicit analytic form, so that the right side of the system describing the trajectory of the particles motion is given analytically, rather than as an array. Due to the proposed method the numerical analysis of viscous liquid mixing caused by a system of two vortices in the unit square has been conducted. Vortices were located at points with coordinates (0,23; 0,23) and (0,73; 0,73). Three modes of vortices rotational have been considered: vortices rotate in one direction with a constant intensity (first mode), the vortices rotate in different directions with a constant intensity (second mode) and vortices rotate with variable intensity and variable direction (third mode). For the case when the vortices rotate with variable intensity and variable direction, for each vortex the law of motion is given by as follows: for a vortex with coordinates (0,23; 0,23) the law is expressed in the form $\sin t$ and for a vortex with coordinates (0,73; 0,73) the law is expressed in the form $\cos t$, where t is time. For each mode the streamlines, the vector velocity fields, the trajectories of particles motion, the evolution of linear (line segment) and plane (rhomb) elements are given. The results obtained allow to conclude about the efficiency of the mixing only in the third mode.

Keywords: viscous fluid flow, mixing flow, stream function, Galerkin's method, the R -function method.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема математического моделирования и численного анализа перемешивания вязких жидкостей часто встречается в химической, фармацевтической, пищевой промышленности и других прикладных областях [2, 11, 18]. Кроме того, проблема перемешивания жидкостей является фундаментальной научной проблемой, тесно связанной с современными концепциями хаотической и регулярной динамики [1, 17]. Известно [3, 9], что при некоторых условиях ламинарные течения могут приводить к интенсивному перемешиванию. Такие режимы получили название хаотических и стали предметом интенсивного изучения как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения. Однако большинство методов, используемых при моделировании таких процессов, не обладают свойством универсальности и их сложно применять для «непримитивных» областей. В работах Дж.М. Оттино, Х. Арефа, В.В. Мелешко, Т.А. Дунаевой, Т.С. Краснополяской и др. [3, 7, 9, 11, 18] решалась задача перемешивания для таких простых областей, как круг, полукруг, круговой сектор и т.д., однако для изучения процесса перемешивания в более сложных областях предложенный ими математический аппарат не работает. Точно учесть геометрию области можно, используя конструктивный аппарат теории R -функций, предложенный акад. НАН Украины В.Л. Рвачевым [12]. Поэтому разработка новых методов численного анализа задачи перемешивания, основанных на применении метода R -функций, является актуальной научной проблемой.

Целью данной работы является математическое моделирование и численный анализ процесса перемешивания вязкой несжимаемой жидкости, вызванного системой точечных вихрей, методами R -функций и Галёркина. Решение задачи перемешивания состоит из двух этапов:

- 1) определение поля скоростей течения жидкости (формализм Эйлера):
- 2) исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости (формализм Лагранжа).

Для решения первой части задачи перемешивания необходимо разработать приближенно-аналитический метод, основанный на методе R -функций (построить структуру решения соответствующей начально-краевой задачи, разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты структуры методом Галёркина). Для решения второй части задачи перемешивания необходимо составить и решить (используя численные методы решения задачи Коши) систему уравнений движения лагранжевой частицы. Далее, полученные траектории движения нужно исследовать на наличие и характер хаотического поведения с помощью методов нелинейной динамики (определить стационарные точки, построить фазовые портреты, исследовать эволюции линейного и плоского элементов).

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4, 5]. Предварительные результаты были изложены в работах [6, 13-15].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать плоскопараллельный случай. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет область Ω . Движение жидкости в области Ω вызвано N точечными вихрями с интенсивностями $\Gamma_i(t)$, расположенными в точках (x_i, y_i) , $i=1, \dots, N$, t – время. Значениям $\Gamma_i(t) > 0$ соответствует поток, закручивающийся по часовой стрелке, $\Gamma_i(t) < 0$ – поток, закручивающийся против часовой стрелки.

Решение первой части задачи перемешивания заключается в получении поля скоростей (v_x, v_y) в области течения Ω . Будем считать, что рассматриваемое течение относится к ползущим и нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь, т.е., можно ограничиться рассмотрением т.н. приближения Стокса [8].

Плоское стоксово течение будем описывать с помощью функции тока $\psi(x, y, t)$, вводимой соотношениями [8]

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Начальные и краевые условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор \mathbf{v} . Так, если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращается нормальная и тангенциальная составляющая скорости (условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки. Исходя из этого, на границе $\partial\Omega$ области Ω можно задать значение функции тока ψ и её

нормальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$, где \mathbf{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Кроме того, для функции тока должно быть задано начальное условие $\psi|_{t=0}$.

Считаем, что граница $\partial\Omega$ области Ω – непротекаемая и неподвижная. Тогда задача математического моделирования течения жидкости в области Ω сводится к начально-краевой задаче для функции тока $\psi(x, y, t)$:

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nu \Delta^2 \psi = F(x, y, t) \text{ в } \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

где ν – кинематическая вязкость, Δ^2 – бигармонический оператор, $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$,

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \cdot \delta(x - x_i, y - y_i), \quad \delta(x, y) \text{ – двумерная дельта-функция Дирака.}$$

Решение второй части задачи перемешивания заключается в решении уравнений движения лагранжевой частицы

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t), \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t), \quad (4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (5)$$

и в построении и анализе траекторий движения.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для решения начально-краевой задачи (1)-(3) воспользуемся структурным методом акад. НАН Украины В.Л. Рвачёва [12].

Известно [16], что структура решения стационарной задачи Стокса

$$\Delta^2 \psi = F \text{ в } \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega,$$

имеет вид

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \quad (6)$$

где $f = EC\tilde{f}$, $g = EC\tilde{g}$ – продолжения функций \tilde{f} , \tilde{g} в Ω , оператор D_1 определяется равенством

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y},$$

Φ – неопределенная компонента структуры, а функция $\omega(x, y)$ обладает свойствами

а) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$;

б) $\omega > 0$ в Ω ;

в) $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, \mathbf{n} – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Функция $\omega(x, y)$ с указанными свойствами может быть построена с помощью R -функций для достаточно широкого класса областей [12].

Тогда в соответствии с (6) структура решения начально-краевой задачи (1)-(3), т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям (2), имеет вид

$$\psi(x, y, t) = \omega^2(x, y)\Phi(x, y, t),$$

где $\Phi = \Phi(x, y, t)$ – неопределенная компонента структуры.

Для аппроксимации неопределенной компоненты Φ воспользуемся методом Галёркина для нестационарных задач [10]. Для этого представим Φ в виде

$$\Phi(x, y, t) \approx \Phi_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \tau_k(x, y), \quad (7)$$

где $c_k(t)$, $k=1, \dots, n$, – неизвестные пока функции, $\{\tau_k\}$ – любая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.д.).

Представление Φ в виде (7) приводит к тому, что приближенное решение задачи (1)-(3) мы будем искать в виде

$$\psi_n(x, y, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(x, y), \quad (8)$$

где $\varphi_k = \omega^2 \tau_k$, $k=1, \dots, n$.

Заметим, что в сделанных предположениях $\{\varphi_k\}$ – координатная последовательность:

- 1) для любого k $\varphi_k \in H_{\Delta^2}$;
- 2) для любого n $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;
- 3) $\{\varphi_k\}$ полная в H_{Δ^2} .

В соответствии с методом Галёркина, неизвестные функции $c_k(t)$, $k=1, \dots, n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (8) в уравнение (1), первым n координатным функциям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $c_k(t)$, $k=1, \dots, n$,

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) [\varphi_k, \varphi_j]_{-\Delta} + \nu \sum_{k=1}^n c_k(t) [\varphi_k, \varphi_j]_{\Delta^2} = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} [\varphi_k, \varphi_j]_{-\Delta} &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy, \\ [\varphi_k, \varphi_j]_{\Delta^2} &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) dx dy, \\ (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \cdot \iint_{\Omega} \delta(x - x_i, y - y_i) \varphi_j(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \cdot \varphi_j(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Систему (9) нужно дополнить начальными условиями, которые получаются из (3):

$$c_k(0) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что решение первой задачи перемешивания получается в явном аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование при решении второй части.

Для исследования процесса перемешивания в физическом эксперименте обычно в окрашенную вязкую жидкость (например, глицерин) помещают каплю жидкости, окрашенной в другой цвет (так называемый точечный маркер), и наблюдают за его движением в области. При компьютерном моделировании такому эксперименту будет соответствовать решение задачи Коши (4), (5), для решения которой можно использовать явные одношаговые методы с автоматическим контролем точности [19].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Вычислительный эксперимент был проведен для прямоугольной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Рассматривалось три разных режима вращения вихрей: вихри вращаются в одном направлении с

постоянной интенсивностью (первый режим), вихри вращаются в разных направлениях с постоянной интенсивностью (второй режим) и вихри вращаются с переменной интенсивностью и переменным направлением (третий режим).

В рассматриваемую область помещено два вихря. Вихри были расположены в точках с координатами $(0,23;0,23)$ и $(0,73;0,73)$. Для случая, когда вихри вращаются с переменной интенсивностью и переменным направлением, для каждого вихря задается закон движения следующим образом: для вихря с координатами $(0,23;0,23)$ закон выражается в виде $\sin t$, а для вихря с координатами $(0,73;0,73)$ закон выражается в виде $\cos t$, где t – время.

Задача перемешивания была решена для каждого из трех режимов. На рис. 1 – 6 приведены полученные линии уровня функции тока и поля скоростей жидкости в различные моменты времени.

Для разных режимов вращения вихрей были найдены стационарные точки. Для каждого из режимов существует по две стационарные точки, координаты которых совпадают с координатами вихрей. Обе стационарные точки – точки типа «центр». Таким образом, при постоянной интенсивности вихрей перемешивание не будет эффективным, т.к. траектории движения частиц в окрестности точек типа «центр» имеют замкнутую структуру. Эффективного перемешивания можно достичь, изменяя интенсивности вихрей во времени, т.е., при третьем режиме.

На сетке с шагом 0,25 были построены фазовые траектории маркеров (рис. 8). Из рис. 8 б) видно, что для второго режима перемешивания траектории движения частиц стягиваются к окрестностям вихря и остаются там до конца перемешивания, что свидетельствует о неэффективном перемешивании в этом режиме. Из рис. 8 а) видно, что для первого режима перемешивания, несмотря на то, что частицы перемещаются по всей области, они всё же движутся по замкнутым траекториям, что свидетельствует о том, что перемешивание в этом случае лучше, чем в предыдущем, однако всё равно неэффективно. При третьем же режиме перемешивания (рис. 8 в)) частицы не стягиваются к окрестностям вихревых точек, а перемещаются по незамкнутым траекториям внутри области, что свидетельствует об эффективном перемешивании.

Также были исследованы эволюции линейного элемента (отрезка), расположенного в окрестности вихревой точки и в области, где влияние вихрей примерно одинаково. Расчеты проводились в рамках полного периода 2π . Результаты перемешивания (т.е. траектории частиц, образующих этот отрезок) приведены на рис. 9-11. Из анализа результатов видно, что перемешивание эффективно только в третьем режиме, так как в первых двух изначально близкие точки с течением времени незначительно расходятся, даже когда отрезок помещён в область с одинаковым влиянием двух вихрей.

Далее исследовались эволюции плоского элемента – небольшой области, состоящей из большого числа находящихся рядом точек. Эта область была расположена в окрестности вихревой точки и в области, где влияние вихрей примерно одинаково. Расчеты проводились также в рамках полного периода 2π . Результаты перемешивания (т.е. траектории частиц, образующих эту область) приведены на рис. 12-14. Из анализа результатов видно, что перемешивание эффективно только в третьем режиме, так как в первых двух изначально близкие точки с течением времени незначительно расходятся и остаются в окрестностях вихревых точек.

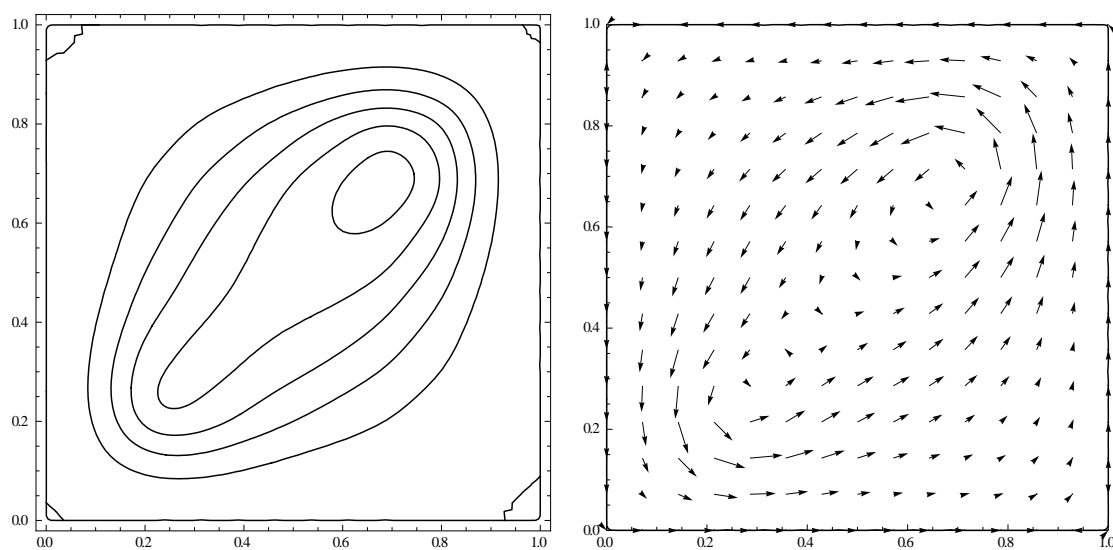


Рис. 1. Линии уровня функции тока и поле скоростей для первого режима перемешивания

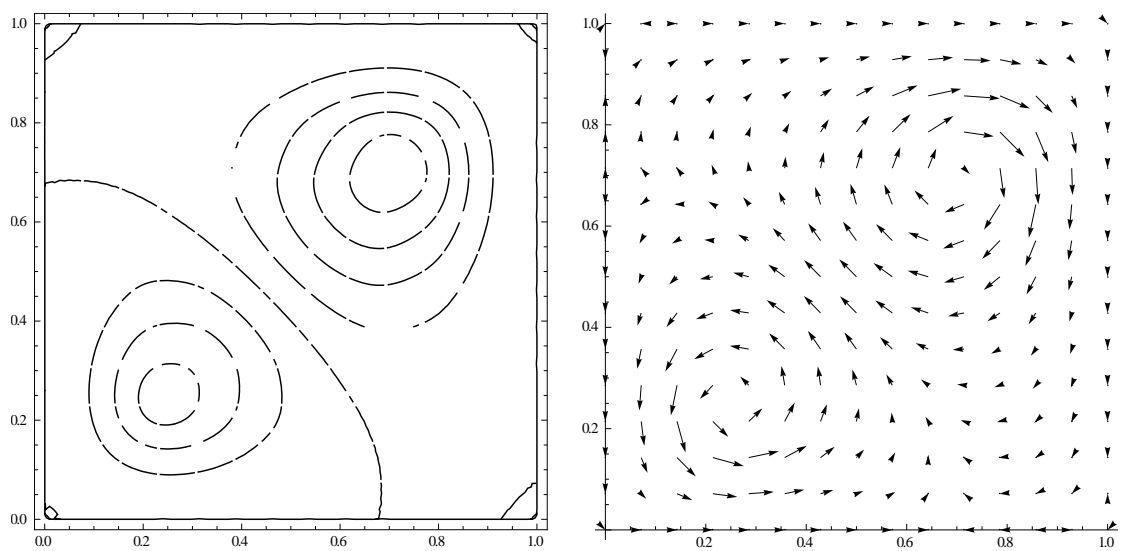


Рис. 2. Линии уровня функции тока и поле скоростей для второго режима перемешивания

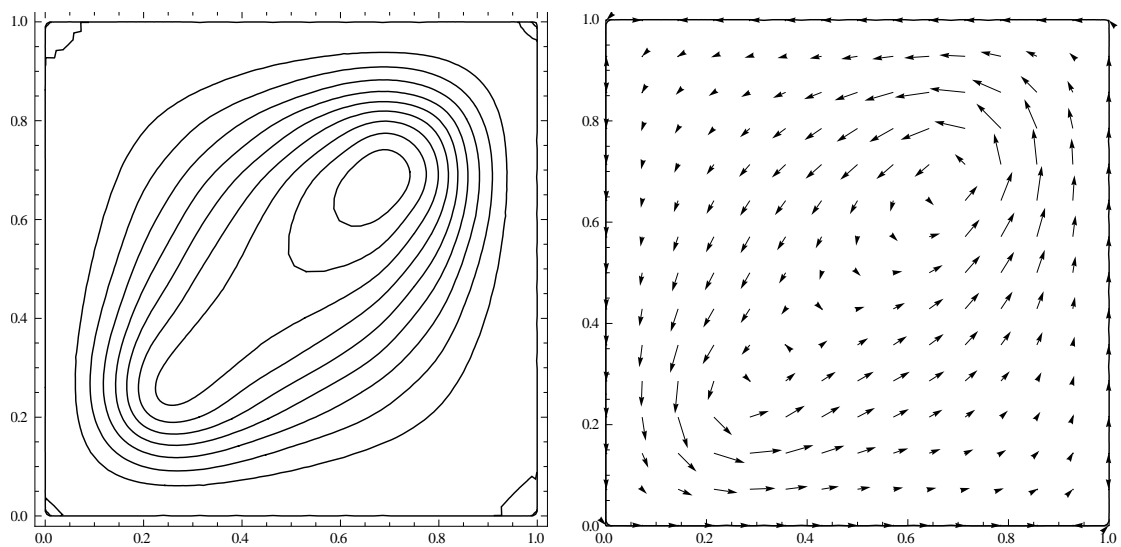


Рис. 3. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при $t = \frac{\pi}{4}$

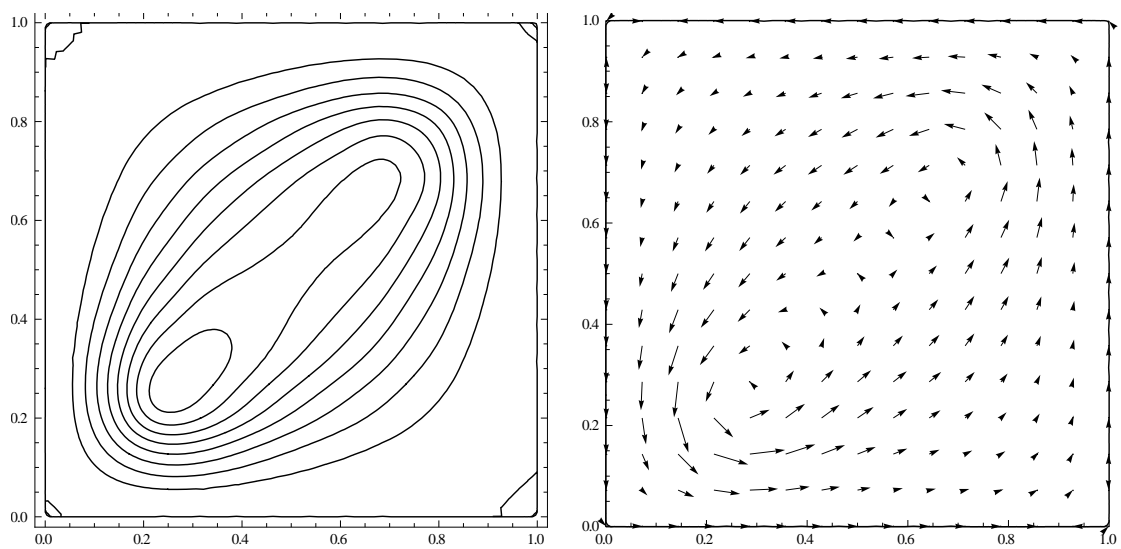


Рис. 4. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при $t = \frac{\pi}{3}$

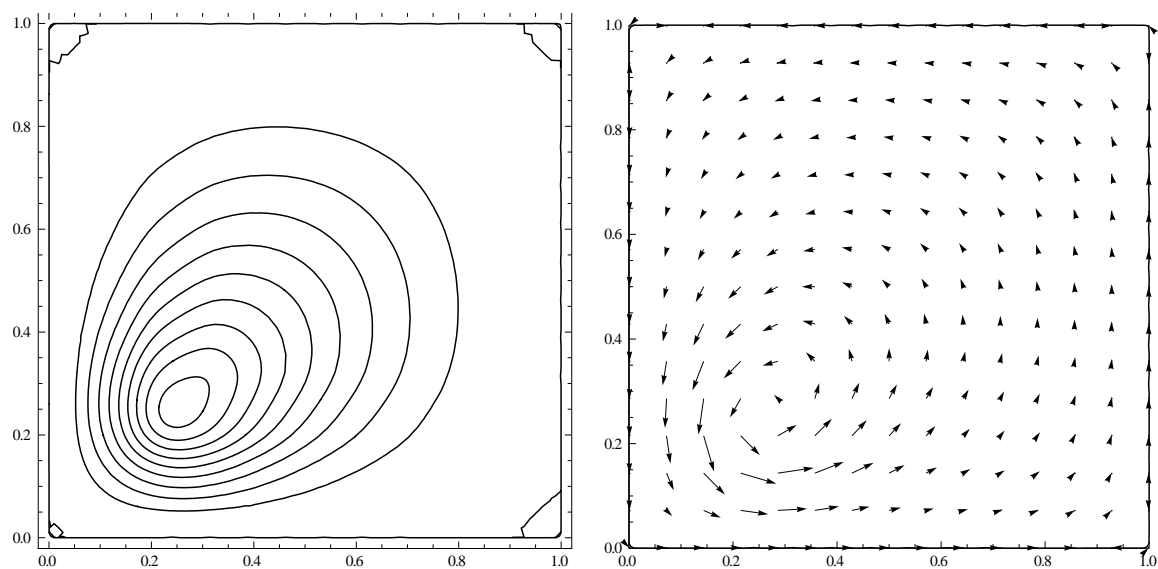


Рис. 5. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при $t = \frac{\pi}{2}$

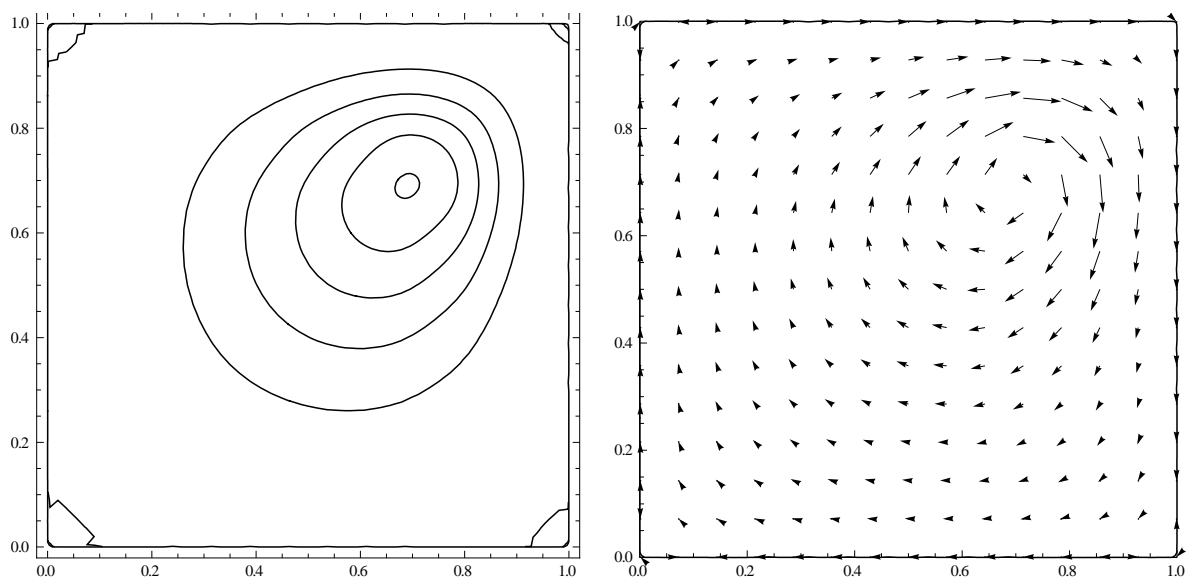


Рис. 6. Линии уровня функции тока и поле скоростей для третьего режима перемешивания при $t = \pi$

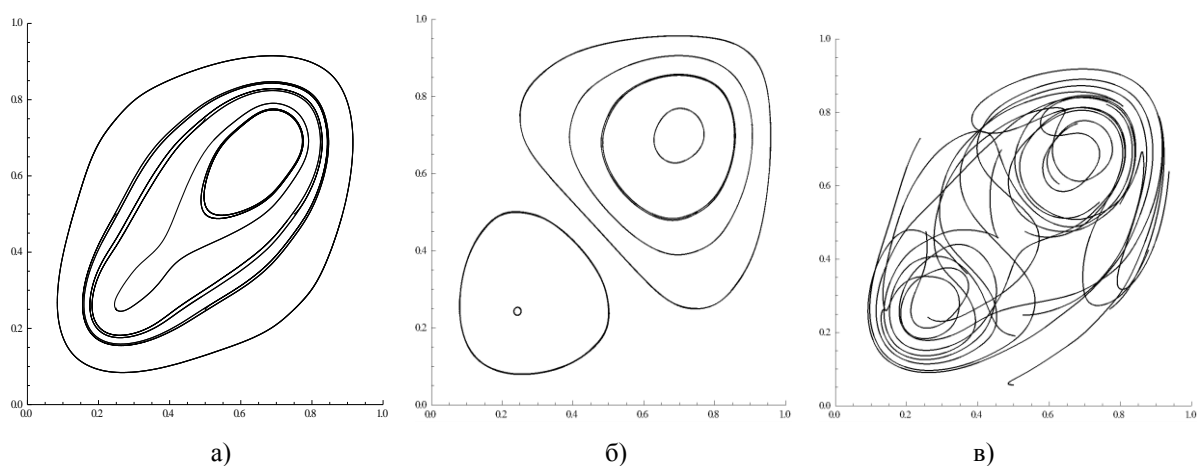


Рис. 8. Фазовые траектории при первом (а), втором (б) и третьем (в) режимах перемешивания

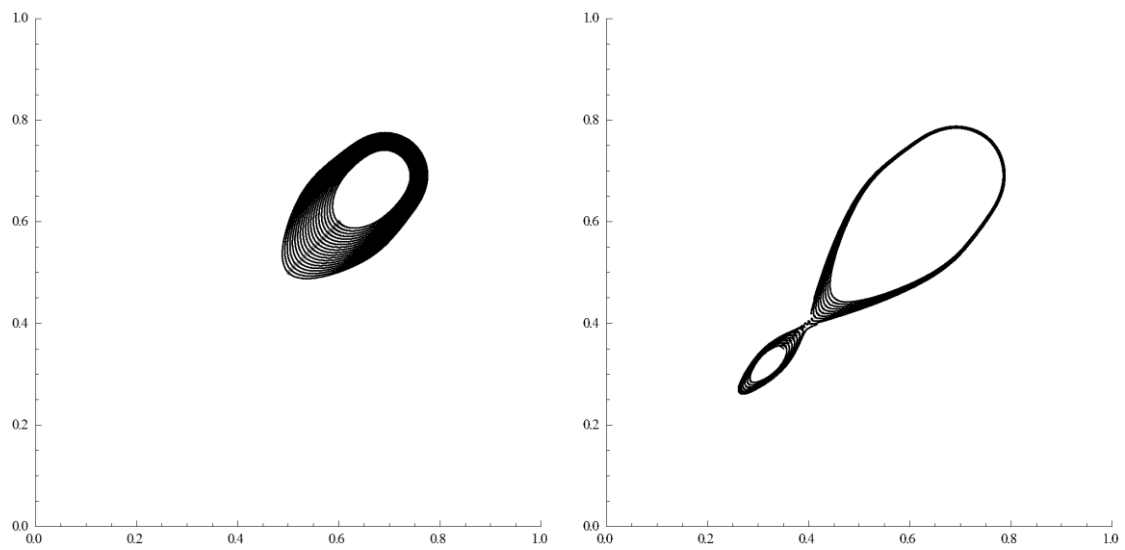


Рис. 9. Эволюция линейного элемента при первом режиме перемешивания

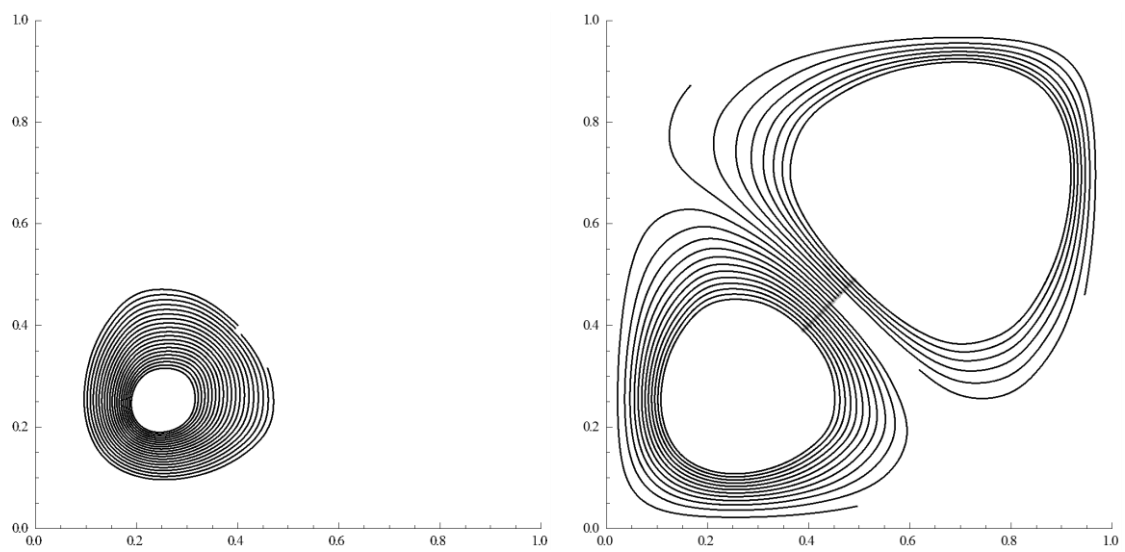
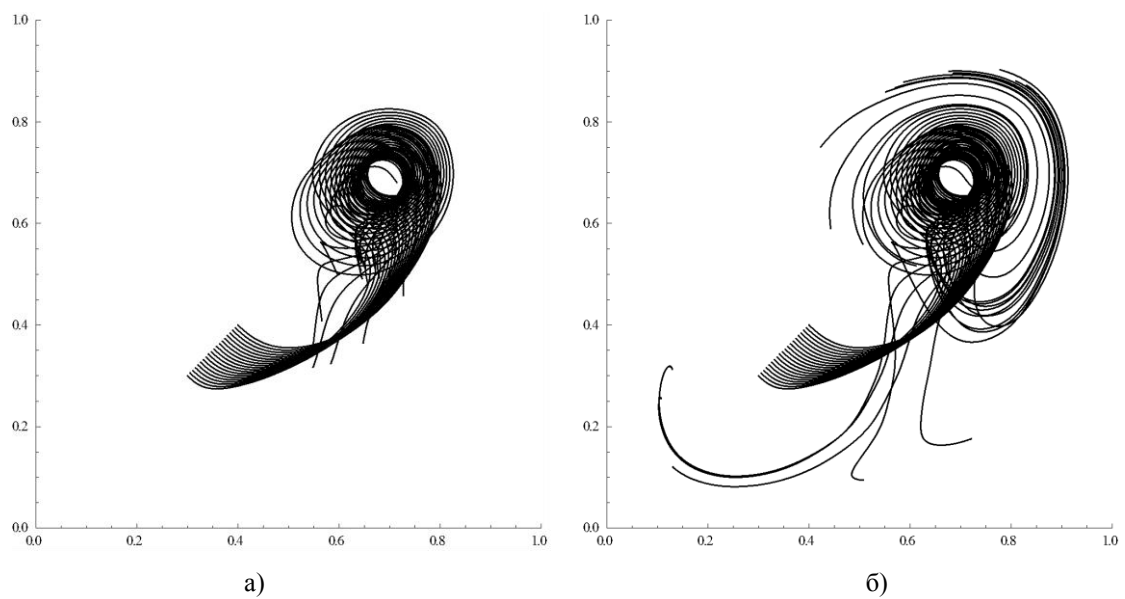


Рис. 10. Эволюция линейного элемента при втором режиме перемешивания

Рис. 11. Эволюция линейного элемента при третьем режиме перемешивания для $t = \frac{3\pi}{2}$ (а) и $t = 2\pi$ (б)

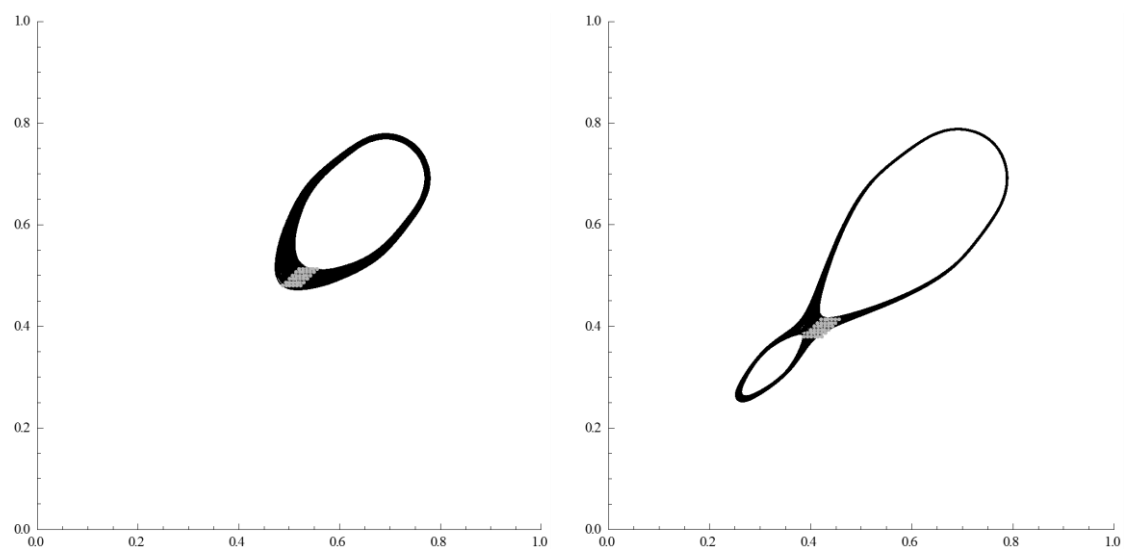


Рис. 12. Эволюция плоского элемента при первом режиме перемешивания

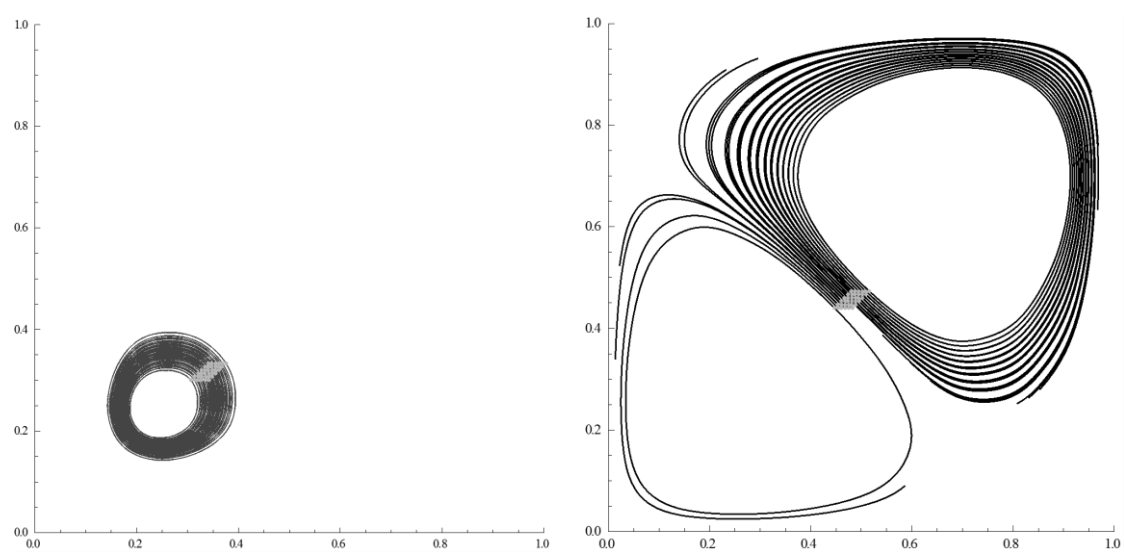
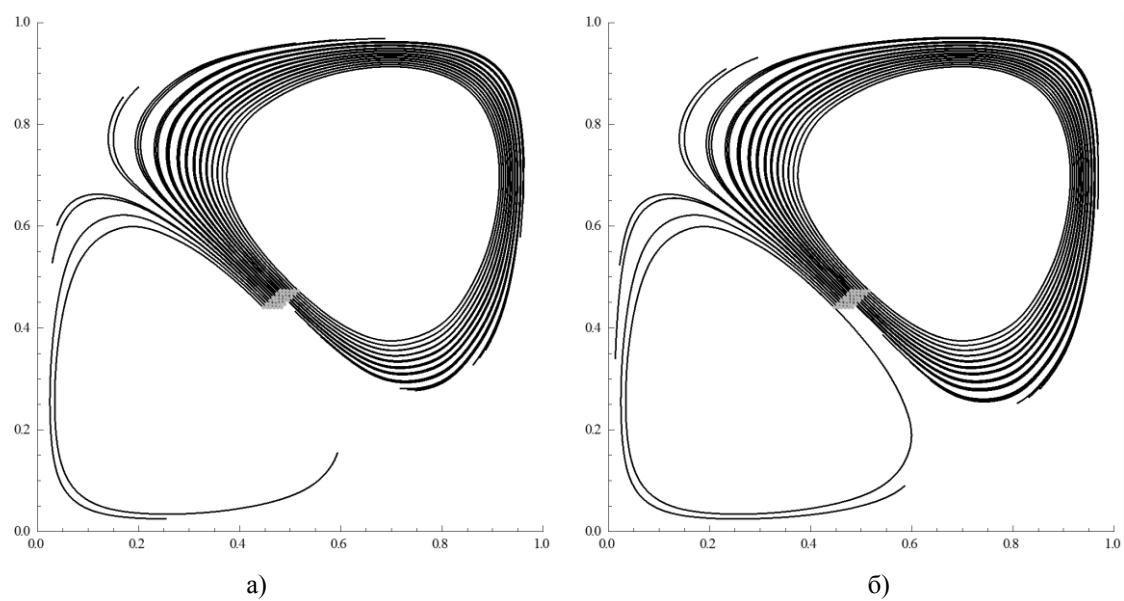


Рис. 13. Эволюция плоского элемента при втором режиме перемешивания

Рис. 14. Эволюция плоского элемента при третьем режиме перемешивания для $t = \frac{3\pi}{2}$ (а) и $t = 2\pi$ (б)

ВЫВОДЫ

В работе предложен метод численного анализа перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей. Метод основан на использовании структурного метода R -функций с аппроксимацией неопределенной компоненты структуры методом Галёркина. Благодаря использованию метода R -функций, приближенное выражение для функции тока получается в аналитическом виде, что выделяет предложенный метод среди остальных методов решения начально-краевых задач. Ещё одним преимуществом предложенного метода является то, что решение может быть получено для достаточно сложной области, что делает его универсальным. Решение второй части задачи перемешивания позволяет моделировать процесс перемешивания, анализировать его эффективность, основываясь на изучении поведения отдельных частиц. Также были рассмотрены три режима перемешивания, проведен их численный анализ и сделан вывод об эффективности каждого из них. Этим и определяется научная новизна и практическая значимость работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Б. Р. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 5. — С. 3-45.
2. Андриевский Б. Р. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 4. — С. 3-34.
3. Арэф Х. Развитие хаотической адвекции / Х. Арэф // Нелинейная динамика. — 2006. — Т. 2. — № 1. — С. 111-133.
4. Артюх А. В. Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода R -функций / А. В. Артюх, Н. В. Гибкина, М. В. Сидоров // АСУ и приборы автоматики. — 2008. — Вып. 143. — С. 67-73.
5. Гибкина Н. В. Численный анализ процессов перемешивания методом R -функций / Н. В. Гибкина, Н. С. Роговой, М. В. Сидоров, А. В. Стадникова // Радиоэлектроника и информатика. — 2012. — № 3 (58). — С. 28-34.
6. Гибкина Н. В. Численный анализ перемешивания вязкой жидкости, вызванного системой точечных вихрей, методами R -функций и Галёркина / Н. В. Гибкина, Н. С. Роговой, А. В. Стадникова // Материалы XI международной научной студенческой конференции «Математические методы в механике, экономике, экологии» (Севастополь, СевНТУ, 15-19 апреля 2013). — С. 10-13.
7. Дунаева Т. А. Перемешивание вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса / Т. А. Дунаева, А. А. Гуржий, В. В. Мелешко // Прикладна гідромеханіка. — 2001. — Т. 3 (75). — № 2. — С. 15-24.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Дрофа, 2003. — 840 с.
9. Мелешко В. В. Смешивание вязких жидкостей / В. В. Мелешко, Т. С. Краснопольская // Нелинейная динамика. — 2005. — Т. 1. — № 1. — С. 69-109.
10. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1966. — 432 с.
11. Оттино Дж. М. Перемешивание жидкостей / Дж. М. Оттино // В мире науки. — 1989. — № 3. — С. 34-44.
12. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. — К. : Наук. думка, 1982. — 552 с.
13. Роговой Н. С. Математическое моделирование перемешивания, вызванного системой точечных вихрей / Н. С. Роговой, А. В. Стадникова // Научные труды Международной молодежной научной конференции «XXXIX Гагаринские чтения» в 9 томах (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 9-13 апреля 2013). — Т. 5. — С. 98-99.
14. Роговий Н. С. Застосування методів R -функцій та Гальоркіна до чисельного аналізу перемішування в'язкої рідини, викликаного системою точкових вихорів / Н. С. Роговий, Г. В. Стадникова // Тези доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської (Одинадцятої Міжнародної) студентської наукової конференції з прикладної математики та інформатики «СНКПМІ-2013» (Львів, ЛНУ ім. І.Франка, 11-12 квітня 2013). — С. 96-97.
15. Роговой Н. С. Численный анализ стационарного перемешивания, вызванного системой точечных вихрей / Н. С. Роговой // Материалы XVII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 22-24 апреля 2013). — Т. 7. — С. 158-159.

16. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса / М. В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. — 2002. — №3. — С. 39-42.
17. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. — М. : Эдиториал УРСС, 2001. — 320 с.
18. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / Под. ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева и М. А. Соколовского. — Москва-Ижевск : Ин-т комп. исслед., 2003. — 704 с.
19. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. — М. : Мир, 1990. — 512 с.

УДК 53.08:621.317.7.082.743:542.6

ОСОБЛИВОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РІДИН ЕЛЕКТРОДНИМ ТА БЕЗЕЛЕКТРОДНИМ МЕТОДАМИ

¹Гуцул О. В., асистент, ²Слободян В. З., завідувачий науковою лабораторією, к. ф.-м. н.

¹Буковинський державний медичний університет

²Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича

Проведено порівняння електродного та безелектродного методів дослідження електрофізичних та реологічних параметрів рідин під час їх протікання у капілярі. Розглянуто три основні варіанти досліджень: дослідження однорідних рідин, дослідження протікання границі двох рідин та дослідження протікання невеликої проби рідини на фоні еталонної, які можна використовувати незалежно один від одного або одночасно, залежно від обраного об'єкту дослідження та поставленої мети експерименту.

Ключові слова: електродний метод, безелектродний метод, електромагнітний резонанс, електрофізичні властивості рідин в капілярах, реологічні властивості рідин.

¹Гуцул О. В., ²Слободян В. З. ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЖИДКОСТЕЙ ЭЛЕКТРОДНЫМ И БЕЗЭЛЕКТРОДНЫМ МЕТОДАМИ / ¹Буковинский государственный медицинский университет, ²Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича, Украина

Проведено сравнение электродного и безелектродного методов исследования электрофизических и реологических параметров жидкостей во время их протекания в капилляре. Рассмотрены три основных варианта исследований: исследование однородных жидкостей, исследование протекания границы двух жидкостей и исследование протекания небольшой пробы жидкости на фоне эталонной, которые можно использовать независимо друг от друга или одновременно, в зависимости от выбранного объекта исследования и поставленной цели эксперимента.

Ключевые слова: электродный метод, безелектродный метод, электромагнитный резонанс, электрофизические свойства жидкостей в капиллярах, реологические свойства жидкостей.

¹Gutsul O. V., ²Slobodyan V. Z. FEATURES STUDY OF THE PARAMETERS LIQUIDS BY ELECTRODE AND ELECTRODELESS METHODS / ¹Bukovinian State Medical University, ²Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

The electrode and electrodeless methods for research electrical and rheological parameters of fluids during their flow in the capillary was compared. We consider three main options for research: study of homogeneous fluids flow boundary survey and study of two fluids flow of a small sample of fluid on the background reference that can be used independently or simultaneously, depending on the chosen object of study and the goal of the experiment.

The electrode and electrodeless methods for research of the fluids are generally designed to measure the specific conductivity of fluids, their homogeneity, the rate of flow through the capillary, the effective viscosity, identify the fluids and make control parameters for fluid during time of its occurrence in the capillary and measurements using small volumes of test fluid, which is important in the analysis of biological fluids (blood, plasma), especially in the study of pure fluids and fluids corrosive to the electrodes. There are three variants of experimental studies for comparison electrode and electrodeless methods.

There are three variants of electrode and electrodeless methods for study of the parameters fluids. The first variant of study is research of a homogeneous fluid, measuring system with capillary solenoid filled with fluid that may leak through the capillary under pressure difference at its ends. The parallel lines of current I (for electrode method) and quality factor (Q -factor for electrodeless method in the values of voltage U_q) to time axis are visualized on the graphic. The curves of voltage U_q and current I with the time can be used for identification of the fluid heterogeneity, if unknown fluid flows through capillary.

The second variant is research of the flow border of two fluids. Through capillary solenoid followed by the first fluid is passed a second fluid, so that there is a movement of the boundary of two fluids through the capillary. The electrode method characterized of current increases and for electrodeless method decrease in Q -factor of tuned circuit (voltage U_q decrease respectively). This change in voltage U_q can be used for measuring the effective fluid velocity in the capillary v_{fluid} .

The length of the reactive zone of the capillary solenoid by measuring the flow of fluids in the electrodeless method can be determined then know the effective speed of the fluid in the electrode method.

The third variant is research of the fluid small volume. The capillary solenoid of measurement complex filled with a standard fluid that continuously flows through the capillary. At fixed time instead of standard fluid is passed the test fluid, in a short fixed time interval, and then pass a standard fluid. When entering a small sample in a capillary fluid on the background standard fluid (originally introduced reference fluid beyond its small sample test fluid after which the newly introduced reference fluid). The advantage of this variant of research is the use of much smaller amounts of the test fluid.

Three variants of the research the flow of fluids in capillaries (electrodeless and electrode methods) can be used for interpretations the next information: the electrical and rheological properties of aqueous solutions of electrolytes and biological fluids, diffusion of impurities through the boundary of two fluids, the impact of positive and negative pressure on the boundary of two fluids on a kinematic properties of the fluids, the interaction of the fluid with a material of a capillary walls. The second variant of the method of electrode configuration $1/I = f(t)$ can be determined of the fluids effective viscosity in a wide range of motion boundary fluid in the capillary. The third variant of the electrodeless method can be used for analyses of specific information about the interaction of fluids as their border and with the walls of the capillaries.

Keywords: electrode method, electrodeless method, electromagnetic resonance, the electrical properties of liquids in capillaries, the rheological properties of liquids.

Велика кількість теоретичних та експериментальних робіт присвячені дослідженню електрофізичних властивостей рідин [1-5]. Розроблені електродні [6, 7] та безелектродні [8, 9] методи дослідження рідин, які дозволяють вимірювати питому електропровідність рідин [2], їх однорідність, швидкість протікання в капілярі, ефективну в'язкість, проводити ідентифікацію рідин за певними ознаками та здійснювати безперервний контроль параметрів рідини протягом часу її протікання в капілярі, а також проводити вимірювання при використанні невеликих об'ємів досліджуваної рідини, що має велике значення при аналізі біологічних рідин (крові, плазми крові), при дослідженні особливо чистих рідин та рідин агресивних до електродів. Для порівняння електродного та безелектродного методів [10] проведено три варіанти одночасних експериментальних досліджень.

ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОРІДНИХ РІДИН

Капілярний соленоїд вимірювального комплексу [6, 8] заповнюється однією рідиною, яка може протікати через капіляр під різницею тисків на його кінцях. Для однорідної рідини на графіку спостерігаються прямі паралельні вісі часу, як для струму I (електродним методом), так і добротності Q , яка визначається через напругу U_q . Зв'язок між двома методами однозначний і виражається формулою:

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \frac{A}{R}, \quad U_q = BQ, \quad I = \frac{U}{R},$$

тоді

$$\frac{1}{U_q} - \frac{1}{U_{q0}} = \frac{AI}{BU} = CI, \quad C = \frac{A}{BU}, \quad \frac{1}{I} = \frac{CU_q U_{q0}}{U_{q0} - U_q},$$

де U_{q0} – добротність пустого капілярного соленоїду; U – фіксована напруга на кінцях капілярного соленоїда під час вимірювань електродним методом A , B , C – величини, які залишаються незмінними під час вимірювань.

Якщо при пропусканні невідомої рідини через капіляр спостерігаються залежності напруги U_q та струму I від часу, то одержані дані можна використати для оцінки ступеня неоднорідності цієї рідини.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОТІКАННЯ ГРАНИЦІ ДВОХ РІДИН

Через капілярний соленоїд вимірювального комплексу вслід за першою рідиною (як правило еталонною) пропускається друга рідина, внаслідок чого спостерігається рух границі двох рідин через капіляр. Експериментальне дослідження двома методами наведено на рис. 1.

Спочатку капіляр заповнений рідиною з великим питомим опором, внаслідок чого добротність коливального контуру Q_1 та, відповідно, напруга U_{q1} мають великі значення, а струм I_1 , навпаки,

найменше значення ($Q_1 = 135$; $U_{q1} = 900$ мВ; $I_1 = 0,17$ мА = 170 нА). Під час заповнення капіляру другою рідиною із більшою питомою електропровідністю, яка витісняє першу рідину, добротність Q та, відповідно, U_q зменшуються, а струм I , відповідно, зростає. При повному витісненні першої рідини другою, добротність коливального контуру Q_2 та, відповідно, U_{q2} досягають через деякий час мінімального, а струм I_2 максимального значень і стають, відповідно, рівними: $Q_2 = 33$, $U_{q2} = 125$ мВ, $I_2 = 3,2$ мА.

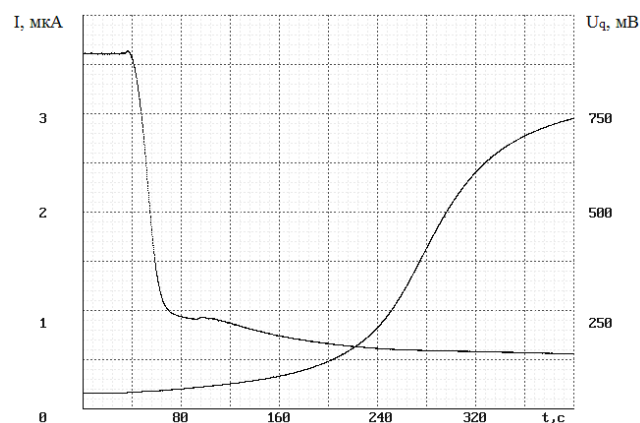


Рис. 1. Часова залежність струму I та напруги U_q на виході вимірювача добротності під час протікання границі двох рідин у капілярному соленоїді

Хоча опір зменшується пропорційно з часом при заповненні капілярного соленоїду другою рідиною, але струм, який обернено пропорційний загальному опору рідин, спочатку зростає повільно і лише в кінці починає зростати швидко. Оскільки за Пуазейлем профіль швидкості циліндричних шарів рідини має параболічний характер, то здавалося б, що загальний опір рідин буде нелінійно змінюватися з часом, через різну швидкість шарів рідини, проте в наближенні однакової швидкості всіх шарів опір має змінюватись строго лінійно протягом усього часу входження другої рідини в капіляр аж доки не витісниться вся перша рідина. На експериментальних графіках, де замість струму наведено обернений струм, пропорційний до опору рідин при фіксованій напрузі на кінцях капілярного соленоїду, спостерігається лінійна залежність при заповненні другою рідиною від самого початку приблизно до 75% заповнення капіляру, що видно з рис. 2.

З рис. 2 слідує, що в області лінійної залежності можна визначити ефективну швидкість рідин у капілярі v_{pid} , яка пропорційна тангенсу кута нахилу прямої із віссю абсцис, тому ділянку графіка, коли друга рідина протікає від початку до 75% всього капіляру можна використовувати для вимірювання миттєвої ефективної швидкості рідини в цей момент часу. Якщо в'язкості двох рідин сильно різняться між собою, тоді ефективна швидкість рідин змінюється з часом, і її можна виміряти експериментально на ділянці менше 75%, а решта ділянки (більше 75%) є інформативною для дослідження розподілу швидкостей вздовж радіусу капіляра, а також впливу змочуваності рідин зі стінками капіляру, яка характеризує взаємодію рідини з матеріалом капіляру.

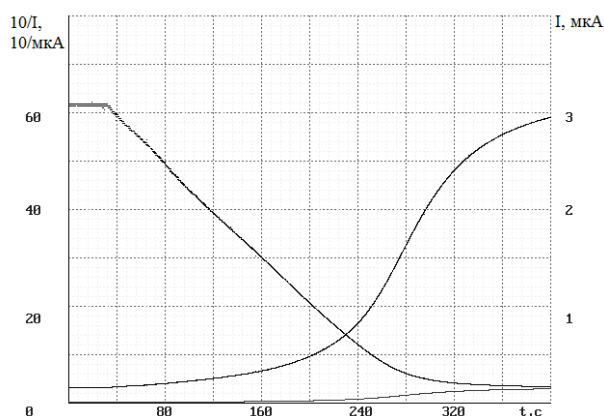


Рис. 2. Часова залежність I та оберненого струму $10/I$ під час протікання границі двох рідин у капілярі

Якщо при використанні електродного методу спостерігається різке зростання струму в кінці заповнення капіляру другою рідиною, то при використанні безелектродного методу спостерігається різке зменшення добротності коливального контуру і відповідно напруги U_q на початку входження другої рідини в капіляр. Цю зміну напруги U_q можна використати для вимірювання ефективної швидкості рідини v_{pid} в капілярі. Область зміни добротності значно вужча порівняно із зміною опору електродним методом, оскільки довжина реактивної зони в капілярі значно менша від довжини самого капіляру. На відміну від електродного методу, де ефективну в'язкість рідини η_{pid} можна визначити в області прямолінійної ділянки в інтервалі від 0 до 75% довжини капіляру, в'язкість безелектродним методом можна визначити на значно вужчій ділянці (близько 10% від часу початку заповнення капіляру другою рідиною), що є недоліком цього варіанту безелектродного методу при вимірюванні в'язкості рідин.

Для електродного методу ефективна швидкість рідин v_{pid} визначається добутком тангенса кута нахилу залежності $10/I = f(t)$ на попередньо розраховану константу A_1 :

$$v_{pid} = tg\alpha_1 \cdot A_1,$$

а для безелектродного методу ефективна швидкість рідин v_{pid} визначається також добутком тангенса кута нахилу $tg\alpha_2$ залежності $U_q = f(t)$ рис. 3 на попередньо розраховану константу A_2 :

$$v_{pid} = tg\alpha_2 \cdot A_2.$$

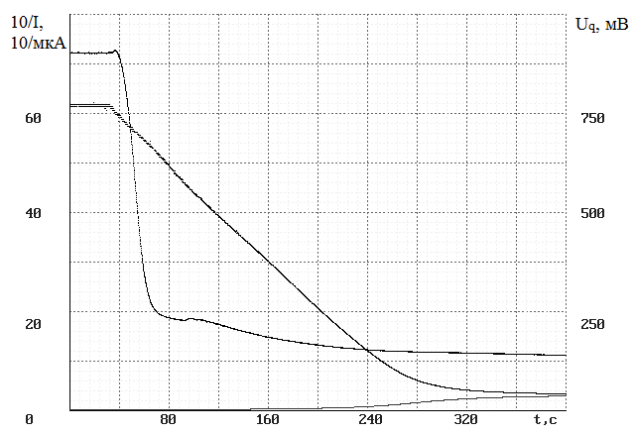


Рис. 3. Залежності $U_q = f(t)$ та $10/I = f(t)$ під час заповнення капілярного соленоїда досліджуваною рідиною замість еталонної рідини

На відміну від безелектродного в електродному методі можна визначити в'язкість другим способом, вимірюючи час заповнення капіляру другою рідиною, який визначається із графіку залежності $10/I = f(t)$ точкою перетину екстрапольованої прямолінійної ділянки з тангенсом кута нахилу $tg\alpha$ із паралельною вісі часу прямолінійною ділянкою, яка визначається струмом повністю заповненого другою рідиною капіляру. Середня ефективна швидкість рідин v_{pid} визначається відношенням довжини капіляру l_k до часу заповнення капіляру t_k досліджуваною рідиною і може бути використана для визначення константи A_1 незалежним способом.

Знаючи ефективну швидкість рідин із електродного методу можна визначити довжину реактивної зони капілярного соленоїда при вимірюванні протікання рідин безелектродним методом, яку необхідно знати при порівнянні опорів рідини, одержаних електродним та безелектродним методами для визначення питомої електропровідності рідини.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОТІКАННЯ НЕВЕЛИКОЇ ПРОБИ РІДИНИ

Під час вимірів спочатку заповнюється капілярний соленоїд еталонною рідиною, яка безперервно протікає по капіляру. У фіксований момент часу замість еталонної рідини пропускають досліджувану рідину, протягом невеликого фіксованого інтервалу часу, а потім знову пропускають еталонну рідину. При входженні в капіляр невеликої проби рідини на фоні еталонної рідини (спочатку вводиться еталонна рідина, далі за нею невелика проба досліджуваної рідини після якої знову вводиться еталонна рідина) спостерігаються графічні залежності, наведені на рис. 4. У цьому варіанті чітко прослідковуються

переваги безелектродного методу над електродним. Перевагою цього варіанту дослідження, порівняно з попереднім, є можливість використання значно менших об'ємів досліджуваних рідин.

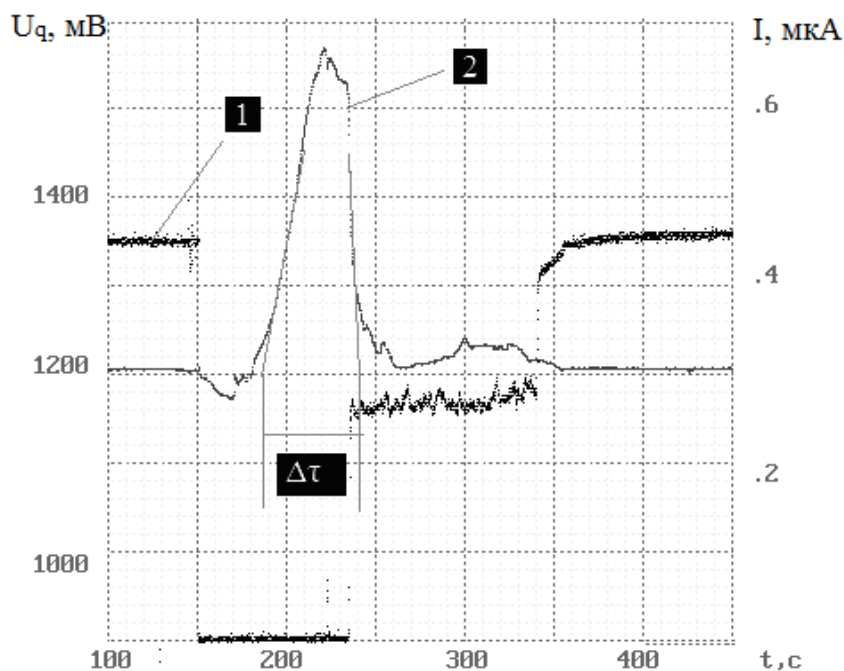


Рис. 4. Порівняння електродного та безелектродного методу для дослідження невеликих проб рідин на фоні еталонної рідини із більшою питомою електропровідністю

Як видно з рис. 4, переваги вище розглянутого безелектродного методу вимірювання електрофізичних параметрів рідини під час її протікання у капілярі порівняно із електродним способом найбільш яскраво проявляються при дослідженні протікання невеликої проби досліджуваної рідини, оскільки електродний спосіб у цьому випадку є мало ефективним. Результати одночасних експериментальних досліджень двома методами наведені на рис. 4. Безелектродний метод раніше фіксує відновлене значення еталонної рідини, оскільки реактивна зона закінчується раніше, ніж кінець капілярного соленоїда. Розміри реактивної зони капілярного соленоїду $\Delta\tau$ можна визначити попереднім варіантом або із рис. 4, побудувавши дотичні до переднього і заднього фронту імпульсу і знайшовши точки перетину дотичних із горизонтальною прямолінійною ділянкою кривої 2 (U_q) за межами дії імпульсу. Знайшовши час t_1 початку входження досліджуваної рідини в капілярі, час t_2 початку входження її в реактивну зону, час t_3 початку виходу її із реактивної зони та час t_4 початку виходу досліджуваної рідини із капіляру, можна, знаючи довжину капіляра, обчислити ефективну швидкість рідини в капілярі за формулою:

$$v_k = \frac{l_k}{t_4 - t_1}.$$

Знаючи довжину капіляра, можна обчислити ефективну швидкість рідини в капілярі і ефективну довжину реактивної зони, яка зв'язує опір рідини R_1 з питомим опором ρ під час вимірювання безелектродним R_1 та електродним методом R_2 :

$$l_{p3} = v_k(t_3 - t_2) = \frac{l_k(t_3 - t_2)}{t_4 - t_1};$$

$$R_1 = \rho \frac{l_{p3}}{S_k}; \quad R_2 = \rho \frac{l_k}{S_k}.$$

При порівнянні електродного та безелектродного методів між опорами рідини існує таке співвідношення:

$$R_1 = R_2 \frac{l_{p3}}{l_k}.$$

В'язкість рідин пропорційна інтервалу часу $t = t_1 - t_0$ від початку протікання t_0 невеликої проби рідини до часу t_1 , при якому спостерігається екстремум залежності $U_q = f(t)$, що показано на рис. 5.

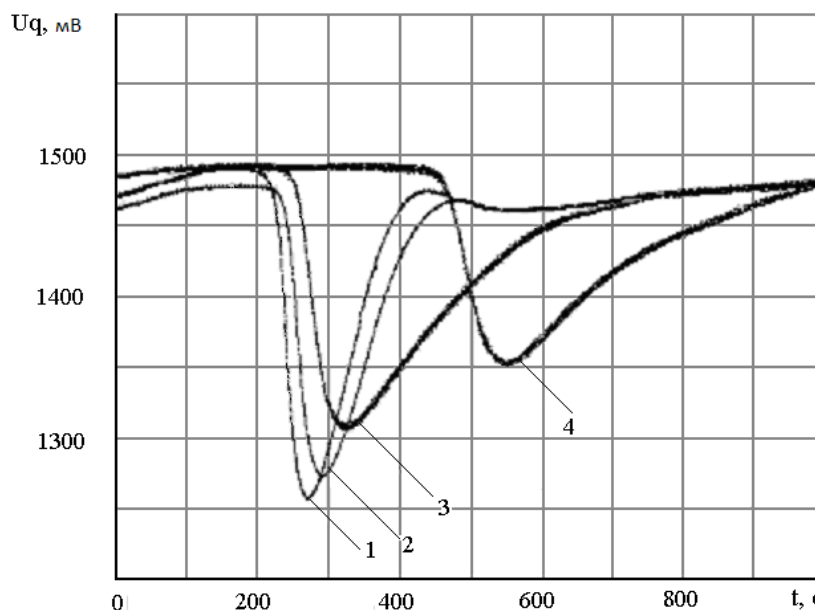


Рис. 5. Дослідження протікання невеликих проб рідин на фоні еталонної рідини із меншою питомою електропровідністю
(3,1 – кров і плазма отримані з першої проби; 4,2 – кров і плазма отримані з другої проби)

На рис. 6 наведені порівняння дослідження двох рідин із різними в'язкостями.

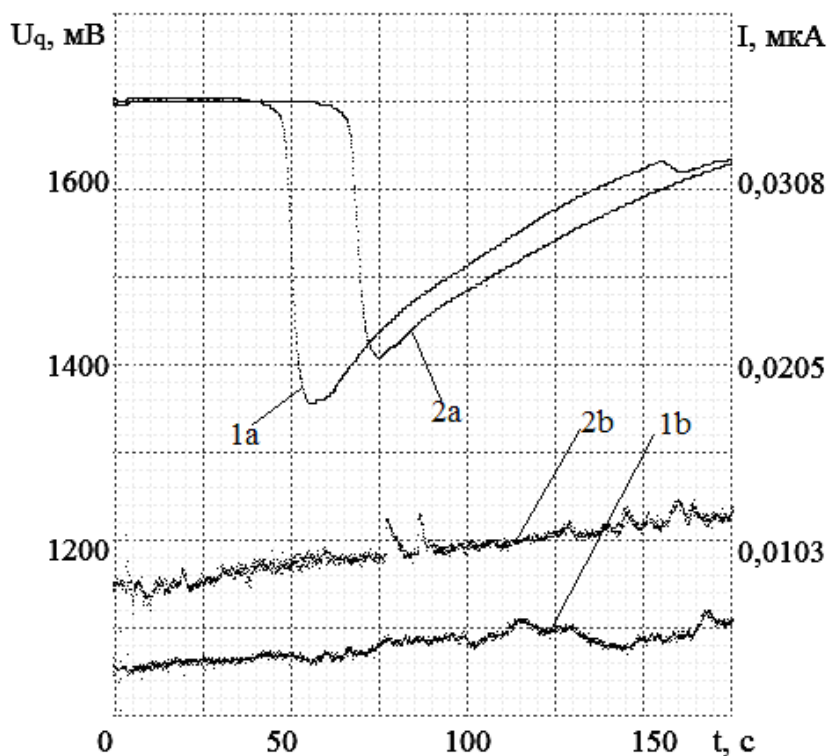


Рис. 6. Порівняння протікання двох невеликих проб різних рідин
(безелектродним методом – криві 1а та криві 2а, електродним методом – криві 1б та криві 2б)
однакового об'єму на фоні еталонної рідини із меншою питомою електропровідністю

Дослідження проведені на фоні дистильованої води. При протіканні невеликої проби досліджуваної рідини на границі рідин відбувається взаємодія, внаслідок чого концентрація домішок, а відповідно і електропровідність дистильованої води, зростає із часом, про що свідчить зростання струму в електродному методі, а нахил кривих струму характеризує ефективний коефіцієнт дифузії домішок через границю двох рідин. З кривих безелектродного методу видно, що друга рідина має більшу в'язкість порівняно із першою.

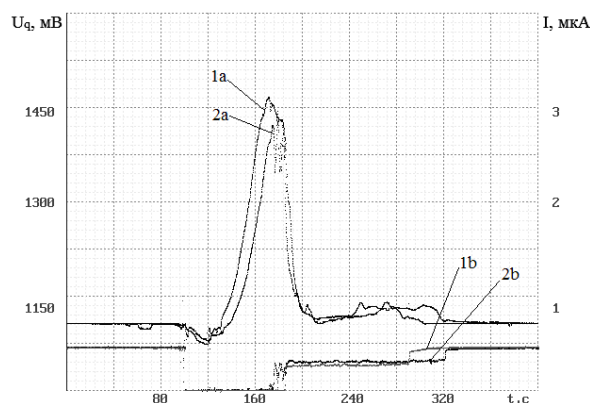


Рис. 7. Порівняння протікання двох невеликих проб різних рідин (безелектродним методом – криві 1а та криві 2а, електродним методом – криві 1б та криві 2б) однакового об'єму на фоні еталонної рідини із більшою питомою електропровідністю

Різний час виходу невеликих однакових за об'ємом проб різних рідин із капіляру пов'язаний із різною їх в'язкістю, що можна використати для визначення в'язкості рідин відносним способом. Різна в'язкість рідин при дослідженні безелектродним способом також пов'язана з відносним зсувом піків добротності на часових залежностях, що дозволяє ідентифікувати невеликі проби рідин.

ВИСНОВОК

Використання трьох варіантів дослідження протікання рідин у капілярах безелектродним та електродним методами дозволяють одержати цінну інформацію: про електрофізичні та реологічні властивості водних розчинів електролітів та біологічних рідин; про дифузію домішок через границю двох рідин; про вплив додатнього та від'ємного тиску на границі двох рідин на кінематичні властивості рідин; про взаємодію рідин із матеріалом стінок капіляру. Другий варіант електродного методу у конфігурації $1/I = f(t)$ дозволяє визначати миттєву ефективну в'язкість рідин у широкому інтервалі руху границі рідин у капілярі (від початку до 75% заповнення капіляру другою рідиною). Третій варіант безелектродного методу крім питомої електропровідності та в'язкості дозволяє одержати характерну інформацію про взаємодію рідин як на їх границі, так і зі стінками капіляру.

ЛІТЕРАТУРА

1. Wang P. Modeling Electrical Conductivity in Concentrated and Mixed-Solvent Electrolyte Solutions / P. Wang, A. Anderko, and R. D. Young // *Ind. Eng. Chem. Res.* — 2004. — V. 43. — P. 8083-8092.
2. Golnabi H. Investigation of electrical conductivity of different water liquids and electrolyte solutions / H. Golnabi, M. R. Matloob, M. Bahar [at all] // *Iranian Physical Journal.* — 2009. — V. 3. — No 2. — P. 24-28.
3. Zhang S. Physical Properties of Ionic Liquids: Database and Evaluation / S. Zhang, N. Sun, X. He [at all] // *J. Phys. Chem. Ref. Data.* — 2006. — Vol. 35. — No. 4. — P. 1475-1517.
4. Evdokimov I. N. Electrophysical properties of liquid hydrocarbon media / I. N. Evdokimov, N. Yu. Eliseev // *Chemistry and technology of fuels and oils.* — Vol. 37. — No 1, 2001. — P. 39-43.
5. Anoop Kumar Srivastava. Electrophysical Properties of an Antiferroelectric Liquid Crystal MOPB(H)PBC / Anoop Kumar Srivastava, Seung Hee Lee, Myong-Hoon Lee, R. Dabrowski // *Ferroelectrics.* — Vol. 365, Issue 1, 2008. — P. 103-107.
6. Шаплавський М. В., Пішак В. П., Слободян О. В., Григоришин П. М., Микитюк О. Ю. Пристрій для автоматизованого вимірювання в'язкості біологічних рідин. Пат. № 2256164, Уа, МПК G01N11-00; G01N27-00; №ч 200714803; Заявл. 26.12.2007; Опубл. 25.03.2008; Бюл. №6.
7. Калинин В. В. Способ и устройство для измерения сопротивления водных электролитов / В. В. Калинин, А. В. Казак // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* — 2008. — Т. 74, № 8. — С. 46-48.
8. Шаплавський М. В., Пішак В. П., Слободян О. В., Коломоець М. Ю., Григоришин П. М. Пат. № 36976, Уа. Безелектродний спосіб вимірювання питомого опору біологічних рідин; Україна; U2008 07870; Заявл. 10.06.2008. Опубл. 10.11.2008; Бюл. №21.

9. Шаплавський М. В., Пішак В. П., Слободян О. В., Григоришин П. М. Пат. № 35766, Уа. Безелектродний спосіб вимірювання в'язкості біологічних рідин; Україна; U2008 02926; Заявл. 06.03.2008. Оpubл. 10.10.2008; Бюл. №19.
10. Гуцул О.В., Слободян В.З. Порівняння безелектродного та електродного методів вимірювання електрофізичних характеристик невеликих проб рідини / О. В. Гуцул, В. З. Слободян // Materialy IX Mezinarodni Vedecko – Praktika conference «Veda a technologie: Krok do budoucnosti – 2013» (27.02-05.03.2013). Dil 28. Technicke vedy, 2013, Praga, s. 31-34.

УДК 519.172

ТРАССИРОВКА ПОДКЛЮЧАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ МНОГОЗОНДОВОГО УСТРОЙСТВА КОНТРОЛЯ BGA-КОМПОНЕНТОВ

¹Жарикова И. В., аспирант, ²Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, ¹Невлюдов И. Ш., д. т. н., профессор,
¹Палагин В. А., к. т. н., доцент, ¹Разумов-Фризюк Е. А., к. т. н., доцент, ²Чеченя В. С., аспирант

¹*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

²*Запорожский национальный университет*

Работа посвящена современным разработкам в области микроэлектромеханических устройств тестирования, которые могут быть использованы в производстве радиоэлектронных аппаратов. Речь идет о примере разработанного многозондового соединительного устройства для тестирования электронных BGA-компонент. Предложен метод гибкой трассировки соединительной платформы. Разработанное соединительное устройство обеспечивает высокую надежность и точность процесса тестирования и значительное снижение стоимости устройств и время опытной эксплуатации.

Ключевые слова: граф, трассировка, корпус BGA, макродискрет, контакт, площадка компонент, слой.

¹Жарикова І. В., ²Курапов С. В., ¹Невлюдов І. Ш., ¹Палагін В. А., ¹Разумов-Фризюк Е. А., ²Чеченя В. С. ТРАСУВАННЯ ПІДКЛЮЧАЮЧОЇ ПЛАСТИНИ БАГАТОЗОНДОВОГО ПРИСТРОЮ КОНТРОЛЮ BGA-КОМПОНЕНТІВ / ¹Харківський національний університет радіоелектроніки, ²Запорізький національний університет, Україна

Робота присвячена сучасним розробкам в області мікроелектромеханічних пристроїв тестування, що можуть бути використані у виробництві радіоелектронних апаратів. Йдеться про приклад розробленого багатозондового з'єднувального пристрою для тестування електронних BGA-компонент. Запропоновано метод гнучкого трасування сполучної платформи. Розроблений з'єднувальний пристрій забезпечує високу надійність і точність процесу тестування і значне зниження вартості пристроїв і час дослідної експлуатації.

Ключові слова: граф, трасування, корпус BGA, макродискрет, контакт, поле компонентів, шар.

¹Zharikova I. V., ²Kurapov S. V., ¹Nevlyudov I. S., ¹Palagin V. A., ¹Razumov-Frizyuk E. A., ²Chechenia V. S. TRACING of CONNECTING PLATE of MULTIPROBE DEVICE of CONTROL of BGA-COMPONENTS / ¹Kharkov National University of Radio Electronics, ²Zaporizhzhya National University, Ukraine

The paper is devoted to development and modeling of microelectromechanical devices test components in BGA/CSP-frames. A fundamentally new multipoint connect devices for input and function control microcircuits with the ability to verify the connection is proposed. Developed coupling device provides for high reliability and accuracy of the testing process and significantly reduce the cost of devices and the trial operation time. Multipoint connect device not only provides a connection to the EC but also contains information on the availability of contact. Furthermore multipoint connect devices provides redundancy connection to the object of control, which improves the test reliability and control results accuracy of EC with matrix conclusions. A new approach to the process of tracing the pressing plate is also proposed in the article. As one of the options, was considered the possibility of developing a trace mathematical model based on graph theory. Mathematical model of the connections is a set of symmetrically spaced lines, which are called levels and denoted with Latin letters *a, b, c, d, e, f, ...*, the amount of which is determined by the number of rows of the matrix-arranged contacts. Each band consists of macro-discrete. Macro-discrete is a square, in the corners of which there are four contacts. Based on the structural and technological requirements, calculated the maximum number of connections and the number of layers in macro-discrete. Mathematical method of connections consists in the formation of a connections tuple location. A method for distribution of the compounds in layers depending on the structural and technological constraints is proposed. This method is based on the application of graph theory, reduces the complexity and time topology design flexible loop MMD, and can be used to develop topologies of microelectromechanical structures for various purposes.

Key words: graph, tracing, body BGA, macro-discrete, contact, playground components, layer.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее перспективных направлений корпусирования поверхностно-монтажных интегральных микросхем, с учетом тенденции усложнения конструкций электронных компонентов, уменьшения размеров и увеличения количества выводов, можно считать технологию BGA (от англ. *ball grid array* – массив шариков). Микросхемы в корпусе BGA относительно недороги и отличаются малыми размерами [1].

В то же время с увеличением количества выводов микросхемы снижается ее надежность, что приводит к необходимости дополнительных операций входного, функционального контроля при использовании в производстве микросхем в корпусах BGA. Основные сложности при контроле BGA-компонентов связаны с их конструктивно-технологическими особенностями. Существующие методы контроля (например, игольчатый метод) отличаются либо высокой стоимостью, либо необходимостью дополнительных ручных проверок.

ОПИСАНИЕ КОНСТРУКЦИИ УСТРОЙСТВА И ТОПОЛОГИИ ПРИЖИМАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЫ

Микроэлектромеханическое многозондовое подключающее устройство (МПУ) предназначено для подключения электронных компонентов (ЭК) с матричными выводами шарикового типа (BGA/CSP) на операциях входного и функционального контроля к автоматизированным контролирующим комплексам или специализированным пультам контроля перед подачей ЭК на последующие операции сборки радиоэлектронных средств (блоков, модулей) [2].

В качестве объекта контроля была выбрана микросхема FG-320, характеризующаяся следующими параметрами (рис. 1):

- количество выводов 320 (18×18, без четырех выводов в центре);
- шаг размещения выводов – 1 мм;
- диаметр шарикового вывода – 600 мкм.

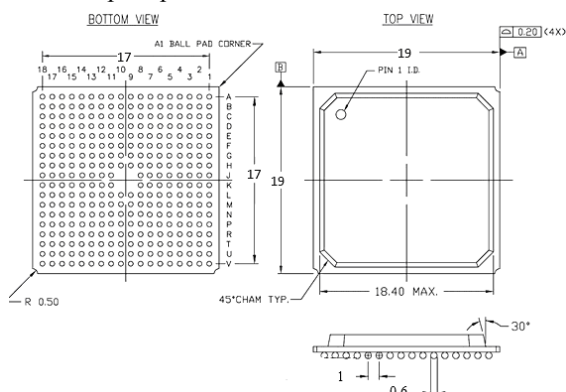


Рис. 1. Вид микросхемы FG-320

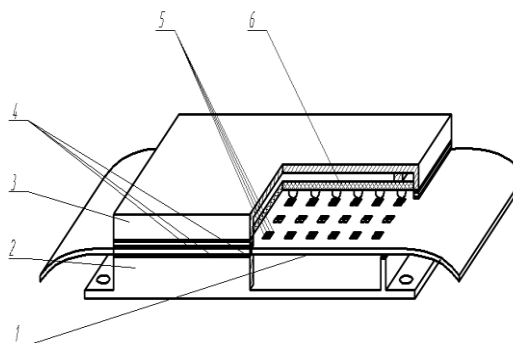


Рис. 2. Устройство контроля

Из-за большого количества и высокой плотности расположения шариковых выводов сложно осуществить контроль такой микросхемы с помощью стандартных методов контроля. Подключающая пластина 1 (рис. 2), расположенная в корпусе 2 между уплотнительными прокладками 4, под действием сжатого воздуха прижимается к контролируемому объекту 6. МПУ имеет две зоны: зону контактирования с расположенными на ней площадками 5 и зону подключения к оборудованию контроля. ЭК позиционируется направляющими элементами в корпусе и фиксируется крышкой 3.

Подключение к измерительному оборудованию осуществляется стандартными плоскими ZIF-соединителями (*zero insertion force* – нулевое усилие вставки).

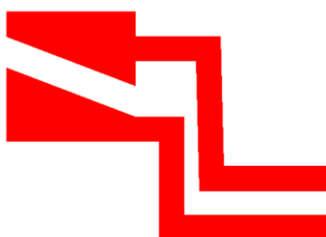


Рис. 3. Площадка зонда

В МПУ каждый зонд состоит из двух частей. От каждой части зонда на внешний соединитель идет отдельный проводник. На рис. 3 представлен вид площадки-зонда для подключения к одному выводу ЭК.

При контактировании разъединенных частей зонда с шариковыми выводами ЭК эти части электрически соединяются между собой, что может регистрироваться внешним автоматическим прибором при проведении самотестирования системы контроля. Таким образом, МПУ не только обеспечивает подключение к ЭК, но и содержит информацию о наличии контакта. Кроме того МПУ обеспечивает дублирование подключения к объекту контроля, что повышает надежность тестирования и достоверность результатов контроля ЭК с матричными выводами. Площадка-зонд имеет габаритные размеры 400×400 мкм. Ширина проводников – 75 мкм, минимальное расстояние между проводниками – 75 мкм. Гибкая плата изготавливается из фольгированного полиимида марки ФДИ-А-50 на двух слоях. Межслойные соединения выполняются ультразвуковой сваркой, размеры технологических окон в полиимиде для межслойной сварки составляют 150×150 мкм. Соединение слоев выполняется склеиванием полиимидным клеем.

На рис. 4 приведена топология прижимающей пластины МПУ.

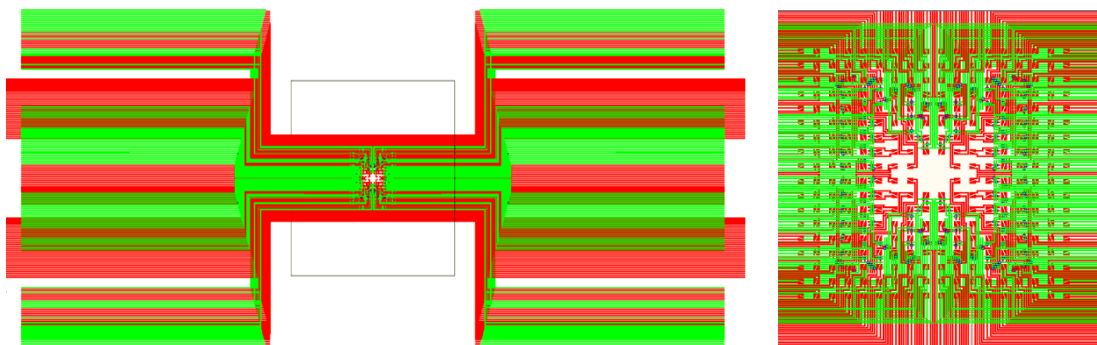


Рис. 4. Топология прижимающей пластины

Несмотря на относительную простоту изготовления и эксплуатации, наиболее трудоемким является процесс разработки топологии прижимающей пластины, особенно это относится к топологиям прижимающих пластин для BGA-компонентов с большим количеством (200 и более) и высокой плотностью расположения шариковых выводов.

К сожалению, современные программы-трассировщики не в состоянии справиться с поставленной задачей, сложности возникают из-за большого количества слоев и трассируемых элементов, малых значений толщины проводников и расстояний между ними, специфики межслойных соединений (сварка фольгированного полиимида) и ряда других факторов.

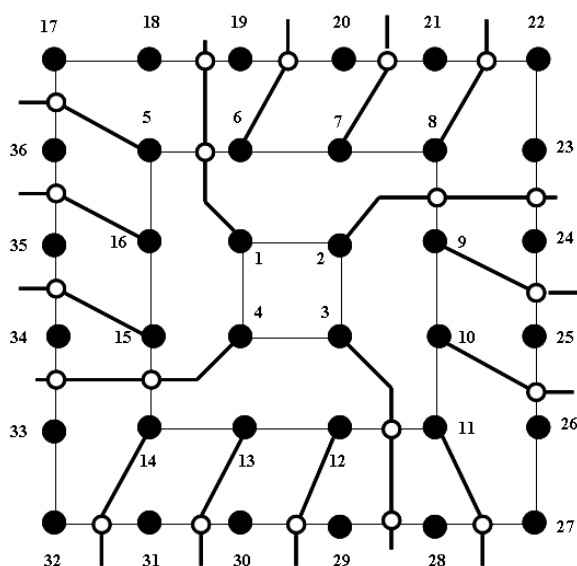


Рис. 5. Фрагмент корпуса на 36 выводов и проведение соединений

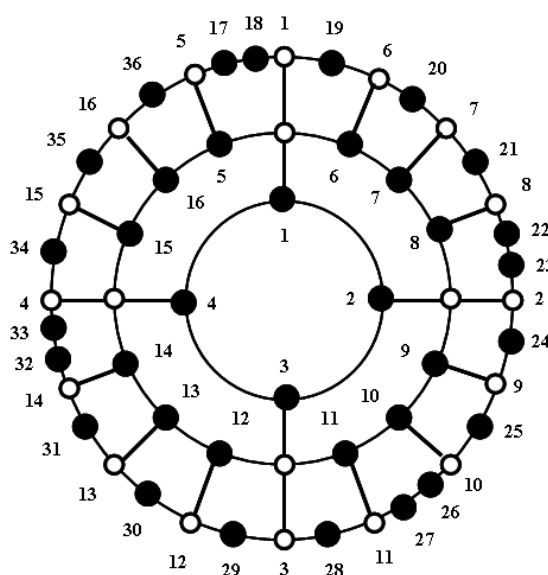


Рис. 6. Топологическая модель корпуса на 36 выводов и проведение соединений

Для решения подобных задач необходим принципиально новый подход к процессу трассировки. В качестве одного из вариантов была рассмотрена возможность разработки математической модели трассировки на основе теории графов [3-4].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАССИРОВКИ МАТРИЧНЫХ СТРУКТУР

При создании математической модели расположение контактов на поверхности можно представить в виде точек (вершин), расположенных на концентрических окружностях (см. рис. 5-6).

И тогда математическая модель проведения соединений представляет собой совокупность проведенных линий относительно симметрично расположенных поверхностей, называемых уровнями и обозначаемых латинскими буквами a, b, c, d, e, f, \dots , количество которых определяется количеством рядов матрично-расположенных контактов (см. рис.7).

Такое расположение контактов определяет симметрию относительно центра и осей координат. Данное обстоятельство позволяет рассматривать проведение соединений для корпусов с четным числом контактов в ряду, только в одной четверти математической модели корпуса, симметрично отображая рисунок в остальных четвертях. Рассмотрим математическую модель для корпуса с 324 матрично-расположенными контактами, которые представлены в 18-ти горизонтальных и вертикальных рядах (см. рис. 7, левая верхняя четверть).

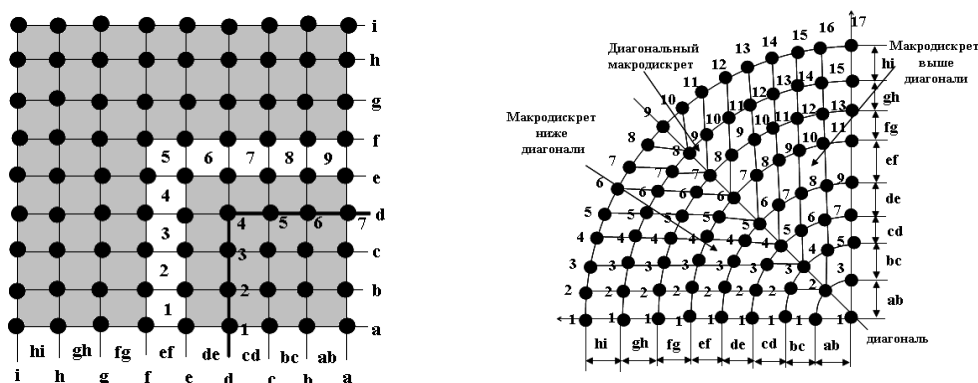


Рис. 7. Математическая модель для проведения соединений

В свою очередь, образуются полосы, как часть пространства, ограниченного линиями уровня. Полосы будем обозначать двумя буквами, например, de – это полоса, ограниченная линией уровня d и линией уровня e (см. рис. 7). Каждая полоса состоит из макродискретов. Макродискрет представляет собой четырехугольник, в углах которого расположены четыре контакта (см. рис. 5). По расположению в полосе существуют диагональные макродискреты, макродискреты ниже диагонали и макродискреты выше диагонали.

Исходя из конструктивно-технологических требований, рассчитывается максимальное количество соединений и количество слоев в макродискрете. Математический метод проведения соединений заключается в формировании кортежа расположения соединений M_s . Начинаем проводить соединения с самого нижнего правого контакта $a1$. Здесь проведение соединений ассоциируется с введением и перестановкой контактов в кортеже.

Рассмотрим пример проведения соединений ($cv/ hbc/ 7$). Начинаем проводить соединения с самого нижнего правого контакта $a1$.

Первоначально кортеж состоит из одной точки

$$M_s = \langle a1 \rangle.$$

Затем последовательно в кортеже распределяем контакты сектора b , начиная слева, стремясь к заданной конструктивно-технологической загрузке между контактами:

$$M_s = \langle \underline{b1}, \underline{b2}, a1, \underline{b3} \rangle.$$

Затем распределяем контакты сектора c , стремясь к заданной конструктивно-технологической загрузке между контактами:

$$M_s = \langle \underline{c1}, \underline{c2}, b1, \underline{c3}, b2, a1, b3, \underline{c4}, c5 \rangle$$

Затем распределяем контакты сектора d :

$$M_s = \langle \underline{d1}, c1, \underline{d2}, c2, \underline{d3}, b1, c3, \underline{d4}, b2, a1, b3, \underline{d5}, c4, \underline{d6}, c5, \underline{d7} \rangle.$$

Затем распределяем контакты сектора e , стремясь к заданной конструктивно-технологической нагрузке между контактами и, учитывая, что количество соединений около диагонали должно быть максимально:

$$M_s = \langle \underline{e1}, d1, \underline{e2}, c1, d2, \underline{e3}, c2, \underline{e4}, d3, b1, \underline{e5}, c3, d4, b2, \underline{e6}, a1, b3, d5, c4, \underline{e7}, d6, c5, \underline{e8}, d7, \underline{e9} \rangle.$$

Распределяем контакты сектора f , стремясь к заданной конструктивно-технологической нагрузке между контактами и, учитывая, что количество соединений около диагонали должно быть максимально:

$$M_s = \langle \underline{f1}, e1, \underline{f2}, d1, e2, c1, d2, \underline{f3}, e3, c2, \underline{f4}, e4, d3, b1, \underline{f5}, e5, c3, \underline{f6}, d4, b2, \underline{f7}, e6, a1, \underline{f8}, b3, d5, c4, e7, f9, d6, c5, e8, d7, \underline{f10}, e9, \underline{f11} \rangle.$$

Затем распределяем контакты сектора g , стремясь к заданной конструктивно-технологической нагрузке между контактами и учитывая, что количество соединений около диагонали должно быть максимально:

$$M_s = \langle \underline{g1}, f1, e1, f2, \underline{g2}, d1, e2, c1, d2, \underline{g3}, f3, e3, c2, \underline{g4}, f4, e4, \underline{g5}, d3, b1, f5, \underline{g6}, e5, c3, \underline{g7}, f6, d4, \underline{g8}, b2, f7, e6, \underline{g9}, a1, f8, b3, d5, \underline{g10}, c4, e7, f9, \underline{g11}, d6, c5, e8, d7, \underline{g12}, f10, e9, f11, \underline{g13} \rangle.$$

Затем распределяем контакты сектора h , стремясь к заданной конструктивно-технологической нагрузке между контактами и учитывая, что количество соединений около диагонали должно быть максимально:

$$M_s = \langle \underline{g1}, h1, f1, e1, f2, \underline{g2}, h2, e2, c1, d2, h3, \underline{g3}, f3, e3, c2, h4, \underline{g4}, f4, e4, h5, \underline{g5}, d3, b1, f5, h6, \underline{g6}, e5, c3, h7, \underline{g7}, f6, d4, \underline{g8}, h8, h9, b2, f7, h10, e6, \underline{g9}, a1, h11, f8, b3, d5, \underline{g10}, h12, c4, e7, f9, \underline{g11}, h13, d6, c5, e8, d7, h14, \underline{g12}, f10, e9, f11, h15, \underline{g13} \rangle.$$

Наконец, распределяем контакты сектора i , стремясь к заданной конструктивно-технологической нагрузке между контактами и учитывая, что количество соединений около диагонали должно быть максимально:

$$M_s = \langle \underline{g1}, h1, \underline{i1}, f1, e1, f2, \underline{g2}, h2, \underline{i2}, e2, c1, d2, \underline{i3}, h3, \underline{g3}, f3, e3, c2, \underline{i4}, h4, \underline{g4}, f4, e4, \underline{i5}, h5, \underline{g5}, d3, b1, f5, \underline{i6}, h6, \underline{g6}, e5, c3, \underline{i7}, h7, \underline{g7}, f6, d4, \underline{g8}, h8, h9, b2, \underline{i9}, f7, \underline{i10}, h10, \underline{i11}, e6, \underline{g9}, \underline{i12}, a1, h11, f8, \underline{i13}, b3, d5, \underline{g10}, h12, \underline{i14}, c4, e7, f9, \underline{g11}, h13, \underline{i15}, d6, c5, e8, d7, \underline{i16}, h14, \underline{g12}, f10, e9, f11, \underline{i17}, h15, \underline{g13} \rangle.$$

Построенный таким образом кортеж впредь будем называть кортежем соединений и обозначать M_s . Покажем, что кортеж соединений определяет и количество проведенных соединений в макродискретах и их взаимное расположение.

После проведения соединений определяем нагрузку макродискретов и взаимное расположение соединений. Так как макродискреты находятся между линиями уровня, то их наименование будет двойным, например, $ih2$ определяет 2-ой макродискрет полосы ih с вершинами $[i2, i3, h2, h3]$. Для данного макродискрета $[i2, i3, h2, h3]$ проведение соединений по стороне макродискрета $[i3, h3]$ определяется из рассмотрения последовательности $\dots d2, i2, e2, c1, d2, i3, \dots$ сектора $ih2$, и определяет проведение соединений от контактов $e2, c1, d2$, расположенных между контактом $i2$ и $i3$ (см. рис. 8). Проведение соединений по стороне макродискрета $[i3, h3]$ также определяется из рассмотрения последовательности $\dots d2, i3, h3, g3, \dots$ уровня i , где нет проходящих соединений. Проведение соединений по стороне макродискрета $[h2, h3]$ также определяется из рассмотрения последовательности $\dots g2, h2, e2, c1, d2, h3, g3, \dots$ уровня h , и определяет проведение соединений от контактов $e2, c1, d2$, расположенных между контактом $h2$ и $h3$ уровня h (см. рис.8). Наконец, проведение соединений по стороне макродискрета $[h2, i2]$ также определяется из рассмотрения последовательности $\dots g2, h2, i2, e2, \dots$ уровня i (см. рис. 8). Причем, обязательно требуется выполнения правила: при определении соединений, проходящих по ребрам макродискрета, учитываются только соединения низших рангов.

Определим характер проведения соединений в 3-ем макродискрете полосы cd . Вершины макродискрета $[d3, d4, e5, c3]$ и данный макродискрет диагонального типа.

Определяем соединения между контактами $d3, d4$, находящихся на уровне d , из цепочки кортежа $\dots c2, d3, b1, c3, d4, b2, \dots$. Это соединения $b1, c3$.

Определяем соединения между контактами $d4, d5$, находящихся на уровне d , из цепочки кортежа $\dots c3, d4, b2, a1, b3, d5, c4, \dots$. Это соединения $b2, a1, b3$.

Определяем соединения между контактами $d3, d4$, находящихся на уровне d , из цепочки кортежа $\dots d3, b1, c3, d4, \dots$, это соединение $b1, c3$.

Определяем соединения между контактами $c3, d5$, находящихся на уровне d , из цепочки кортежа $\dots b1, c3, d4, b2, a1, b3, d5, c4, \dots$. Это соединения $d4, b2, a1, b3$. Соединение $d4$ следует удалить из рассмотрения, как имеющее более высокий приоритет. Итак, соединения, проходящие по ребру $[c3, d5]$, это $b2, a1, b3$ в соответствующем порядке (см. рис. 9).

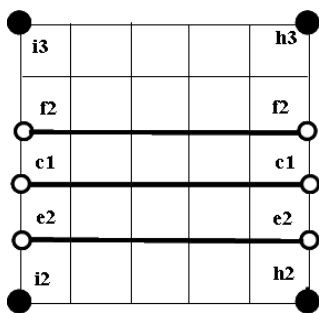


Рис. 8. Проведение соединений в макродискрете [i2, i3, h2, h3]

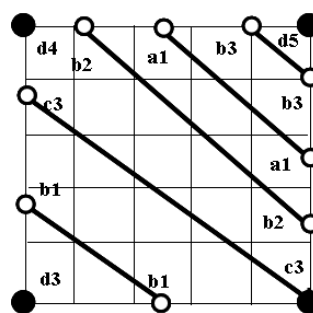


Рис. 9. Проведение соединений в макродискрете [d3, d4, d5, c3]

Построение соединений начинается с определения местоположения соединений в полосе ab (см. рис. 10), где проводится одно соединение. Далее рассматриваются соединения в полосе bc (см. рис. 11).

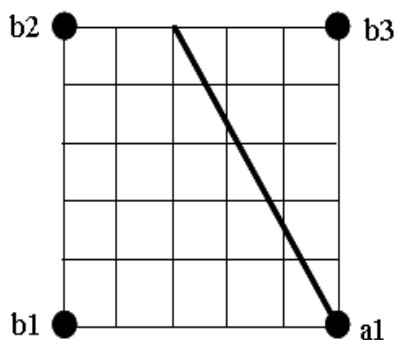


Рис. 10. Проведение соединений в макродискрете [b1, b2, b3, a1]

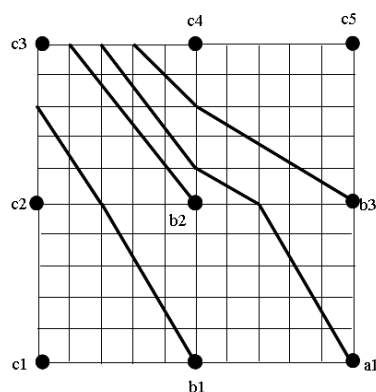


Рис. 11. Проведение соединений в полосе bc

Далее проводятся соединения в полосе cd (см. рис. 12) относительно кортежа соединений

$$M_s = \langle d1, c1, d2, c2, d3, b1, c3, d4, b2, a1, b3, d5, c4, d6, c5, d7 \rangle.$$

Если, исходя из конструктивно-технологических ограничений количество соединений в макродискрете [d3, d4, d5, c3] превышает допустимое значение, то производим перегруппировку контактов сектора d (см. рис. 13).

$$M_s = \langle d1, c1, d2, c2, d3, b1, c3, d4, b2, a1, d5, b3, c4, d6, c5, d7 \rangle.$$

Далее производится формирование кортежа соединений M_s относительно новой системы соединений.

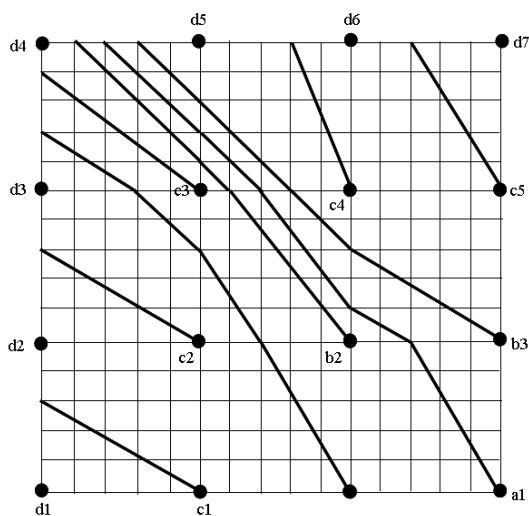


Рис. 12. Проведение соединений в полосе cd

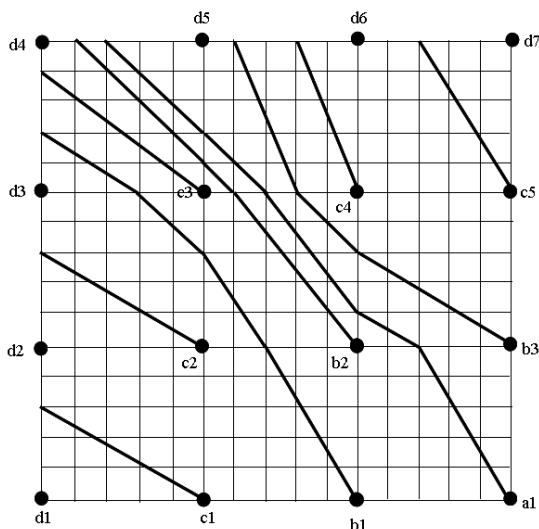


Рис. 13. Перераспределение соединений в полосе cd

Проведение всех соединений для следующего кортежа соединений

$M_s = \langle g1, h1, i1, f1, e1, f2, g2, h2, i2, d1, e2, c1, d2, i3, h3, g3, f3, e3, c2, i4, h4, g4, f4, e4, i5, h5, g5, d3, b1, f5, i6, h6, g6, e5, c3, i7, h7, g7, f6, d4, f7, i8, h8, h9, b2, i9, f6, i10, h10, i11, e6, g9, i12, a1, h11, f8, i13, b3, d5, g10, h12, i14, e7, c4, f9, g11, h13, i15, d6, c5, e8, d7, i16, h14, g12, f10, e9, f11, i17, h15, g13 \rangle$

представлено на рис. 13.

Проведение соединений в центре с учетом симметрии для всего корпуса элемента с контактами представлено на рис. 14.

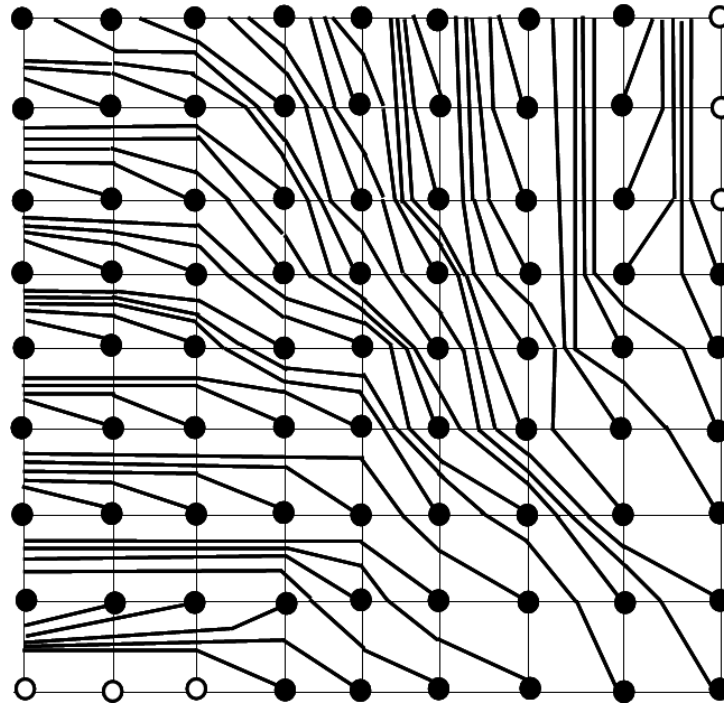


Рис. 14. Проведение соединений

Следующим этапом решения является распределение соединений по слоям, предположим, что в зависимости от конструктивно-технологических ограничений нужно проводить в макродискрете два соединения в первом слое и три соединения во втором слое.

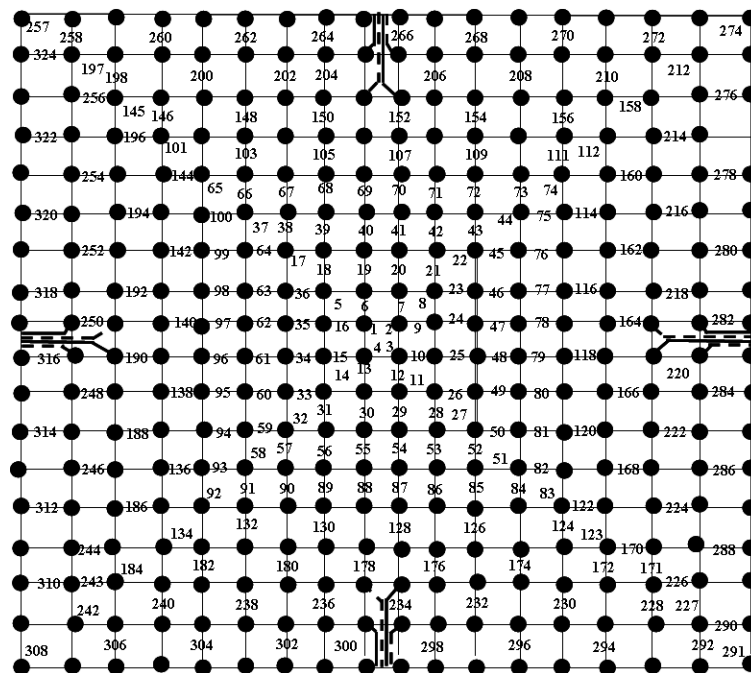


Рис.15. Проведение симметричных соединений в центре

Получение общего рисунка соединений является исходной информацией для решения задачи распределения соединений по слоям. С целью наглядного представления соединения 1-го слоя будем изображать сплошными линиями, а соединения 2-го слоя – пунктирными линиями. В нашем случае задача расслоения соединений формулируется следующим образом: для заданного рисунка все множество соединений необходимо разбить на два непересекающихся подмножества соединений, характеризующих слой, причем так, чтобы в каждом макродискрете количество соединений 1-го слоя и количество соединений 2-го слоя не превосходило заданного количества.

В общем случае данная задача расслоения является сложной комбинаторной задачей. Для решения данной задачи можно применять как методы последовательного анализа вариантов, так и другие метаэвристические алгоритмы дискретной оптимизации [4], предполагая, что соединения в слоях различно раскрашены.

В качестве примера рассмотрим метод последовательного анализа вариантов для рисунка соединений, представленного на рис. 14. Первоначальная раскраска в данном случае представлена на рис. 16. Здесь соединения второго слоя проводятся относительно секторов b, d, f, h .

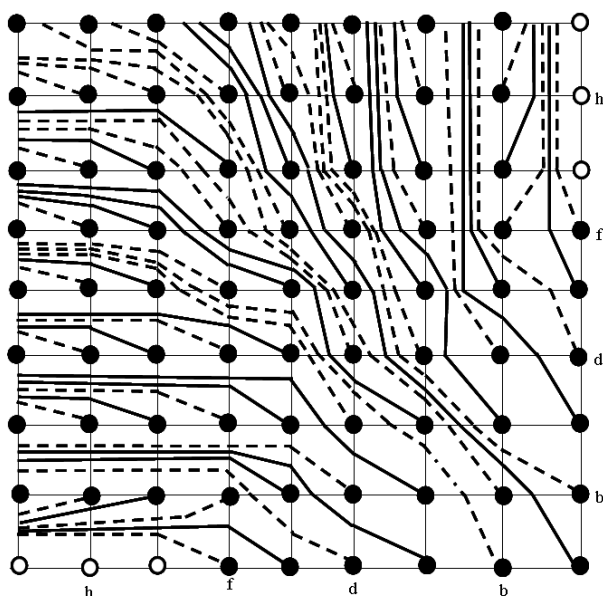


Рис. 16. Первоначальное распределение соединений по слоям

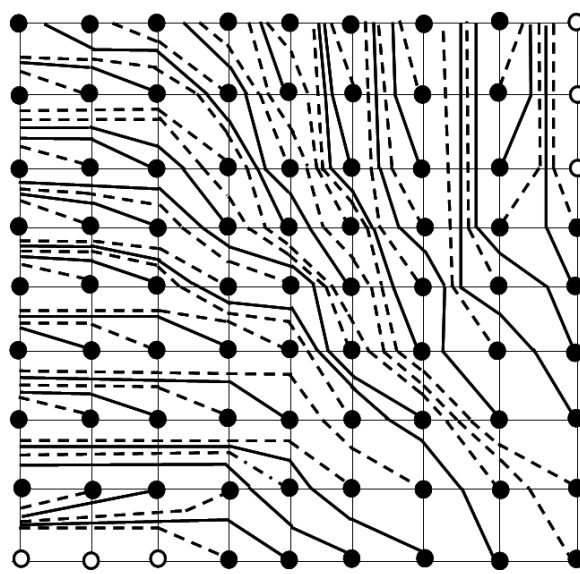


Рис.17. Окончательное распределение соединений по 2-м слоям.

Далее последовательно просматривая загрузку макродискретов определяются соединения, максимально изменяющие аддитивную сумму отклонения при перекраски соединений. Процесс продолжается до полного удовлетворения условия распределения соединений по слоям (см. рис.17).

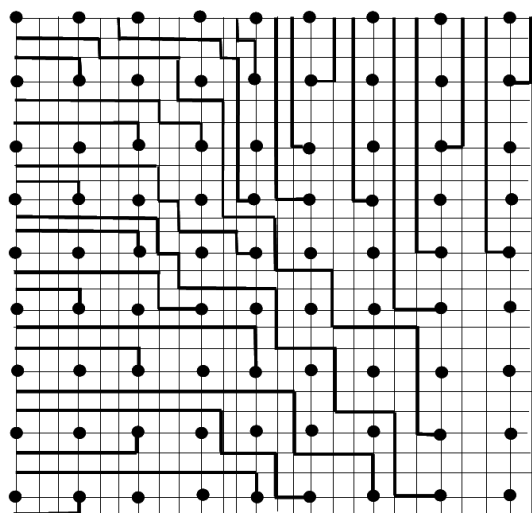


Рис.18. Ортогональное проведение соединений 1-го слоя

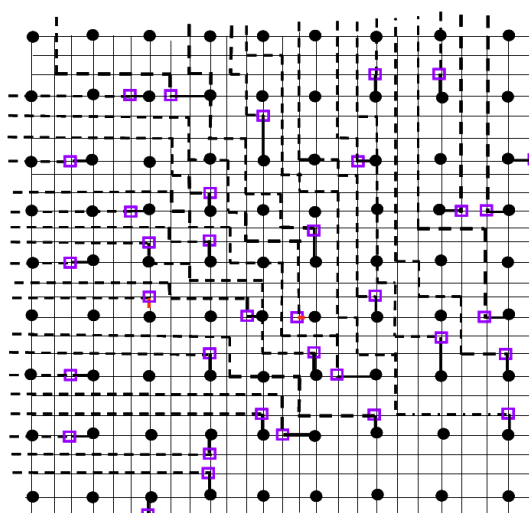


Рис. 19. Ортогональное проведение соединений 2-го слоя

После этапа распределения соединений по слоям можно осуществить ортогональное проведение соединений. Для первого слоя ортогональное проведение соединений представлено на рис. 18, а ортогональное проведение соединений для второго слоя представлено на рис. 19.

ВЫВОДЫ

Использование МПУ повышает надежность подключения контролируемых изделий к автоматизированной аппаратуре контроля. С учетом увеличения сложности контролируемых электронных компонентов возникает необходимость поиска новых подходов к трассировке многослойных подключающих пластин МПУ. Предложенный метод, основанный на применении теории графов, позволяет снизить трудоемкость и время проектирования топологии гибкого шлейфа МПУ, а также может быть использован для разработки топологий микроэлектромеханических структур различного назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенец В. В. Технология межсоединений электронной аппаратуры : учеб. для вузов / В. В. Семенец, Джон Кратц, И. Ш. Невлюдов, В. А. Палагин. — Х. : изд. «СМИТ», 2005. — 432 с.
2. Мікроелектромеханічний багатозондовий підмикальний пристрій : пат. 95190 України: МПК H05K 3/40 / Невлюдов І. Ш., Палагін В. А., Разумов-Фризюк Є. А., Жарікова І. В. та ін., опубл. 11.07.2011. — Бюл. № 13.
3. Зыков А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. — М. : Наука, ГРФМЛ, 1987. — 384 с.
4. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование / М. М. Ковалев. — М. : УРСС, 2003. — 192 с.
5. G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I. G. Tollis. Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography // Computational Geometry, Theory and Applications. — 1994. — N 4. — P. 235–282.
6. C. L. Liu and R. C. Geldmacher On the deletion of nonplanar edges of a graph. [1978] – SIAM J.Comput (to appear)/ (3.1.4; 3.2.2.; A1.2)
7. Kozo Sugiyama. Graph Drawing and applications. — New Jersey: World Scientific. — 2002. — 128 p.
8. Takao Nishizeki. Planar Graph Drawing / Takao Nishizeki, Md. Saidur Rahman. — New Jersey : World Scientific, 2004. — 310 p.
9. Roberto Tamassia. Handbook of Graph Drawing and Visualization / Roberto Tamassia. — Charman and Hall/CRC. — 2013. — 844 p
10. Курапов С. В. Алгоритмические методы в теории графов / С. В. Курапов. — Запорожье : ЗНУ, 2012. — 190с.

УДК 51–77, 316.4

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ НА ОСНОВЕ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКОЙ SIR-МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ

Зиновеев И. В., к. ф.-м. н., Манько Н. И.-В., ст. преподаватель, *Спица И. А., студент

Запорожский национальный университет

**Запорожский государственный медицинский университет*

В статье на основе SIR-модели Кермака-Маккендрика предложен подход к моделированию и исследованию динамического развития структуры замкнутой социальной группы, находящейся под информационным воздействием. Сформулирована гипотеза о параметрах предложенной модели, при которых становится возможен «социальный взрыв» на уровне группы.

Ключевые слова: социальная группа, SIR-модель Кермака-Маккендрика, информационное заражение, математическая модель, численное решение, прогнозирование, социальный взрыв.

Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., *Спица І. О. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОВЕДІНКИ СОЦІАЛЬНОЇ ГРУПИ НА ОСНОВІ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ SIR – МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ / Запорізький національний університет, *Запорізький державний медичний університет, Україна

У статті на основі SIR-моделі Кермака-Маккендріка запропонований підхід до моделювання і дослідження динамічного розвитку структури замкненої соціальної групи, що знаходиться під інформаційним впливом. Сформульована гіпотеза про параметри запропонованої моделі, при яких стає можливим «соціальний вибух» на рівні групи.

Ключові слова: соціальна група, SIR-модель Кермака-Маккендріка, інформаційне зараження, математична модель, чисельний розв'язок, прогнозування, соціальний вибух.

Zinoveyev I. V., Manko N. I.-V., *Spitsa I. O. CONSTRUCTION of MATHEMATIC MODEL of BEHAVIOR of SOCIAL GROUP ON THE BASIS of MEDICAL-BIOLOGICAL SIR – MODEL of EPIDEMIC DISTRIBUTION / Zaporizhzhya National University, *Zaporozhye State Medical University, Ukraine

In the article is offered approach to the modeling and research of dynamic transformation of the closed social group structure, being under informative impact on the basis of Kermack-McKendrick SIR-model.

It is considered a closed social group. The number of group members does not change in time. The group is under the influence of some information system, which promotes a certain idea. Each member of the group at a time can be in one of three different states: the first state – member can be prone to won't infect some new idea; the second state – member is «infected» by idea and its distributor (vector data); the third state – member ceased to be a supporter of the ideas or being neutral to informational idea. All members of the group, which at this time are in the first state is denoted $S(t)$, which are in the second state is denoted $I(t)$ and which are in the third state is denoted $R(t)$. The typical evolution of a member of a social group can be described by the diagram $S \rightarrow I \rightarrow R$ or $S \rightarrow I$. Believe that the process, which is considered, described by the $S \rightarrow I \rightarrow R$ diagram.

A mathematical model of the considered problem represents a system of ordinary differential equations, supplemented by an algebraic equation of the condition of a constant social group. To solve the resulting system applied numerical scheme of Euler's method for solving the Cauchy problem. Submitted by the numerical scheme numerical calculations were made, on the basis of which formulated the hypothesis on offered model parameters, under which is possible within a group a «social explosion».

Keywords: social group, Kermack-McKendrick SIR-model, informative infection, mathematical model, numeral solution, prognostication, social explosion.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

За последние 10-15 лет в мире произошла медиареволюция. Появилось большое количество профессиональных радио-, интернет- и телевизионных каналов, «изготавливающих» суперпрофессиональную по качеству продукцию мирового уровня. Во всех странах государственные средства массовой информации находятся под государственным контролем, что вполне естественно. Однако доля государственных средств массовой информации во всем медиaprостранстве все уменьшается и на первый план выходят «свободные» источники информации, выражающие и распространяющие взгляды, определяемые политикой своих управляющих органов. Появление такого свободного источника информации имеет огромное значение. «Здесь двойная вещь. С одной стороны, медиареволюция как появление массмедийных региональных лидеров, высококлассных и профессиональных... А другая сторона – это когда трансляторами в этих медиа оказываются любые люди». Информацию «может принимать любой человек, просто с сотового телефона, – поэтому любая информация становится доступной и ею легко обмениваются через эти большие медиа, а не только через фэйсбуки» [1].

В Украине количество абонентов сотовой связи за I квартал 2013 г. по сравнению с IV кварталом 2012 г. выросло на 3,8% – до 59 млн. 619 тыс. 325 (количество SIM-карт), говорится в аналитическом отчете консалтинговой компании Advanced Communications & Media (AC&M). Уровень проникновения сотовой связи на Украине по состоянию на конец марта 2013 г. составил 130,9% против 126,1% на конец 2012 г. Лидером по количеству интернет-пользователей остается Киев – 60,1% от общего количества пользователей. Пользователи из других крупных городов и регионов (Днепропетровск, Донецк, Запорожье, Львов, Одесса, Харьков, Крым) составили 28,3%, из остальных регионов – 11,6%. Меньше всего посетителей интернета в апреле было из Житомирской области – 0,25% и из Черновицкой областей – 0,26% [2]. По оценкам iKS-Consulting, в Украине на 31 марта 2012 года общее количество абонентов широкополосного доступа (частных и корпоративных) составило почти 6,3 млн. [3].

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Даже краткий анализ развития медиaprостранства Украины дает возможность сделать вывод о возрастающей динамике проникновения в нашу жизнь, жизнь общества коммуникационных и интернет-технологий, а соответственно и увеличение их влияния, как на поведение каждого отдельного индивида, так и поведение определенных групп населения (социальных, возрастных, профессиональных и т.д.). Таким образом, изучение, моделирование и прогнозирование поведения социальных групп населения является актуальной и важной задачей. Одним из важных аспектов изучения поведения групп является изучение ее законов поведения, прогнозирования развития и возможного влияния на это поведение, вплоть до превращения этой группы в управляемую или неуправляемую «толпу» или «массу». Ряд

примеров эффективного воздействия «умных толп», подвигающих общество к социальным революциям, приведено в работе [4].

Создателями математической эпидемиологии по праву считаются Anderson Gray McKendrick, 1876-1943 и William Ogilvy Kermack, 1898-1970 известные шотландские биохимики и эпидемиологи, которые в первой половине XX столетия предложили математическую модель [5], описывающую динамику распространения инфекции в замкнутой популяции, и позволяющую проанализировать и спрогнозировать дальнейшее развитие инфекции.

Предположим, что особи популяции могут находиться в трех различных состояниях: здоровые особи – находятся в группе риска и могут быть подвержены инфицированию; заразившиеся – переносчики болезни, и те, кто выздоровел и перестал распространять болезнь (в эту категорию относят, например, приобретших иммунитет или даже умерших). Обозначим эти группы $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$. Стоит отметить, что проведен ряд гипотез и упрощений, таких как: все контакты равновозможны и приобретение инфекции для всех особей популяции равновероятно; количество особей популяции постоянно и имеет размер N ; заражение инфекцией при контакте имеет вероятность 100%; промежуток времени, когда заболевший остается опасным для окружающих, распределен по экспоненциальному закону.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ СОЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ

Пусть рассматривается замкнутая социальная группа (в группу не добавляются новые члены группы и из нее не выходят), общий состав которой не изменяется в течение рассматриваемого промежутка времени и находится в поле влияния некоторой информационной системы (информационное поле, интернет-пространство, мобильная связь, телевидение). Предположим, что каждый из членов рассматриваемой группы в конкретный момент времени может находиться в одном из трех различных состояний: «здоровом», «инфицированном», «иммунитетном». «Здоровое» состояние – человек находится в группе риска и может быть подвержен «информационной инфекции» («заразиться» некоторой идеей). «Инфицированное» состояние – человек, или в силу убеждений, или в результате информационного воздействия, является сторонником и распространителем этой идеи (переносчики информации). «Иммунитетное» состояние – человек перестал быть приверженцем идеи или стал к ней нейтрален, т.е. перестал распространять информацию (в эту категорию будем относить и тех, кто имеет «иммунитет» к распространяемой информации). Обозначим эти группы $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$, соответственно. Типичная эволюция члена социальной группы, подверженного идее, распространяемой информационно, может быть описана диаграммой $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Введем в рассмотрение функцию информационной инфективности $A(\tau)$ (аналог функции инфективности при эпидемиологическом заражении), которая включает в себя информацию об уровне информационной зараженности индивидуума, который был «заражен» τ единиц времени назад (т.е. о вероятности передачи информации при контакте) и о количестве контактов за все время, пока этот индивидуум был «информационно зараженным». Формально $A(\tau)$ – это средняя инфективность индивидуума, зараженного τ единиц времени назад, по отношению к человеку, который не владеет информацией в социальной группе, т.е. не подвергнут информационному «заражению». Например, если предположить, что вероятность получить информацию при контакте постоянна и равна p , среднее число контактов в единицу времени постоянно и равно c и индивидуум является распространителем информационного «вируса» в промежутке времени от T_1 до T_2 , то

$$A(\tau) = \begin{cases} cp, & \text{если } \tau \in [T_1; T_2], \\ 0, & \text{если } \tau \notin [T_1; T_2]. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть $i(t)$ – число новых людей, получивших информацию в момент времени t . Очевидно, что справедливо равенство $i(t) = -\dot{S}(t)$ (здесь предполагается, что социальная группа замкнута, численность класса S не может расти). Кроме того, учитывая определение $A(\tau)$ [6], получим

$$i(t) = \frac{S(t)}{N} \int_0^\infty A(\tau) i(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

Заметим, что интеграл, стоящий в правой части, описывает среднее количество «удачных» (т.е. приведших к «результативной» передаче информации) контактов всеми информационно инфицированными и все еще заразными в момент времени t . Учитывая, что контакты случайны, только $S(t)/N$ часть из них будет со «здоровыми» индивидами и в результате это дает общее число новых случаев в момент времени t . Уравнение (2) перепишем в виде

$$\dot{S}(t) = \frac{S(t)}{N} \int_0^\infty A(\tau) \dot{S}(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется моделью Кермака-Маккендрика [7].

Представим $A(\tau)$ в виде $A(\tau) = \beta N e^{-\gamma\tau}$. Здесь величина βN указывает на число контактов в единицу времени (отметим, что она растет как линейная функция постоянного размера группы N , что очень удобно для анализа уравнений, но не совсем верно отражает действительность), а $e^{-\gamma\tau}$ указывает на тот факт, что промежуток времени, когда «информационно зараженный» может «заразить» других индивидуумов, распределен экспоненциально со средним $1/\gamma$.

Вводя обозначения

$$I(t) = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty A(\tau) \dot{S}(t-\tau) d\tau = -\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^t A(t-\tau) \dot{S}(\tau) d\tau$$

и дифференцируя последнее равенство, после преобразований получим:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases} \quad (4)$$

где мы добавили третье уравнение для «выздоровевших» индивидуумов. Чтобы замкнуть полученную систему, дополним ее условием постоянства состава социальной группы

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

К системе уравнений (4) можно прийти и другим способом. Отправной точкой будут следующие предположения: группа замкнута и постоянного размера N ; промежуток времени, когда носитель остается «опасен» для окружающих, распределен по экспоненциальному закону со средним $1/\gamma$, контакты случайны и равновозможны (однородное перемешивание). Тогда

$$\begin{cases} \dot{S} = -\lambda S, \\ \dot{I} = \lambda I - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases} \quad (5)$$

где λ – это сила «инфекции», которая в данном случае равна произведению количества контактов в единицу времени, сделанных одним «здоровым» (обозначим это количество как cN), вероятности распространить информацию при контакте p и вероятности встретить «инфицированного» $I(t)/N$. Обозначив $\beta = cp$, получим (4).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (4), с заданными начальными условиями $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = R_0$, $S_0 + I_0 + R_0 = N$.

Разделим второе уравнение из (4) на первое. В результате получим

$$\frac{\dot{I}}{\dot{S}} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = \frac{\beta SI}{-\beta SI} + \frac{-\gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S} = -1 + \frac{\gamma}{cp} \cdot \frac{1}{S} = -1 + \frac{\gamma}{cp \cdot N} \cdot \frac{N}{S}.$$

Рассмотрим величину $k = \left(\frac{\gamma}{cp \cdot N} \right)^{-1} = (cN) \cdot p \cdot \frac{1}{\gamma}$ – коэффициент из последнего соотношения. Каждый множитель, входящий в этот коэффициент, имеет определенный смысл: cN – среднее число контактов в единицу времени, сделанных одним членом социальной группы, $(cN) \cdot p$ – количество подвергающихся информационному воздействию-«заражению» в единицу времени, $(cN) \cdot p \cdot \frac{1}{\gamma}$ – среднее число успешных контактов в единицу времени, умноженное на среднюю продолжительность «болезни» (подверженность распространяемой или навязываемой идее). В данном коэффициенте величины N , γ являются константами, а величины c , p можно рассматривать как числовые параметры (могут изменяться в зависимости от условий, в которых существует социальная группа), такие, что величина cp может принимать любое значение из промежутка $(0,1)$.

Для решения полученной системы (4) применена численная схема метода Эйлера решения задачи Коши [8]. Пусть задача рассматривается на конечном временном промежутке $[0, T]$. Разбиваем этот промежуток на равные части $[0, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], \dots, [t_{m-1}, t_m]$, $t_0 = 0$, $t_m = T$. Шаг разбиения равен $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Значения производных в точках t_i заменяем выражениями для приближенного их вычисления $\dot{y}(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$.

В системе (4) заменим в левых частях каждого из уравнений системы производные $\dot{S}(t_i)$, $\dot{I}(t_i)$, $\dot{R}(t_i)$ соответствующими приближенными выражениями $\dot{S}(t_i) \approx \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t}$, $\dot{I}(t_i) \approx \frac{I_{i+1} - I_i}{\Delta t}$, $\dot{R}(t_i) \approx \frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta t}$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i(-\beta \cdot I_i \cdot \Delta t + 1), \\ I_{i+1} = I_i(\beta \cdot S_i \cdot \Delta t - \gamma \cdot \Delta t + 1), \quad i = 0, \dots, m-1, \\ R_{i+1} = \gamma \cdot I_i \cdot \Delta t + R_i, \end{cases}$$

относительно неизвестных значений функций $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ в точках разбиения t_i , $i = 0, \dots, m-1$.

По представленной численной схеме были произведены ряд численных расчетов. В качестве исходных данных для расчетов были взяты значения $N = 1000$, $\gamma = 1$, $\gamma = 5$, $\gamma = 10$, $cp = 0,05j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $R_0 \in \{0, 10, 50, 100, 200, 400, 500\}$, $I_0 \in \{1, 10, 20, 50, 100\}$. Графики расчетов для некоторых случаев приведены на рисунках 1, 2.

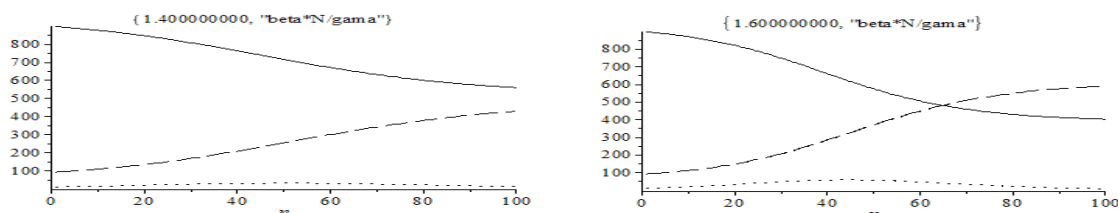


Рис. 1. Временная динамика изменения групп $S(t)$ ----, $I(t)$ —, $R(t)$ ·····, $1 < k < 2$

Проведенный анализ полученных результатов позволяет сформулировать следующую гипотезу: Пусть процесс «информационного заражения» в замкнутой группе описывается математической моделью (4). Тогда динамика роста (близкая к экспоненциальной) «информационно зараженной» части в этой группе (происходит «социальный взрыв» на уровне группы) происходит тогда, когда величина

$k = \left(\frac{\gamma}{cp \cdot N} \right)^{-1} = (cN) \cdot p \cdot \frac{1}{\gamma}$ больше двух. В противном случае, занесенная в группу информация не создает «социальный взрыв» и быстро исчезает.

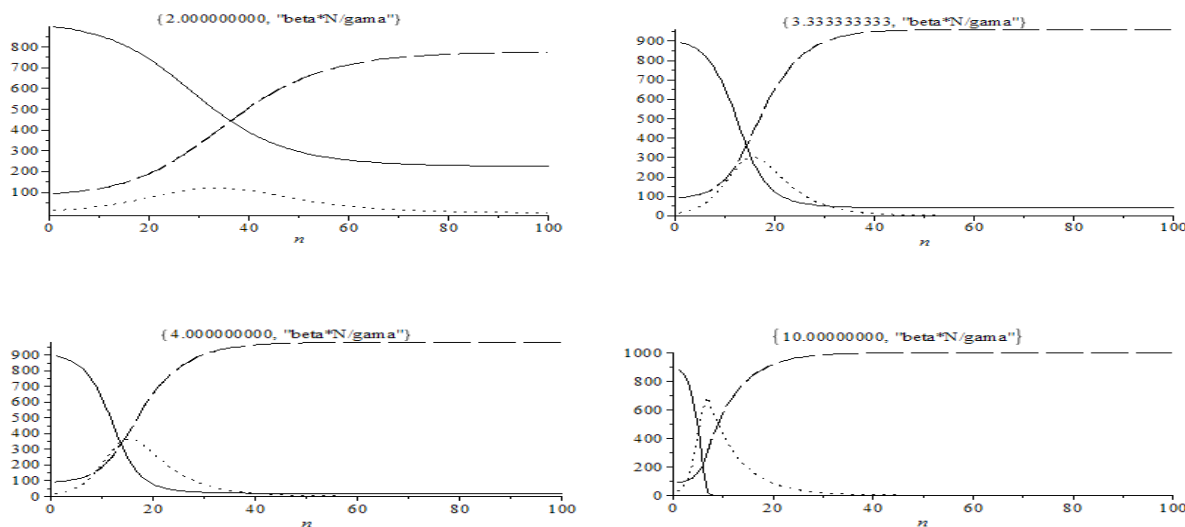


Рис. 2. Временная динамика изменения групп $S(t)$ ----, $I(t)$ —, $R(t)$ ·····, $k > 2$

Отметим, что полученные результаты согласуются с результатами работ Чернявского А.Д. [9] и могут быть использованы на макроуровне для прогнозирования уровня распространения информационного воздействия на замкнутые социальные группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коротаяев А. Теория социального взрыва [Электронный ресурс] : стенограмма передачи «Наука 2.0» – совместного проекта информационно-аналитического портала «Полит.ру» и радиостанции «Вести FM» // Доктор исторических наук, заведующий кафедрой современного Востока РГГУ, ведущий научный сотрудник Института востоковедения и Института Африки РАН Андрей Коротаяев. http://radiovesti.ru/episode/show/episode_id/10327. – 09 апреля, 2011 г.
2. <http://www.rbc.ua/rus/news/economic/kolichestvo-abonentov-sotovoy-svyazi-v-ukraine-za-i-kvartal-17052013174300/>
3. <http://itc.ua/tag/iks-consulting/>
4. Рейнгольд Г. Умная толпа: новая социальная революция / Г. Рейнгольд. — М. : ФАИР ПРЕСС, 2006. — 416 с.
5. Kermack W. O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W. O. Kermack and A. G. McKendrick // Proc. R. Soc. Lond. A August 1, 1927 115 772 700–721; doi:10.1098/rspa.1927.0118 [<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/115/772/700.citation#related-urls>].
6. Братусь А. С. Динамические системы и модели биологии / А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 400 с.
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Epidemic_model#The_SIR_model.
8. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — М. : Наука, 1986. — 744 с.
9. Чернявский А. Д. Информационная модель «социального взрыва» / А. Д. Чернявский // Современные исследования социальных проблем (электронный научный журнал). — 2012. — №1(09). — С. 406-426.

УДК 004.658.2

ANSWERING CONJUNCTIVE QUERIES OVER A TEMPORALLY-ORDERED FINITE SEQUENCE OF ABOXES SHARING ONE TBOX

Keberle N. G., Ph.D., docent

Zaporizhzhya National University

Ontology-based data access (OBDA) assumes that data in a database are mediated with a conceptual layer, available for clients and hiding data storage details. Ontologies are good candidates for such a conceptual layer presentation, whereas databases are good for huge data storage.

The benefits from combination of databases and knowledge bases are as follows:

- database management is the mature field of research, there is a lot of commercially and freely available DBMSs, showing good-to-excellent performance on large datasets. It is an obvious place to store the assertional part of some knowledge base, i.e. an ABox;
- a TBox often requires a reasoning support to deduce additional assertions, axioms and to check the consistency of a knowledge base.

At the same time, employing such an approach is rather challenging due to significant differences between relational database systems and ontology languages, based on Description Logics, such as OWL. At first, relational databases adopt a closed-world semantics, i.e. all facts that are not explicitly stated to be true are assumed to be false. In contrast, OWL is based on an open world semantics which does not require one to fix the truth value of every fact and is more similar to an incomplete database. Second, relational databases are unaware of the intensional part of a knowledge base (called a TBox).

Research has been done so far in the OBDA field considers only one ABox stored in a data source, that is an actual set of assertions on individuals and their pairs. However, real applications show that ABox is changing over time. The examples of such dynamic systems can be easily found in practice: environmental conditions, air traffic load, computer system load and performance, health control for the people suffering from serious diseases. Therefore, in some applications of situation awareness, there is a need to store an archive of

ABoxes, keeping ABoxes actual at different time points. Temporal logics are often used as the means to formulate constraints a dynamic system should obey during its work.

The objective of the research presented in this paper is twofold: at first, to elaborate a language of unions of temporal conjunctive queries, which allows evaluating atemporal unions of conjunctive queries at different time points; and at second, to propose an algorithm of answering a union of temporal conjunctive queries, possessing termination, soundness and completeness properties.

Keywords: ontology-based data access, temporal conjunctive query language, description logic knowledge base.

Кеберле Н. Г. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТВЕТА НА КОНЪЮНКТИВНЫЙ ЗАПРОС НАД КОНЕЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ УПОРЯДОЧЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ АВОХ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ОДИН ТВОХ / Запорожский национальный университет, Украина

Доступ к данным на основании онтологий (OBDA) предполагает, что данные в базе данных сопровождаются некоторым концептуальным уровнем, который скрывает от клиентов детали хранения данных, и представляет их семантику. Онтологии являются хорошим кандидатом на реализацию этого концептуального уровня, тогда как системы управления базами данных подходят для хранения значительных объемов данных. Одним из интересных приложений OBDA является проверка конечного множества ограничений, заданных на некотором языке над упорядоченной во времени последовательностью баз фактов (АВох), использующих одну и ту же базу знаний (ТВох), где каждое ограничение является конъюнктивным запросом. Предложен алгоритм ответа на конъюнктивный запрос в этом языке, доказаны конечность, непротиворечивость и полнота этого алгоритма.

Ключевые слова: доступ к данным на основании онтологий, язык темпоральных конъюнктивных запросов, база знаний в формализме логик дескрипций.

Кеберле Н. Г. ОБЧИСЛЕННЯ ВІДПОВІДІ НА КОН'ЮНКТИВНИЙ ЗАПИТ НАД СКІНЧЕННОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ВПОРЯДКОВАНИХ ЗА ЧАСОМ АВОХ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬ ОДИН ТВОХ / Запорізький національний університет, Україна

Доступ до даних на основі онтологій (OBDA) передбачає, що дані в базі даних супроводжуються деяким концептуальним рівнем, який приховує від клієнтів деталі збереження даних, та представляє їх семантику. Онтології є гарним кандидатом на реалізацію такого концептуального рівня, тоді як системи управління базами даних підходять для збереження значних об'ємів даних. Одним з цікавих застосувань OBDA є перевірка скінченної множини обмежень, заданих на певній мові над впорядкованою за часом послідовністю баз фактів (АВох), що використовують одну базу знань (ТВох), де кожне обмеження є кон'юнктивним запитом. Запропонований алгоритм обчислення відповіді на кон'юнктивний запит у цій мові, доведені скінченність, несуперечливість та повнота цього алгоритму.

Ключові слова: доступ до даних на основі онтологій, мова темпоральних кон'юнктивних запитів, база знань у формалізмі логік дескрипцій.

INTRODUCTION

Ontology-based data access (OBDA) [1] assumes that data in a database are mediated with a conceptual layer, available for clients and hiding data storage details. Ontologies are good candidates for such a conceptual layer presentation, whereas databases are good for huge data storage.

The benefits from combination of databases and knowledge bases are as follows:

- database management is the mature field of research, there is a lot of commercially and freely available DBMSs, showing good-to-excellent performance on large datasets. It is an obvious place to store the assertional part of some knowledge base, i.e. an ABox;
- a TBox often requires a reasoning support to deduce additional assertions, axioms and to check the consistency of a knowledge base.

At the same time, employing such an approach is rather challenging due to significant differences between relational database systems and ontology languages, based on Description Logics, such as OWL. At first, relational databases adopt a closed-world semantics, i.e. all facts that are not explicitly stated to be true are assumed to be false. In contrast, OWL is based on an open world semantics which does not require one to fix the truth value of every fact and is more similar to an incomplete database. Second, relational databases are unaware of the intensional part of a knowledge base (called a TBox).

Research has been done so far in the OBDA field considers only one ABox stored in a data source, that is an actual set of assertions on individuals and their pairs. However, real applications show that ABox is changing over time. The examples of such dynamic systems can be easily found in practice: environmental conditions, air traffic load, computer system load and performance, health control for the people suffering from serious diseases. Therefore, in some applications of situation awareness [2], there is a need to store an archive of ABoxes, keeping ABoxes actual at different time points. Temporal logics are often used as the means to formulate constraints a dynamic system should obey during its work.

The objective of the research presented in this paper is twofold: at first, to elaborate a language of unions of temporal conjunctive queries, which allows evaluating atemporal unions of conjunctive queries at different time

points; and at second, to propose an algorithm of answering a union of temporal conjunctive queries, possessing termination, soundness and completeness properties.

The paper is organized as follows: in the next section a language of unions of temporal conjunctive queries is introduced and the definitions of main reasoning tasks available for such a query language are presented. In the section 3 the algorithm of answering temporal unions of conjunctive queries is presented and illustrated in examples. The section 4 is dedicated to the proofs of logical properties of the algorithm. The section 5 discusses the related work in the field of conjunctive queries answering.

RESEARCH ON CONJUNCTIVE QUERIES

Conjunctive queries over a knowledge base described in the description logic formalism [3] were introduced in [4] and investigated further in [5-7].

Assume there is a knowledge base $K = (A, T)$, where T is a set of concept axioms (a TBox), A is a set of assertional axioms (an ABox). Fix a language of a knowledge base to ALC [3]. An interpretation of K , named I , is a pair $(\bullet I, \Delta)$, where Δ is a domain of individuals, obeying unique name assumption (UNA) and $\bullet I$ is an interpretation function, which assigns every concept C a set $C^I \subseteq \Delta$, every atomic role R a binary relation $R^I \subseteq \Delta \times \Delta$ and every individual name a an individual $a^I \in \Delta$. Assertional axioms are $C(a)$ – concept assertion and $R(a, b)$ – role assertion.

Query answering is the extension of a well known task of *instance checking*: given a knowledge base K and an assertion α . Check whether this assertion is entailed by an ABox of K .

Let $\text{Vars}(Q)$ be a set of all distinguished and non-distinguished variables which appear in a query Q , let $\text{Inds}(Q)$ to denote the set of all individual names which appear in query Q and $\text{Terms}(Q)$ to denote the set of all terms in Q , i.e. $\text{Vars}(Q) \cup \text{Inds}(Q)$.

Let us formally define conjunctive queries and Boolean conjunctive queries for a well-elaborated language ALC [3].

Definition 1 (Conjunctive query, Union of conjunctive queries). Let x, y, c are respectively tuples of distinguished variables (answer variables), of non-distinguished variables and of individual names, and t, t_1, t_2 are terms in $\text{Terms}(Q)$. A **conjunctive query (CQ)** is an expression of the form

$$\text{conj}(x, c) = \exists y. q_1 \wedge \dots \wedge q_m,$$

where

$$q_i ::= C(t) / r(t_1, t_2).$$

A *Boolean conjunctive query* is a CQ without answer variables.

A *union of conjunctive queries (UCQ)* is a disjunction of conjunctive queries (CQs) of the form

$$Q(x) = \{x / \text{conj}_1(x, c) \vee \dots \vee \text{conj}_n(x, c)\}.$$

Example 1. The example of a query asking about all students that attend some courses and take some exams could be as follows:

$$Q(x) = \{x / \exists y. \text{takeCourse}(x, y) \wedge \text{takeExam}(x, y)\}.$$

This query can be modified to a Boolean query by substitution of x with an individual name:

$$Q(x) = \{x / \exists y. \text{takeCourse}(\text{“Eldora”}, y) \wedge \text{takeExam}(\text{“Eldora”}, y)\}.$$

We use $|Q|$ to denote the *size* of Q – the number of symbols required to build the query. The *arity* of a query will be the number of answer variables in the query. If all terms in Q are individual names, we say Q is *ground*. We write $Q(c)$ for a query whose answer variables x are substituted by c , $Q(x)$ for a conjunctive query and simply Q for a Boolean conjunctive query. Sometimes we write x_1, \dots, x_n instead of x , and similarly for y and c .

Given an ALC-knowledge base $K = (T, A)$, an interpretation I *satisfies* a query $Q(x)$ iff the interpretation function can be extended to the variables in $Q(x)$ in such a way that I satisfies every term in $Q(x)$. A query $Q(x)$ is true w.r.t. K (written $K \models Q$) iff every interpretation that satisfies K also satisfies Q .

Definition 2 (Query answering, query entailment). Given a query $Q(x)$ with a tuple of answer variables x , and a knowledge base K , a tuple of individuals c with the same arity of x is an *answer* for Q in K if $I \models Q(c)$ for every model I in K .

Given a Boolean conjunctive query Q , and a KB K , *query entailment* is a task to decide whether $K \models Q$ if $I \models Q$ for every model I of K .

Given a conjunctive query $Q(x)$, a tuple of individuals a , and a KB K , *query answering* is a task to decide whether a is an answer for $Q(x)$ in K .

Known are several algorithms for answering unions of conjunctive queries over knowledge bases with static TBox and ABox, for example works of Ortiz [5], Glimm [6], Tessaris [4], Motik [7] should be mentioned. Any of those algorithms could serve as a basis for finding answers to atemporal CQs at particular time points, whereas possible extensions of those algorithms for the application to a sequence of ABoxes is an open question.

However, the aforementioned works are either focused on static ABox and TBox environment, thus having limited applicability in an evolving environment, or temporal languages proposed are unidirectional, and do not allow for queries asking both future and past time moments.

A language of temporal conjunctive queries with negation, together with the research on its computational and combined computational complexity is introduced in [8].

Transition graphs for a temporal query language answering over a finite set of versions of a database were investigated in [9]. The expressivity of a temporal query language presented is however restricted either to past [10], or to future [9], [11] direction of time.

TEMPORAL CONJUNCTIVE QUERIES

Let $K = (T, (A_i)_{0 \leq i \leq n})$ be a knowledge base with a sequence of ABoxes sharing one TBox. Let's describe a query language *extending* the language of conjunctions of positive existential formulae built from query atoms. Having in mind linear temporal logic LTL (see e.g. [12]), this language allows for the following temporal operators: O (next), O^- (previous), U (until), S (since).

Definition 3. Temporal conjunctive query (TCQ) is an expression

$$tconj(x, c) = \exists y. q_1 \wedge \dots \wedge q_m,$$

where

$$q_i ::= \varphi \mid \Psi,$$

$$\varphi ::= C(t) \mid r(t_1, t_2),$$

$$\Psi ::= \varphi \mid \Psi_1 \vee \Psi_2 \mid O\Psi \mid O^-\Psi \mid \Psi_1 S \Psi_2 \mid \Psi_1 U \Psi_2$$

and C is a concept description, r is a role name, t, t_1, t_2 are terms in $\text{Terms}(Q)$.

Derived temporal modalities like \diamond^- (sometimes in the past), $^-$ (always in the past), \diamond , \square can be defined in a usual way (see, e.g. [12]).

Example 2. A query asking about students who had defended their thesis some time ago and had been ex-matriculated since then is expressed as follows:

$$Q(x) = \{x \mid \exists y. \diamond^- \text{Student}(x) \wedge \text{exMatriculated}(x) S \text{hasDefended}(x, y)\}.$$

The semantics of the TCQ is defined as follows.

Definition 4. A total function $\pi : \text{Terms}(\Psi) \rightarrow \Delta$ is a *binding* for a query Ψ in an interpretation I , if $\pi(a) = a$ for all individuals $a \in \text{dom}(\pi)$, and the *validity* $I, \pi \models \Phi$ for atemporal CQ φ is defined inductively:

$$I, \pi \models C(t) \quad \text{iff} \quad I \models C(\pi(t)),$$

$$I, \pi \models r(t_1, t_2) \quad \text{iff} \quad I \models r(\pi(t_1), \pi(t_2)),$$

$$I, \pi \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \quad \text{iff} \quad I \models \varphi_1 \text{ and } I \models \varphi_2,$$

$$I, \pi \models \exists y \varphi \quad \text{iff} \quad \exists e \in \Delta: \pi' = \pi[y/e] \text{ and } I, \pi' \models \varphi$$

where the notation $\pi[y/e]$ represents a binding π extended with $\pi(y) = e$ if y is not in the domain of π , otherwise the original value for y is replaced by e .

The *validity* for a TCQ Ψ and a KB $K = (T, (A_i)_{0 \leq i \leq n})$ is extended as follows:

$$K, i, \pi \models \varphi \quad \text{iff} \quad \forall I \models_T A_i. I, \pi \models \varphi,$$

$$K, i, \pi \models \Psi_1 \wedge \Psi_2 \quad \text{iff} \quad K, i, \pi \models \Psi_1 \text{ and } K, i, \pi \models \Psi_2,$$

$$K, i, \pi \models O\Psi \quad \text{iff} \quad i < n \text{ and } K, i+1, \pi \models \Psi,$$

$$K, i, \pi \models O^-\Psi \quad \text{iff} \quad i > 0 \text{ and } K, i-1, \pi \models \Psi,$$

$$K, i, \pi \models \Psi_1 U \Psi_2 \quad \text{iff} \quad \exists k, i \leq k \leq n : K, k, \pi \models \Psi_2 \text{ and } \forall j, i \leq j < k : K, j, \pi \models \Psi_1,$$

$$K, i, \pi \models \Psi_1 S \Psi_2 \quad \text{iff} \quad \exists k, 0 \leq k \leq I : K, k, \pi \models \Psi_2 \text{ and } \forall j, k \leq j < i : K, j, \pi \models \Psi_1.$$

For a binding π , if, for every i , $\forall I \models_{\mathcal{T}} A_i$, $I, \pi \models K$, this implies $I \models \mathcal{P}$. If such evaluation exists, we write $K \models \mathcal{P}$ and we say π is a match for \mathcal{P} in K . For a tuple of individuals c_1, \dots, c_n mapped to a tuple of answer variables x_1, \dots, x_n we say c_1, \dots, c_n is a *certain answer* for \mathcal{P} in K , iff $K \models \mathcal{P}[x_1, \dots, x_n / c_1, \dots, c_n]$. We denote a set of certain answers for \mathcal{P} as $\text{Ans}(\mathcal{P})$.

Definition 5. A union of temporal conjunctive queries (UTCQ) $Q(x)$ is a disjunction of temporal conjunctive queries (see Definition 3):

$$Q(x) = \{x \mid \text{tconj}_1(x, c) \vee \dots \vee \text{tconj}_n(x, c)\}.$$

ANSWERING A UNION OF TEMPORAL CONJUNCTIVE QUERIES OVER A SEQUENCE OF ABOXES

Algorithm answering a union of temporal conjunctive queries

The idea of answering a UTCQ against a set of ABoxes is to use temporal operators as the means of detection of time points at which atemporal CQs should be evaluated. Due to the recursive nature of such temporal operators as S , U we have to store all the ABoxes and the values of particular CQs depending on the operator. Intuitively, given $\mathcal{P} = O\phi$ at a time point i , ϕ is evaluated at the time $i+I$, and so on.

To be able to combine certain answers obtained from different CQs of one TCQ, let's take a closer look at the nature of certain answers.

A certain answer to a CQ ϕ is a binding π of each $x_i \in x$ (distinguished variables) to some individual name that appeared in the KB K , such that in all models of K , $K \models \phi(\pi(x))$. There could be more than one certain answer for a CQ ϕ , so further we shall consider a set of certain answers for a query $\phi(x)$. A correspondent set of matches for ϕ actually produces some k -ary relation, where k is the arity of a CQ ϕ .

A certain answer to a UCQ Φ is a combination of answers of CQs in Φ , i.e. $c_1 \cup \dots \cup c_n$ where n is a number of CQs in Φ . For such a combination there are two possible situations: (i) disjuncts ϕ_1, ϕ_2 in UCQ Φ use pair wise disjoint sets of distinguished variables (i.e. there are no common distinguished variables in two arbitrary disjuncts of Φ); (ii) some disjuncts can share (some) distinguished variables of each other. To deal with sets of certain answers (that are actually relations) we adopt two operators of relational algebra, namely, \times – a cross-product, and $\triangleright\triangleleft$ – a natural join.

Cross-product operator \times [13] is used for the case (i).

Definition 6. Given two bindings $\pi_1 : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Delta$, $\pi_2 : (y_1, \dots, y_m) \rightarrow \Delta$, their cross-product, $\pi_1 \times \pi_2$ is a binding $\pi : X \rightarrow \Delta$ where x, y are free variables that do not have any variables in common, and $X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.

Join operator $\triangleright\triangleleft$ [13] is used for the case (ii) to join two bindings w.r.t. common variables in both bindings are mapped to same constant.

Definition 7. Given two bindings $\pi_1 : (x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow \Delta$, $\pi_2 : (y_1, \dots, y_m, z) \rightarrow \Delta$, their join, $\pi_1 \triangleright\triangleleft \pi_2$ is a binding $\pi : X \rightarrow \Delta$ where x, y, z are free variables and $X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z)$, iff every common variable z must be mapped to same constant $c \in \Delta$.

A correspondent binding for Φ will be: for (i) $\pi = \pi_{\phi_1} \times \dots \times \pi_{\phi_n}$, and for (ii) $\pi = \pi_{\phi_1} \triangleright\triangleleft \dots \triangleright\triangleleft \pi_{\phi_n}$.

The following theorems show applications of \times and $\triangleright\triangleleft$ for bindings.

Theorem 1. Given a formula $\Phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, where ϕ_1, ϕ_2 are CQ formulas, a binding $\pi = \pi_1 \triangleright\triangleleft \pi_2$ is a match for Φ iff bindings π_1, π_2 are matches for ϕ_1, ϕ_2 .

Proof. It is true based on the definition of the join operator.

Theorem 2. Given a formula $\Phi = \phi_1 \vee \phi_2$, where ϕ_1, ϕ_2 are CQ formulas, a binding $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ is a match for Φ iff the binding π_1 is a match for ϕ_1 or the binding π_2 is a match for ϕ_2 .

Proof. The \Rightarrow direction is trivial.

For \Leftarrow direction, assume $\pi_1 : (x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow \Delta$, $\pi_2 : (y_1, \dots, y_m, z) \rightarrow \Delta$, and they are matches for ϕ_1 and ϕ_2 . From the nature of disjunction, we know that formula Φ is satisfiable if either ϕ_1 or ϕ_2 is satisfiable. That means there is a match for either ϕ_1 or ϕ_2 . If z appears in both of the CQs, renaming z in one of the CQs does not change the validity. Therefore, we have that $\pi : (x_1, \dots, x_n, z, y_1, \dots, y_m, z') \rightarrow \Delta$ which is obtained from $\pi_1 \times \pi_2$ is indeed a match for Φ .

Now, consider a structure of a certain answer to a union of temporal CQs (UTCQ). It is a combination of answers to a (set of) TCQ obtained at proper time points, referred by temporal operators used in a UTCQ.

One more thing to be explicitly addressed is that known algorithms for conjunctive query answering, such as [6],[7], are focused on query entailment, that is, a Boolean conjunctive query answering. This means that the task of answering an atemporal CQ requires a preprocessing step, and considers a Boolean conjunctive query answering algorithm as a black box. Namely, at the preprocessing step a candidate match (a tuple of variables, substituted via some binding π with a tuple of individuals c) is submitted to a Boolean conjunctive query answering engine, and that engine decides if such a candidate match is a certain answer.

Now, present the algorithm informally.

Eliminate temporal operators in a UTCQ. The important step in our algorithm is to get a normal form where the temporal operators are used to decide at which time point each CQ should be evaluated. This is done by iterative application of the expansion rules Table 1. For every O and O^- operator, we just shift one point forward and backward. By doing these, we obtain a query that is in normal form whose atoms are UCQs, except some recursion atom which is a TCQ.

Replace the Boolean operators with relational operators. Every conjunction is replaced with join and every disjunction – with cross-product.

Retrieve an answer. Use an arbitrary query answering algorithm [4-7] as a black-box approach to compute a set of answers for a given UCQ. If the original UTCQ contains $U, S, \square^-, \diamond^-, \diamond$, the normal form of the transformed query might contain a recursion. In such case, if the time point $i < 0$ or $i > n$, then return \emptyset , else evaluate CQs with leading O or O^- for U, S and for derived modalities (if any).

Algorithm 1. Decide Q

Input:

$K = (T, (A_i)_{0 \leq i \leq n})$: a knowledge base, consists of a TBox and a sequence of ABoxes at a time point i , $0 \leq i \leq n$

Q : a UTCQ

Output: $\text{Ans}(Q, i)$ - a set of certain answers to Q at time point i

$\text{Ans}(Q, i) = \emptyset$

repeat

$\text{Ans}' = \text{Ans}(Q, i)$

if $Q = \text{TCQ}_1 \vee \text{TCQ}_2$ then

$\text{Ans}(Q, i) = \text{Ans}(\text{TCQ}_1, i) \times \text{Ans}(\text{TCQ}_2, i)$

end if

if $Q = \text{TCQ}_1 \wedge \text{TCQ}_2$ then

$\text{Ans}(Q, i) = \text{Ans}(\text{TCQ}_1, i) \bowtie \text{Ans}(\text{TCQ}_2, i)$

end if

if $Q = O^- \text{TCQ}$ then

if $i=1$ then

$\text{Ans}(Q, i) = \emptyset$

else

$\text{Ans}(Q, i) = \text{Ans}(\text{TCQ}, i - 1)$

end if

end if

if $Q = O \text{TCQ}$ then

if $i=n$ then

$\text{Ans}(Q, i) = \emptyset$

else

$\text{Ans}(Q, i) = \text{Ans}(\text{TCQ}, i + 1)$

end if

```

end if
if Q = TCQ1 U TCQ2 then
    if i = n then
        Ans(Q, i) = Ans(TCQ2, i)
    else
        Ans(Q, i) = Ans(TCQ2, i) × (Ans(TCQ1, i) ▷◁ Ans(Q, i + 1))
    end if
end if
if Q = TCQ1 S TCQ2 then
    if i = l then
        Ans(Q, i) = Ans(TCQ2, i)
    else
        Ans(Q, i) = Ans(TCQ2, i) × (Ans(TCQ1, i) ▷◁ Ans(Q, i - 1))
    end if
end if
until Ans' = Ans(Q, i)
return Ans(Q, i)

```

In Table 1, presented are some equivalence rules in LTL, used in Algorithm 1.

Table 1 – Equivalence rules of LTL for future operators. Taken from [12]

idempotent rule	$\Box \Psi \equiv \Box \Box \Psi, \Diamond \Psi \equiv \Diamond \Diamond \Psi, \Psi_1 U (\Psi_1 U \Psi_2) \equiv \Psi_1 U \Psi_2, (\Psi_1 U \Psi_2) U \Psi_2 \equiv \Psi_1 U \Psi_2$
commutativity rule	$\Box O \Psi \equiv O \Box \Psi, \Diamond O \Psi \equiv O \Diamond \Psi, O(\Psi_1 U \Psi_2) \equiv O \Psi_1 U O \Psi_2$
distributivity rule	$\Box(\Psi_1 \wedge \Psi_2) \equiv \Box \Psi_1 \wedge \Box \Psi_2, \Diamond(\Psi_1 \vee \Psi_2) \equiv \Diamond \Psi_1 \vee \Diamond \Psi_2, O(\Psi_1 \wedge \Psi_2) \equiv O \Psi_1 \wedge O \Psi_2,$ $O(\Psi_1 \vee \Psi_2) \equiv O \Psi_1 \vee O \Psi_2, (\Psi_1 \wedge \Psi_2) U \Psi_3 \equiv (\Psi_1 U \Psi_3) \wedge (\Psi_2 U \Psi_3),$ $\Psi_1 U (\Psi_2 \vee \Psi_3) \equiv (\Psi_1 U \Psi_2) \vee (\Psi_1 U \Psi_3)$
temporal recursion rule	$\Box \Psi \equiv \Psi \wedge O \Box \Psi, \Diamond \Psi \equiv \Psi \vee O \Diamond \Psi, \Psi_1 U \Psi_2 \equiv \Psi_2 \vee O(\Psi_1 \wedge \Psi_2)$
absorption rule	$\Diamond \Box \Diamond \Psi \equiv \Box \Diamond \Psi, \Box \Diamond \Box \Psi \equiv \Diamond \Box \Psi$

For the illustration of Algorithm 1 consider some examples, assuming that Algorithm 1 returns a set Ans of answers to Ψ at the time point i .

Example 3. Given a TCQ query $\Psi = O^-(\Phi_1 U \Phi_2)$ at a point i .

$$\begin{aligned}
 \text{Ans}(\Psi, i) &= \text{Ans}(O^-(\Phi_1 U \Phi_2)) \\
 &= \text{Ans}((\Phi_1 U \Phi_2), i-1) \quad /* \text{move back one point by } O^- \\
 &= \text{Ans}(\Phi_2 \vee (\Phi_1 \wedge O \Psi), i-1) \quad /* \text{expansion rule for } U \\
 &= \text{Ans}(\Phi_2, i-1) \times \text{Ans}(\Phi_1 \wedge O \Psi, i-1) \quad /* \text{transforming } \vee \\
 &= \text{Ans}(\Phi_2, i-1) \times (\text{Ans}(\Phi_1, i-1) \triangleright \triangleleft \text{Ans}(O \Psi, i-1)) \quad /* \text{transforming } \wedge \\
 &= \text{Ans}(\Phi_2, i-1) \times (\text{Ans}(\Phi_1, i-1) \triangleright \triangleleft \text{Ans}(\Psi, i)) \quad /* \text{move forward one point by } O
 \end{aligned}$$

If $i = 0$ in $\text{Ans}(\Phi_2, i-1)$ and $\text{Ans}(\Phi_1, i-1)$, then the evaluation of Ψ is the empty set.

A more complex example is given below.

Example 4. Given a TCQ query $\Psi = \Diamond^-(\Phi_1 U \Phi_2)$ at a point i .

$$\begin{aligned}
 \text{Ans}(\Psi, i) &= \text{Ans}(\Diamond^-(\Phi_1 U \Phi_2)) \\
 &= \text{Ans}((\Phi_1 U \Phi_2) \vee O^- \Psi, i) \quad /* \text{expansion rule for } \Diamond^-
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Ans}(\Phi_1 \cup \Phi_2, i) \times \text{Ans}(O^- \Psi, i) \text{ /* transforming } \vee \\
&= \text{Ans}(\Phi_1 \cup \Phi_2, i) \times \text{Ans}(\Psi, i-1) \text{ /* move back one point by } O^- \\
&= \text{Ans}(\Phi_2 \vee (\Phi_1 \wedge O \Psi'), i) \times \text{Ans}(\Psi, i-1) \text{ /* We substitute } \Phi_1 \cup \Phi_2 \text{ with } \Psi' \text{ and apply the expansion rule for } \cup \\
&= \text{Ans}(\Phi_2, i) \times \text{Ans}(\Phi_1 \wedge O \Psi', i) \times \text{Ans}(\Psi, i-1) \text{ /* transforming } \wedge \\
&= \text{Ans}(\Phi_2, i) \times (\text{Ans}(\Phi_1, i) \triangleright \triangleleft \text{Ans}(O \Psi', i)) \times \text{Ans}(\Psi, i-1) \text{ /* transforming } \wedge \\
&= \text{Ans}(\Phi_2, i) \times (\text{Ans}(\Phi_1, i) \triangleright \triangleleft \text{Ans}(\Psi', i+1)) \times \text{Ans}(\Psi, i-1) \text{ /* move forward one point by } O
\end{aligned}$$

If $i = n$ in $\text{Ans}(\Psi', i+1)$, then $\text{Ans}(\Psi', i+1)$ is evaluated to the empty set.

There is one thing we have to ensure that in the intersection of two sets of answers for conjunction of CQs a certain answer is obtained, i.e. there is a common answer for both CQs, otherwise an empty set. One way to do this is to retrieve all answers for each CQ and then to intersect them to get some common answers. Another way is first to retrieve an answer of a UCQ and then to decide if this answer is also the answer for the other CQs in the conjunction, otherwise keep retrieving and deciding until there is no more answer obtained. The former way is preferred since it offers more practical solution. It means that we can deal with it using relational algebra operators or database language operators.

Termination, soundness, completeness of the algorithm

Definition 8. (UTCQ closure). Given a temporal union of conjunctive queries Q , its *closure set*, $Cl(Q)$ is a set of query atoms closed under the following rules

$$\begin{aligned}
&\text{if } q \in Q \text{ then } q \in Cl(Q), \\
&\text{if } O^- q \in Q \text{ then } q \in Cl(Q), \\
&\text{if } O q \in Q \text{ then } q \in Cl(Q), \\
&\text{if } q_1 \wedge q_2 \text{ then } q_1, q_2 \in Cl(Q), \\
&\text{if } q_1 \vee q_2 \text{ then } q_1, q_2 \in Cl(Q), \\
&\text{if } q_1 \cup q_2 \text{ then } q_1, q_2, O(q_1 \cup q_2) \in Cl(Q), \\
&\text{if } q_1 S q_2 \text{ then } q_1, q_2, O^-(q_1 S q_2) \in Cl(Q).
\end{aligned}$$

Since a closure set for a UTCQ is finite, Algorithm 1 terminates after a finite number of steps.

Theorem 3. (Local) termination. Given a UTCQ Q and a knowledge base $K = (T, (A_i)_{0 \leq i \leq n})$. Algorithm 1 always terminates.

Proof. We can show the local termination inductively.

Base case. Any query is also contained in the closure set of itself.

Inductive case.

$C(a), r(a_1, a_2)$ If we have a query Q which is atomic, then the closure set contains $C(a)$ or $r(a_1, a_2)$.

$(O^- \text{TCQ})$ For such query $Cl(Q) = \{\text{TCQ}, O^- \text{TCQ}\}$, i.e. evaluated are two elements, and in case of $i = 0$ the value of $O^- \text{TCQ}$ is known to be \emptyset , so Algorithm 1 stops after two evaluations.

$(\text{TCQ}_1 \cup \text{TCQ}_2)$ For such query $Cl(Q) = \{\text{TCQ}_2, \text{TCQ}_1, \text{TCQ}_1 \cup \text{TCQ}_2, O(\text{TCQ}_1 \cup \text{TCQ}_2)\}$.

$(\text{TCQ}_1 S \text{TCQ}_2)$ For such query $Cl(Q) = \{\text{TCQ}_2, \text{TCQ}_1, \text{TCQ}_1 S \text{TCQ}_2, O(\text{TCQ}_1 S \text{TCQ}_2)\}$.

Theorem 4. Soundness. If for UTCQ Q its answer set $\text{Ans}(Q(x), i)$, obtained with Algorithm 1, is not empty, then Q has at least those certain answers that are in $\text{Ans}(Q, i)$.

Proof. We prove by induction. We start with evaluating non-temporal query, i.e. a query containing no temporal operator.

Base case. If we have an atomic query in the form of $C(a)$, then using any approach of CQ answering we obtain all the answers for the query Q entailment over $K = (T, (A_i)_{0 \leq i \leq n})$. If $K \models C(a)$ and $a \in \text{Ans}(Q(x), i)$, the function returns a and this value is stored in $\text{Ans}(Q(x); i)$. By Definition 4, this result tells us that the individual a is a certain answer to the query $C(x)$ w.r.t. the match $\pi(x) = a$. The same result is obtained if we have atomic query in the form of $r(a, b)$.

Inductive case can be obtained by Definition 4.

Theorem 5. Completeness. If a UTCQ Q has a certain answer ans , then Algorithm 1 shows that this answer is in $Ans(Q, i)$.

Proof. By contradiction. Assume that (i) $Q(x)$ has a certain answer ans w.r.t π , (ii) $Ans(Q, i)$ - is a set of certain answers obtained by Algorithm 1, and (iii) $ans \notin Ans(Q, i)$. By (i), we know that $K \models Q(ans)$ and that for all time points $0 \leq i \leq n$ in all models I , such that $I \models K$, $I \models Q(ans)$. By (ii), for Algorithm 1 to return $Ans(Q, i)$ such that $ans \notin Ans(Q, i)$ there are several reasons for it.

Q is atomic. If Q is atomic, i.e. in the form $C(x)$ or $r(x, y)$, then we know that $Ans(Q, i)$ does not contain ans . This means that there is a model I of a knowledge base K which does not entail $Q(ans)$. But this is a contradiction to our assumption (i).

$(TCQ_1 \wedge TCQ_2)$. If $Ans(Q, i)$ does not contain ans , according to Algorithm 1 it means that $ans \notin Ans(TCQ_1, i) \supset \Delta Ans(TCQ_2, i)$. This, in turn, leads to the existence of a model I of a knowledge base K such that $I \models TCQ_1(ans)$ and $I \not\models TCQ_2(ans)$ or vice versa, that contradicts to (i).

$(TCQ_1 \vee TCQ_2)$. If $Ans(Q, i)$ does not contain ans , according to Algorithm 1 it means that $ans \notin Ans(TCQ_1, i) \times Ans(TCQ_2, i)$. This, in turn, leads to the existence of a model I of a knowledge base K such that either $I \not\models TCQ_1(ans)$ or $I \not\models TCQ_2(ans)$, that contradicts to (i).

$(O^- TCQ)$. If $Ans(Q, i)$ does not contain ans , according to Algorithm 1 it means that $ans \notin Ans(Q, i-I)$. This, in turn, leads to the existence of a model I of a knowledge base K such that $I, i-I \not\models Q(ans)$, that contradicts to (i).

$(TCQ_1 U TCQ_2)$. If $Ans(Q, i)$ does not contain ans , according to Algorithm 1 it means that $ans \notin Ans(TCQ_2, i) \times (Ans(TCQ_1, i) \supset \Delta Ans(Q, i+I))$. This, in turn, leads to the existence of a model I of a knowledge base K such that either $I, i \not\models TCQ_2(ans)$ or $I, i \not\models TCQ_1(ans)$ and $I, i+I \not\models Q$, that contradicts to (i).

$(TCQ_1 S TCQ_2)$. If $Ans(Q, i)$ does not contain ans , according to Algorithm 1 it means that $ans \notin Ans(TCQ_2, i) \times (Ans(TCQ_1, i) \supset \Delta Ans(Q, i-I))$. This, in turn, leads to the existence of a model I of a knowledge base K such that either $I, i \not\models TCQ_2(ans)$ or $I, i \not\models TCQ_1(ans)$ and $I, i-I \not\models Q$, that contradicts to (i).

The proof for the temporal operator O acting in the direction of future can be completed in the same manner.

CONCLUSIONS

Obtaining benefits from keeping a large evolving ABox of a knowledge base in a database and applying TBox of that knowledge base to obtain missing assertional axioms is one of the ways of dealing with complex evolving domains. It is interesting, due to high computational complexity of temporal conjunctive query answering in general, to find a balance between the expressivity of a query language and its practical applicability.

The main results of the paper are:

- for the point-based linear finite time structure elaborated is the language of unions of temporal conjunctive queries, which allows to evaluate atemporal unions of conjunctive queries at different time points. The language could serve as a simple yet expressive means to query a sequence of ABoxes sharing one TBox;
- proposed is an algorithm of answering a union of temporal conjunctive queries for the proposed language, which harnesses set-theoretic operations on atomic queries answer sets. Proved are its termination, soundness and completeness.

REFERENCES

1. Poggi A. Linking Data to Ontologies / A. Poggi, D. Lembo, D. Calvanese, G. De Giacomo, M. Lenzerini, R. Rosati // J. on Data Semantics. — 2008. — X. — P. 133—173.
2. Baader F. A Novel Architecture For Situation Awareness Systems / F. Baader, A. Bauer, P. Baumgartner, A. Cregan, A. Gabaldon, K. Ji, K. Lee, D. Rajaratnam, R. Schwitter // Giese M., Waaler A. (eds.). — Proc. 18th International Conference on Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods (Tableaux 2009). — LNCS. — 2009. — Vol. 5607. — P. 77—92.
3. The Description Logic Handbook: Theory, Implementation, and Applications / [Baader F., Calvanese D., McGuinness D. L. et al.]. — Cambridge University Press, 2003. — 555 p.
4. Tessaris S. Questions and Answers: Reasoning and Querying in Description Logic / Sergio Tessaris. — The University of Manchester, 2001. — 199 p.
5. Ortiz de la Fuente M. M. Query Answering in Expressive Description Logics Techniques and Complexity Results. PhD Thesis / Maria Magdalena Ortiz de la Fuente. — Technischen Universität Wien, Fakultät für Informatik, 2010. — 175 p.

6. Glimm B. Querying Description Logic Knowledge Bases. PhD Thesis / Birte Glimm. — The University of Manchester, 2007. — 192 p.
7. Motik B. Reasoning in Description Logics using Resolution and Deductive Databases / Boris Motik. — Universität Karlsruhe, 2006. — 249 p.
8. On the Complexity of Temporal Query Answering. Technical report LTCS-Report 13-01 [electronic resource] / F. Baader, S. Borgwardt, M. Lippmann — Available at : <http://lat.inf.tudresden.de/research/reports/2013/BaBoLi-LTCS-13-01.pdf>.
9. Lipeck U. W. Transformation of Dynamic Integrity Constraints into Transaction Specifications / U. W. Lipeck // Theor. Comput. Sci. — 1990. — 76(1). — P. 115—143.
10. Schwiderski S. Monitoring Temporal Preconditions in a Behaviour Oriented Object Model / S. Schwiderski, T. Hartmann, G. Saake // Data Knowl. Eng. — 1994. — 14(2). — P. 143—186.
11. Lipeck U. W. Construction of Deterministic Transition Graphs from Dynamic Integrity Constraints / U.W. Lipeck, D. Feng. — LNCS. — 1989. — Vol. 344. — P.166—179.
12. Baier C. Principles of Model Checking / C. Baier, J.-P. Katoen. — The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2008. — 975 p.
13. Abiteboul S. Foundations of Databases / S. Abiteboul, R. Hull, V. Vianu. — Addison-Wesley, 1995. — 685 p.

УДК 519.85

ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Косолап А. И., д. ф.-м. н., профессор, Перетятко А. С., аспирант

Украинский государственный химико-технологический университет

В работе задачи комбинаторной оптимизации преобразуются к квадратичным. Затем используется полуопределенная релаксация для преобразования квадратичных задач к линейным полуопределенным задачам, в которых искомым является полуопределенная матрица. Для решения задачи полуопределенного программирования используется новый полуопределенный симплекс-метод. Найденное решение уточняется с помощью прямо-двойственного метода внутренней точки. Проведенные численные эксперименты подтверждают эффективность рассмотренных методов для решения комбинаторных задач оптимизации.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, квадратичная оптимизация, полуопределенная релаксация, полуопределенное программирование, полуопределенный симплекс-метод, метод внутренней точки.

Косолап А. И., Перетятко А. С. НАПІВВИЗНАЧЕНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ / Український державний хіміко-технологічний університет, Україна

У роботі задачі комбінаторної оптимізації перетворюються до квадратичних. Потім використовується напіввизначена релаксація для перетворення квадратичних задач до лінійних напіввизначених задач, у яких знаходиться напіввизначена матриця. Для розв'язання задач напіввизначеного програмування використовується новий напіввизначений симплекс-метод. Знайдений розв'язок уточнюється за допомогою прямо-двоїстого методу внутрішньої точки. Проведені чисельні експерименти підтверджують ефективність розглянутих методів для розв'язання комбінаторних задач оптимізації.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, квадратична оптимізація, напіввизначена релаксація, напіввизначене програмування, напіввизначений симплекс-метод, метод внутрішньої точки.

Kosolap A. I., Peretiatchko A. S. SEMIDEFINITE PROGRAMMING FOR THE SOLUTION THE PROBLEMS OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION / Ukrainian State University of Chemical Technology, Ukraine

The study deals with quadratic optimization problems with Boolean variables. Such problems arise in economics, management, technology, resource allocation, design, information systems, etc. The difficulty is that these problems may contain lots of local minima and feasible set of these problems can be nonconvex and discrete. Most of these problems belong to NP-hard problems, and there are only exponential algorithms for their solving. One of the common approaches for solving this class of problems is semidefinite relaxation.

In this case the quadratic function $x^T A x$ is represented in the form $A x x^T$ or $A \bullet X$, where A is symmetric matrix, and X is positive semidefinite matrix of rank one. This transformation allows to reduce the general quadratic problem to linear semidefinite optimization problem (SDP), in which the unknown variable is the

semidefinite matrix. However, semidefinite relaxation is an approximate transformation (without the requirement that the rank of the matrix X is 1).

This study transforms the quadratic optimization problem with Boolean variables to general quadratic problem, where Boolean constraints are replaced by quadratic $x_i(x_i - 1) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Using a semidefinite relaxation we obtain a semidefinite programming problem where we must find a semidefinite matrix. The semidefinite programming problem is equivalent to the original problem if the matrix X is semidefinite matrix with the rank one. However, the condition that the matrix should be of the rank one cannot be set analytically. Therefore, we solve the problem without this condition. Then the solution of the semidefinite programming problem defines a lower bound for the solution of the original problem. The solution of the semidefinite programming problem X^* determines the exact solution of the original problem if X^* is semidefinite one-rank matrix.

Obtained semidefinite programming problem are solved by the new semidefinite simplex method. Unlike the usual simplex method, in semidefinite simplex method we solve a sequence of the problems of linear programming, using the property of semidefinite matrices $X = \sum_j \alpha_j X_j$ (it means that any semidefinite matrix can be represented as the sum of one-rank matrices). At each iteration we define a new column of the constraints matrix from the solution of simple quadratic optimization problem $\min \{x^T Q x \mid \|x\|^2 = 1\}$. We solve this problem using the new method of conjugate directions: at first we modify the matrix Q into semidefinite, then linearize the objective function and solve the resulting problem using Lagrange multiplier method. If x^* is the solution of the resulting problem then the matrix Q is positive semidefinite if $x^{*T} Q x^* \geq 0$. In this case the semidefinite programming problem is solved; otherwise the search for the solution of SDP problem by the simplex method will be continued.

Software for the proposed method was developed and numerical experiments were performed for well-known test knapsack problems. The numerical experiments have confirmed the efficiency of the given methods for solving combinatorial optimization problems. They show that this method often can find the point of global minimum of the original problem if we use solution of the semidefinite problem as a starting point for the original problem.

Keywords: combinatorial optimization, quadratic optimization, semidefinite relaxation, semidefinite programming, semidefinite simplex method, interior point method.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи из различных областей знаний требуют выбора одной из множества возможных альтернатив. Такие задачи возникают в экономике, управлении, технике, распределении ресурсов, в проектировании, информационных системах и т.п. При математическом моделировании эти задачи преобразуются к линейным или квадратичным задачам оптимизации с булевыми переменными. Большинство таких задач относятся к классу NP-сложных, для которых разработаны только экспоненциальные алгоритмы. Эти алгоритмы эффективны для решения задач малой размерности, но оптимизационные задачи часто содержат тысячи и даже сотни тысяч переменных. Для решения таких задач необходимо разработать новые, более эффективные методы.

В последние годы для решения многих NP-сложных задач используется полуопределенная релаксация [1], позволяющая свести их к выпуклым задачам полуопределенного программирования. Для задач полуопределенного программирования разработаны эффективные алгоритмы [2-3]. Однако, в общем случае, полуопределенная релаксация позволяет находить только нижнюю оценку решения исходной задачи (для задач на минимум и верхнюю оценку для задач на максимум). Такая оценка является точной, если искомая матрица полуопределенного программирования имеет ранг единица. В противном случае, необходимо уточнять эту нижнюю оценку. Лучшим методом для этого является прямо-двойственный метод внутренней точки [4]. Этот же метод разработан и для задач полуопределенного программирования [2], однако для этого класса задач он менее эффективный, что связано с более сложной теорией двойственности и плохой обусловленностью полуопределенных матриц. Поэтому поиск более эффективных методов полуопределенного программирования продолжается. В работе использован новый, более эффективный полуопределенный симплекс-метод [5]. Он решает только прямую задачу и находит решение в виде линейной комбинации матриц ранга единица.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу булевой комбинаторной оптимизации

$$\min \{c^T x \mid Ax \leq b, x = 0 \vee 1, x \in E^n\}, \quad (1)$$

где c – n -мерный вектор, A – матрица размера $(m \times n)$, x – n -мерный вектор с компонентами 0 или 1, E^n – n -мерное евклидово пространство. Предлагаемая методика решения комбинаторных задач

применима и для более общей задачи квадратичной оптимизации с квадратичными ограничениями и булевыми переменными

$$\min \{x^T Q_0 x + q_0^T x \mid x^T Q_i x + q_i^T x \leq r_i, i = 1, \dots, m, x = 0 \vee 1, x \in E^n\}, \quad (2)$$

где все Q_i – симметрические матрицы размера $(n \times n)$, q_i , x – n -мерные вектора. Более общие полиномиальные задачи могут быть преобразованы к квадратичным (2) последовательной заменой $z_i = x_i^2$. Например, полиномиальное ограничение $x_1 x_2 x_3 - x_1^5 x_2 - x_3^4 \leq 1$ преобразуется к эквивалентным квадратичным ограничениям

$$\{x \mid z_1 z_3 - z_2 z_4 - z_3^2 \leq 1, z_1 = x_1 x_2, z_2 = x_1^2, z_3 = x_3^2, z_4 = z_1 z_2\}.$$

Заменим в задачах (1-2) булевы переменные квадратичным условием $x_i(x_i - 1) = 0$, $i = 1, \dots, n$ где теперь переменные x_i могут принимать произвольные значения. Естественно, что допустимыми будут только значения 0 или 1.

Таким образом, комбинаторные задачи (1-2) преобразуются к общей квадратичной задаче

$$\min \{x^T Q_0 x + q_0^T x \mid x^T Q_i x + q_i^T x \leq r_i, i = 1, \dots, m, x^T Q_i x + q_i^T x = r_i, i = m + 1, \dots, p, x \in E^n\}. \quad (3)$$

Используем для ее решения полуопределенную релаксацию. Учитывая, что $x^T Q x = Q \bullet x x^T = Q \bullet X$, где

$$Q \bullet X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}$$

есть скалярное произведение матриц, преобразуем задачу (3) к полуопределенной

$$\min \{\bar{A}_0 \bullet X \mid \bar{A}_i \bullet X \leq 0, i = 1, \dots, m, \bar{A}_i \bullet X = 0, i = m + 1, \dots, p, X \succeq 0\}, \quad (4)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & x x^T \end{pmatrix},$$

$$x^T Q_i x + q_i^T x - r_i = \begin{pmatrix} -r_i & \frac{q_i^T}{2} \\ \frac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & x x^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_i & \frac{q_i^T}{2} \\ \frac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet X = \bar{A}_i \bullet X, i = 0, 1, \dots, p.$$

Преобразованная задача (4) будет эквивалентной задаче (3), если решением задачи (4) будет полуопределенная матрица X^* ранга единица. Все матрицы ранга единица представимы в виде $x x^T$. Ввести в ограничения задачи (4) условие, что ранг матрицы X равен единица невозможно, так как это условие проверяется алгоритмически. Поэтому данное условие в задаче (4) опускают, оставляя только положительную полуопределенность матрицы X . Естественно, такое ослабление ограничений может приводить к уменьшению целевой функции и к недопустимому решению, если решение линейной задачи (4) достигается не в крайнем луче конуса полуопределенных матриц.

Известный факт, что любая положительно полуопределенная матрица X представима в виде линейной комбинации матриц ранга единица [6]

$$X = \sum_j \alpha_j X_j,$$

где $X_j = x^j x^{jT}$ – матрицы ранга единица, а все $\alpha_j \geq 0$, используем для преобразования задачи (4) к задаче линейного программирования

$$\min \{C \bullet \sum_j \alpha_j X_j \mid A_i \bullet \sum_j \alpha_j X_j = b_i, i = 1, \dots, p, \alpha \geq 0\}. \quad (5)$$

В задаче (4) ограничения-неравенства преобразуются к равенствам посредством ввода дополнительных свободных переменных. Задачу (5) можно решать обычным симплекс-методом или прямо-двойственным методом внутренней точки, но для этого необходимо определить начальный набор образующих X_j конуса положительно полуопределенных матриц. Фактически, вместо конуса положительно

полуопределенных матриц мы берем многогранный конус. После решения задачи (5) мы можем определить, существует ли новая образующая X_k такая, что замена $X = \sum_j \alpha_j X_j$ на

$$X = \sum_j \alpha_j X_j + \alpha_k X_k$$

приведет к уменьшению целевой функции в задаче (5). Для этого необходимо решить простую задачу квадратичной оптимизации

$$\min \{ x^T Q x \mid \|x\|^2 = 1 \}, \quad (6)$$

где

$$Q = C - \sum_j C \cdot x_j x_j^T \sum_{j=1}^m b_{ij}^{-1} A_j,$$

b_{ij}^{-1} – элементы базисной матрицы B^{-1} симплекс-метода. Хорошо известно, что задача (6) эффективно разрешима [7]. Очевидно, что решение задачи (6) совпадает с решением задачи

$$\min \{ x^T Q x + r(\|x\|^2 - 1) \mid \|x\|^2 = 1 \}.$$

Выберем $r > 0$ таким, чтобы матрица $Q^* = Q + rI$ была положительно определенной. Для этого достаточно, чтобы

$$q_{ii}^* > \sum_{i \neq j} |q_{ij}^*|, \forall i,$$

где q_{ij}^* – элементы матрицы Q^* . Таким образом, решение задачи (6) сводится к поиску собственного вектора матрицы Q^* , соответствующему ее минимальному собственному значению. Это равносильно решению задачи

$$\min \{ x^T Q^* x \mid \|x\|^2 = 1 \}$$

или задачи

$$\max \{ \|x\|^2 \mid x^T Q^* x = 1 \}. \quad (7)$$

При надлежащем выборе начального значения x^0 , k -е приближение решения задачи (7) может быть найдено в явном виде (используя метод множителей Лагранжа для последовательности задач $\max \{ (x^k)^T x \mid x^T Q^* x = 1 \}, k = 0, 1, \dots$)

$$x^k = \frac{(Q^*)^{-k} x^0}{\sqrt{x^0 (Q^*)^{-(2k-1)} x^0}}.$$

Пусть x^* – решение задачи (7), тогда матрица Q – положительно полуопределенная при условии $x^{*T} Q x^* \geq 0$. В этом случае задача (4) решена, в противном случае поиск решения задачи (4) симплекс-методом будет продолжен.

Запишем задачу (1-2) или полиномиальную задачу в общем виде

$$\min \{ f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p, x \in E^n \}, \quad (8)$$

где все $f_i(x)$ полиномиальные функции (ограничения-равенства можно заменить двумя ограничениями неравенствами). Найденное решение задачи (4) используем в качестве начальной точки для решения задачи (1-2) прямо-двойственным методом внутренней точки [4]. Преобразуем ограничения задачи (8) к равенствам

$$\min \left\{ f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^p \ln(z_i) \mid f_i(x) + z_i = 0, i = 1, \dots, p \right\},$$

тогда функция Лагранжа этой задачи будет иметь вид

$$L(x, y, z) = f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^p \ln(z_i) - \sum_{i=1}^p y_i (f_i(x) + z_i),$$

условия минимума которой равны

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x) - \nabla f_i(x)^T y &= 0, \\ f_i(x) + z_i &= 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ -\mu Z^{-1} e + y &= 0. \end{aligned}$$

Метод Ньютона для этой нелинейной системы уравнений на каждой итерации решает линейную систему уравнений

$$\begin{bmatrix} G(x, y) & A^T(x) & 0 \\ A(x) & 0 & Z \\ A(x) & -I & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f_0(x) - A^T(x)y \\ -f(x) - z \\ \mu e - ZYe \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $G(x, y)$ – гессиан функции Лагранжа, $A(x) = \nabla f(x)$, $Y = \text{diag}(y_1, \dots, y_p)$, $Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_p)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, I – единичная матрица, а $e = (1, \dots, 1)$. Решение линейной системы (9) используем для перехода в следующую точку

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_k \Delta x^k, \\ y^{k+1} &= y^k + \alpha_k \Delta y^k, \\ z^{k+1} &= z^k + \alpha_k \Delta z^k. \end{aligned}$$

На каждой итерации значение параметра μ убывает по формуле $\mu = x^T z / n$. Параметр α выбирается так, чтобы $z^{k+1} \geq 0$. Показано, что данный метод глобально сходится к точке локального минимума за полиномиальное время [8].

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для рассмотренного полуопределенного симплекс-метода разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты.

Рассмотрим некоторые тестовые задачи, приведенные в [9] для решения задачи о ранце

$$\max \{ p^T x \mid a^T x \leq b, x = 0 \vee 1 \}. \quad (10)$$

Верхняя оценка решения x^0 этой задачи (для задачи минимизации это будет нижняя оценка), полученная полуопределенным симплекс методом, уточнялась посредством решения следующей задачи

$$\min \{ \|x - x^0\|^2 \mid a^T x = b, x_i(x_i - 1) = 0, i = 1, \dots, n \} \quad (11)$$

прямо-двойственным методом внутренней точки.

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 1, где видим, что решение задачи (11) совпадает с оптимальным решением задачи (10).

Таблица 1 – Результаты численных экспериментов над задачами из [9]

Задача (10) в [9]	Размерность задачи	Полученная верхняя оценка (задача (4))	Полученная нижняя оценка (задача (11))	Оптимальное решение
1	2	3	4	5
2.1	8	294,988	280	280
2.2	7	107,5393	107	107
2.3	6	159,997	150	150
2.4	7	127,0274	127	127
2.5	8	1189,51	900	900

ВЫВОДЫ И НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Задачи комбинаторной оптимизации преобразованы к общим квадратичным задачам для решения которых применяется полуопределенная релаксация. Найденное решение задачи полуопределенного программирования новым полуопределенным симплекс-методом используется в качестве начальной

точки для прямо-двойственного метода внутренней точки. Как показали численные эксперименты, решение, найденное методом внутренней точки, совпадает с точным решением исходной комбинаторной задачи. Возможна модификация полуопределенного симплекс-метода, позволяющая находить решение задачи полуопределенного программирования в виде матрицы ранга единица.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vandenberghe L. Semidefinite programming / L. Vandenberghe, S. Boyd // SIAM Review. — 1996. — Vol. 38. — P. 49-95.
2. Todd M. J. Semidefinite optimization / M. J. Todd // Acta Numerica. — 2001. — № 10. — P. 515-560.
3. Helmborg C. Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization / C. Helmborg. — Berlin, 2000. — 150 p.
4. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. — Springer, 2006. — 685 p.
5. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. — Днепропетровск : Наука и образование, 2013. — 318 с.
6. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир. — 1989. — 656 с.
7. Fortin C. Computing the local minimizers of a large and sparse trust region subproblem / C. Fortin. — Montreal : McGill University, 2004. — 149 p.
8. Nesterov Y. Interior point polynomial algorithms in convex programming / Y. Nesterov, A. S. Nemirovskii // SIAM Studies in Applied Mathematics. — 1994. — Vol. 13. — SIAM, Philadelphia, USA. — 405 p.
9. Martello S. Knapsack problems: algorithms and computer implementation / S. Martello, P. Toth. — Chichester : John Wiley & Sons, 1990. — 296 p.

УДК 517.982

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЧИСЛОВИМ РАДІУСОМ ТА НАПІВНОРМОЮ МОРЕ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА ПРОСТОРАХ L_p ПРИ $1 < p < \infty$

Красікова І. В., к. ф.-м. н.

Запорізький національний університет

У роботі досліджуються дві числові характеристики лінійних неперервних операторів, заданих на просторах L_p при $1 < p < \infty$ – напівнорма Море та числовий радіус оператора. Поняття числового образу та числового радіуса оператора виникло у 70-х роках минулого століття. Числовий образ лінійного неперервного оператора T , заданого на банаховому просторі X , визначається як $V(T) = \{f(Tx) : f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, де S_X – одинична сфера простору X . Згідно з теоремою Гана-Банаха, для кожного $x \in S_X$ існує лінійний неперервний функціонал $f \in S_{X^*}$, для якого $f(x) = 1$. Отже, числовий образ лінійного неперервного оператора є непорожньою множиною чисел. Зокрема, існує супремум модуля числового образу $v(T) = \sup\{|f(Tx)| : f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, який називається числовим радіусом оператора T . Числовий радіус лінійного неперервного оператора T задовольняє умову $0 \leq v(T) \leq \|T\|$. Поняття напівнорми Море було введено у роботі [1]. У цій роботі був описаний новий клас лінійних неперервних операторів на просторах $L_p = L_p([0; 1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 < p < \infty$ (тут \mathcal{B} – борелівська σ -алгебра, а λ – міра Лебега) – оператори Море, які можна розглядати як узагальнення компактних операторів на просторах L_p . Цей клас операторів виник при опрацюванні техніки доведення відомої теореми Енфлю про примарність простору L_p при $1 \leq p < \infty$, яке було запропоноване Б. Море. Для кожного лінійного неперервного оператора T на борелівській σ -алгебрі \mathcal{B} задаються дві функції M_T, m_T , які є мірами множини і називаються верхньою та нижньою мірами Море оператора T , відповідно. Обидві ці міри мають похідні Радона-Нікодіма $F_T, f_T \in L_\infty$, які носять назви верхньої та нижньої похідної Море оператора T . Верхня та нижня похідні Море задовольняють нерівність $\|F_T\|_\infty \leq \|T\|$, $\|f_T\|_\infty \leq \|T\|$. Напівнормою Море $\|T\|_M$ оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при цьому називається найбільша з величин $\|F_T\|_\infty, \|f_T\|_\infty$. Напівнорма Море оператора T дійсно є напівнормою на просторі $\mathcal{L}(L_p)$ і при цьому задовольняє нерівність $\|T\|_M \leq \|T\|$. У роботі доводиться, що має місце краща оцінка $\|T\|_M \leq v(T)$, де $v(T)$ – числовий радіус оператора T .

Ключові слова: лінійний неперервний оператор, простір L_p , верхня і нижня норми Море оператора, верхня і нижня похідні Море оператора, напівнорма Море оператора, числовий радіус оператора.

Красикова И. В. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЧИСЛОВЫМ РАДИУСОМ И ПОЛУНОРМОЙ МОРЕ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАНЫХ НА ПРОСТРАНСТВАХ L_p ПРИ $1 < p < \infty$ / Запорожский национальный университет, Украина

В статье изучаются две числовые характеристики линейных непрерывных операторов, заданных на пространствах L_p при $1 < p < \infty$ – полунорма Море и числовой радиус оператора. Понятие числового образа и числового радиуса оператора возникло в 70-х годах прошлого века. Числовой образ линейного непрерывного оператора T , заданного на банаховом пространстве X , определяется как $V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, где S_X – единичная сфера пространства X . Согласно теореме Хана-Банаха, для каждого $x \in S_X$ существует функционал $f \in S_{X^*}$, для которого $f(x) = 1$. Значит, числовой образ линейного непрерывного оператора является непустым множеством чисел. В частности, существует супремум модуля числового образа $v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, который называется числовым радиусом оператора T . Числовой радиус линейного непрерывного оператора T удовлетворяет условию $0 \leq v(T) \leq \|T\|$. Понятие полунормы Море было введено в работе [1]. В этой работе был описан новый класс линейных непрерывных операторов на пространствах $L_p = L_p([0; 1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 < p < \infty$ (тут \mathcal{B} – борелевская алгебра, а λ – мера Лебега) – операторы Море, которые можно рассматривать как обобщение компактных операторов на пространствах L_p . Этот класс операторов возник при изучении техники доказательства известной теоремы Энфла о прозрачности пространства L_p при $1 \leq p < \infty$, которое было предложено Б. Море. Для каждого линейного непрерывного оператора T на борелевской алгебре \mathcal{B} задаются две функции M_T, m_T , которые представляют собой меры множеств и называются верхней и нижней мерами Море оператора T , соответственно. Обе эти меры имеют производные Радона-Никодима $F_T, f_T \in L_\infty$, называемые верхней и нижней производными Море оператора T . Верхняя и нижняя производные Море удовлетворяют неравенствам $\|F_T\|_\infty \leq \|T\|$, $\|f_T\|_\infty \leq \|T\|$. Полунормой Море $\|T\|_M$ оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при этом называется наибольшая из величин $\|F_T\|_\infty, \|f_T\|_\infty$. Полунорма Море оператора T действительно является полунормой на пространстве $\mathcal{L}(L_p)$ и при этом удовлетворяет неравенству $\|T\|_M \leq \|T\|$. В настоящей работе показывается, что имеет место лучшая оценка $\|T\|_M \leq v(T)$, где $v(T)$ – числовой радиус оператора T .

Ключевые слова: линейный непрерывный оператор, пространство L_p , верхняя и нижняя нормы Море оператора, верхняя и нижняя производные Море оператора, полунорма Море оператора, числовой радиус оператора.

Krasikova I. V. A RELATION BETWEEN THE NUMERICAL RADIUS AND THE MAUREY SEMINORM OF OPERATORS ON L_p -SPACES FOR $1 < p < \infty$ / Zaporizhzhye National University, Ukraine

In the paper we investigate two numerical characteristics of continuous linear operators acting on L_p -spaces for $1 < p < \infty$ – the Maurey seminorm and the numerical radius of operators. Notions of a numerical image and a numerical radius of operators were introduced in the 70th of the past century. A numerical range of the continuous linear operator T on a Banach space X , is defined as $V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, where S_X is the unit sphere of X . According to the Hahn-Banach theorem, for each $x \in S_X$ there is a continuous linear functional $f \in S_{X^*}$, for which $f(x) = 1$. Hence, the numerical image of a continuous linear operator is a non-empty set of numbers. In particular, there is a supremum of the modulus numerical image $v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, which is called the numerical radius of the operator T . The numerical range of a continuous linear operator T satisfies the condition $0 \leq v(T) \leq \|T\|$. The notion of the Maurey seminorm was introduced in [1]. In this paper we described a new class of continuous linear operators on $L_p = L_p([0; 1], \mathcal{B}, \lambda)$ for $1 < p < \infty$ (here \mathcal{B} is the Borel σ -algebra, and λ is the Lebesgue measure) – Maurey operators which can be considered as a generalization of the notion of compact operators on L_p -spaces. Using a technique of B. Maurey which he had proposed for the proof of the famous Enflo theorem on primarity of the space L_p $1 \leq p < \infty$, we introduced this class of operators. For an arbitrary continuous linear operator T on the Borel σ -algebra \mathcal{B} we defined two functions M_T, m_T which are measures of a set. They are called the upper and lower Maurey measures of the operator T , respectively. Both these measures have the Radon-Nikodym derivatives $F_T, f_T \in L_\infty$, which are called the upper and lower Maurey derivatives of the operator T . The upper and lower Maurey derivatives satisfy the inequalities $\|F_T\|_\infty \leq \|T\|$, $\|f_T\|_\infty \leq \|T\|$. Then the greatest of the values $\|F_T\|_\infty, \|f_T\|_\infty$ is called the Maurey seminorm $\|T\|_M$ of an operator $T \in \mathcal{L}(L_p)$. It is indeed a seminorm on the space $\mathcal{L}(L_p)$ and it satisfies the inequality $\|T\|_M \leq \|T\|$. In this paper we prove that there is a better estimate $\|T\|_M \leq v(T)$, where $v(T)$ is the numerical radius of the operator T .

Keywords: continuous linear operator, L_p -space, the upper and lower Maurey measures of the operator, the upper and lower Maurey derivatives of the operator, Maurey's seminorm of the operator, the numerical radius of the operator.

У 70-х роках минулого століття з'явилися поняття числового образу та числового радіуса оператора, які активно вивчаються до сьогодні (огляд сучасних результатів див. у [2]).

Нехай X – банахів простір і $T \in \mathcal{L}(X)$ – лінійний неперервний оператор на X . Згідно з [3], *числовий образ* оператора T визначається так:

$$V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\},$$

де S_X – одинична сфера простору X . Згідно з теоремою Гана-Банаха, для кожного $x \in S_X$ існує функціонал $f \in S_X^*$, для якого $f(x) = 1$. Отже, числовий образ лінійного неперервного оператора є непорожньою числовою множиною. Зокрема, існує супремум модуля числового образу

$$v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_X^*, x \in S_X, f(x) = 1\},$$

який називається *числовим радіусом* оператора T .

Очевидно, що числовий радіус оператора задовольняє нерівність $0 \leq v(T) \leq \|T\|$. Крім того, відображення $v: X \rightarrow [0; +\infty)$ є напівнормою на X .

Нарешті, *числовий індекс* банахового простору X уводиться таким чином:

$$n(X) = \inf\{v(T): T \in \mathcal{L}(X), \|T\| = 1\}.$$

Наведемо деякі відомості про числовий індекс банахового простору. Зауважимо, що нерівність $n(X) > 0$ означає, що напівнорма $v(\cdot)$ на просторі $\mathcal{L}(X)$ є еквівалентною до операторної норми $\|\cdot\|$. Теорія числового індексу різна для дійсних і комплексних просторів. У дійсному випадку числовий індекс знаходиться на відрізку $[0; 1]$, причому приймає усі значення з цього відрізка. У комплексному випадку відповідний відрізок значень – це $[\frac{1}{e}; 1]$, де e – число Ейлера. Числовий індекс деяких класичних банахових просторів обчислено точно. Наприклад, $n(L_1(\mu)) = 1$ для довільної σ -скінченної міри μ . Крім того, $n(C(K)) = 1$ для довільного компакта K . Якщо H – гільбертів простір, розмірність якого більша за одиницю, тоді $n(H) = 0$ у дійсному випадку і $n(H) = \frac{1}{2}$ у комплексному випадку. Точне значення числового індексу банахового простору $L_p(\mu)$ поки що не знайдене при $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, проте відомо [4], що всі нескінченновимірні простори $L_p(\mu)$ мають один і той самий числовий індекс, який збігається з інфімумом числових індексів скінченновимірних просторів l_p^m за всіма $m \geq 2$ [5]. Нещодавно було доведено [6], що кожний дійсний простір $L_p(\mu)$ має додатний числовий індекс при $p \neq 2$.

Ми досліджуємо числовий радіус лінійних неперервних операторів, заданих на дійсних банахових просторах $L_p = L_p([0; 1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 < p < \infty$. Тут \mathcal{B} – борелівська σ -алгебра, а λ – міра Лебега. Основний результат пов'язує між собою числовий радіус та напівнорму Море таких операторів.

Нагадаємо, що поняття «оператора Море» було уведено в роботі [1] у результаті опрацювання статті Море [7]. Оператори Море узагальнюють поняття компактних операторів на цих просторах і відіграють роль «малих» операторів.

Нехай Z – одинична куля простору L_∞ зі слабою* топологією $\sigma(L_\infty, L_1)$. Для кожної борелівської множини A на $[0; 1]$ покладемо

$$Z(A) = \left\{ h \in Z: h^2 = \mathbf{1}_A, \int_{[0;1]} h \, d\lambda = 0 \right\},$$

де $\mathbf{1}_A$ – характеристична функція множини $A \subseteq [0; 1]$. Будемо розглядати $Z(A)$ з топологією, індукованою Z .

У роботі [7] для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ послідовно визначаються дві числові характеристики:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_T(A) &= \lim_{Z(A) \ni h \rightarrow 0} \sup \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda, \\ M_T(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \tilde{M}_T(A_k) : n \in \mathbb{N}, A = \bigcap_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{B} \right\}. \end{aligned}$$

Визначена таким чином функція множини M_T є зліченно-адитивною мірою на \mathcal{B} та має похідну Радона-Нікодима $F_T \in L_\infty$ з умовою $\|F_T\|_\infty \leq \|T\|$, тобто для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ виконується рівність

$$M_T(A) = \int_A F_T \, d\lambda.$$

Лема 1. [7] Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$, кожної множини $A \in \mathcal{B}$ та кожного околу нуля U в Z існує така функція $h \in Z(A) \cap U$, що

$$\left| M_T(A) - \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

Визначену вище міру M_T на борелівській σ -алгебрі \mathcal{B} будемо називати *верхньою мірою Море* оператора T , а функцію $F_T \in L_\infty$ – *верхньою похідною Море* оператора T .

Аналогічно визначається нижня міра Море оператора T та нижня похідна Море. Для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ визначаються дві характеристики:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_T(A) &= \lim_{Z(A) \ni h \rightarrow 0} \inf_{[0;1]} \int hTh \, d\lambda, \\ m_T(A) &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \tilde{m}_T(A_k) : n \in \mathbb{N}, A = \bigcup_{k=1}^n A_k, A_k \in \mathcal{B} \right\}. \end{aligned}$$

Визначена таким чином функція m_T є зліченно-адитивною мірою на \mathcal{B} та називається *нижньою мірою Море* оператора T . Вона також має похідну Радона-Нікодіма $f_T \in L_\infty$ з умовою $\|f_T\|_\infty \leq \|T\|$, яку ми називаємо *нижньою похідною Море* оператора T , тобто для кожної множини $A \in \mathcal{B}$ виконується рівність

$$m_T(A) = \int_A f_T \, d\lambda.$$

Для нижньої міри Море має місце результат, аналогічний лемі 1:

Лема 2. [7] Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$, кожної множини $A \in \mathcal{B}$ та кожного околу нуля U в Z існує така функція $h \in Z(A) \cap U$, що

$$\left| m_T(A) - \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| < \varepsilon.$$

У роботі [1, с. 40] встановлений зв'язок між верхніми та нижніми похідними Море:

Лема 3. Для довільних операторів $T, S \in \mathcal{L}(L_p)$ виконується нерівність:

$$f_S + f_T \leq f_{S+T} \leq F_{S+T} \leq F_S + F_T.$$

Для оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при $1 \leq p < \infty$ число

$$\|T\|_M = \max\{\|F_T\|, \|f_T\|\}$$

назвемо *напівнормою Море* оператора T .

Зауважимо, що напівнорма Море дійсно є напівнормою на $\mathcal{L}(L_p)$, причому $\|T\|_M \leq \|T\|$ для кожного $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Дійсно, з лемі 3 випливає, що майже скрізь на $[0; 1]$ виконується нерівність

$$-\|S\|_M - \|T\|_M \leq f_S + f_T \leq f_{S+T} \leq F_{S+T} \leq F_S + F_T \leq \|S\|_M + \|T\|_M.$$

Отже, для майже всіх $t \in [0; 1]$

$$|f_{S+T}(t)| \leq \|S\|_M + \|T\|_M, |F_{S+T}(t)| \leq \|S\|_M + \|T\|_M.$$

Таким чином, $\|S + T\|_M \leq \|S\|_M + \|T\|_M$. Нерівність $\|\alpha T\|_M \leq |\alpha| \|T\|_M$ для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ та нерівність $\|T\|_M \leq \|T\|$ є очевидними. Однак, останню оцінку можна поліпшити. А саме, має місце наступний результат:

Теорема. Для довільного оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ має місце оцінка

$$v(T) \geq \|T\|_M.$$

Доведення. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо множину $A \in \mathcal{B}$ додатної міри таким чином, щоб

$$\frac{1}{\lambda(A)} \left| \int_A F_T \, d\lambda \right| \geq \|F_T\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

та за лемою 1 виберемо функцію $h \in Z(A)$, щоб

$$\left| M_T(A) - \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| < \frac{\varepsilon \lambda(A)}{2}.$$

Тоді для функцій $x = h/\sqrt[p]{\lambda(A)}$, $x^* = h/\sqrt[q]{\lambda(A)}$ одержуємо

$$\begin{aligned} v(T) &\geq \left| \int_{[0;1]} x^*Tx \, d\lambda \right| = \frac{1}{\lambda(A)} \left| \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| \geq \frac{1}{\lambda(A)} \left| \int_A F_T \, d\lambda \right| - \frac{1}{\lambda(A)} \left| M_T(A) - \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| \geq \\ &\geq \|F_T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|F_T\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Це означає, що $v(T) \geq \|F_T\|$.

Аналогічно, виберемо тепер множину $C \in \mathcal{B}$ додатної міри так, щоб

$$\frac{1}{\lambda(C)} \left| \int_C f_T \, d\lambda \right| \geq \|f_T\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

та за лемою 2 виберемо функцію $h \in Z(C)$, щоб

$$\left| m_T(C) - \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| < \frac{\varepsilon \lambda(C)}{2}.$$

Як і у попередньому випадку, для функцій $x = h/\sqrt[p]{\lambda(C)}$, $x^* = h/\sqrt[q]{\lambda(C)}$ одержуємо оцінку

$$\begin{aligned} v(T) &\geq \left| \int_{[0;1]} x^*Tx \, d\lambda \right| = \frac{1}{\lambda(C)} \left| \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| \geq \frac{1}{\lambda(C)} \left| \int_C F_T \, d\lambda \right| - \frac{1}{\lambda(C)} \left| m_T(C) - \int_{[0;1]} hTh \, d\lambda \right| \geq \\ &\geq \|f_T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \|f_T\| - \varepsilon, \end{aligned}$$

тобто $v(T) \geq \|f_T\|$.

Об'єднуючи дві одержані умови, отримаємо, що

$$v(T) \geq \max\{\|F_T\|, \|f_T\|\} = \|T\|_M.$$

Отже, основним результатом дослідження є встановлення зв'язку між числовим радіусом та напівнормою Море лінійних неперервних операторів, заданих на просторах L_p при $1 < p < \infty$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Красікова І. В. Про одне узагальнення поняття компактного оператора на просторах L_p / І. В. Красікова, М. М. Попов // Науковий вісник Чернівецького університету : Вип. 501. Математика. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. — С. 38-42.
2. Kadets V. Recent progress and open questions on the numerical index of Banach spaces / V. Kadets, M. Martín, R. Payá // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. — 2006. — 100. — P. 155-182.
3. Duncan J. The numerical index of a normed spaces / J. Duncan, C. Mc-Gregor, J. Pryce, A. White // J. London Math. Soc. — 1970. — 2. — P. 81-488.
4. Ed-dari E. On the numerical index of Banach spaces / E. Ed-dari // Linear Algebra Appl. — 2005. — 403. — P.86-96.
5. Ed-dari E. On the numerical index of vector-valued function spaces / E. Ed-dari, M. Khamsi, A. Aksoy // Linear Algebra Appl. — 2007. — 55. — P.507-513.
6. Martín M. On the numerical index of real $L_p(\mu)$ -spaces / M. Martín, J. Merí, M. Popov // Israel J. Math. — 2010 (to appear).
7. Maurey B. Sous-espaces complémentés de L^p d'après P.Enflo / B. Maurey // Semin. Maurey – Schwartz. — 1975. — 1974-75, Exp. No.III. — P.1-14.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ ДАННЫХ

Мухин В. В., к. т. н., доцент, Чопоров С. В., к. т. н., доцент

Запорожский национальный университет

В работе предлагаются алгоритмы визуализации свойств сеточно-заданных поверхностей. Предложенные алгоритмы позволяют визуализировать такие свойства поверхностей как форма и фронт волны за малое машинное время с максимальной точностью, что достигается использованием формул численного дифференцирования.

Ключевые слова: сетка, функция, дифференциальная характеристика, форма, фронт волны.

Мухін В. В., Чопоров С. В. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНИХ ДАНИХ / Запорізький національний університет, Україна

У запропонованій роботі розглядаються алгоритми візуалізації властивостей поверхонь, що задані сіткою. Розглянуті алгоритми дозволяють візуалізувати такі властивості поверхонь як форма й фронт хвилі за малий машинний час з максимальною точністю, що досягається використанням формул чисельного диференціювання.

Ключові слова: сітка, функція, диференційна характеристика, форма, фронт хвилі.

Mukhin V. V., Choporov S. V. DIFFERENTIAL PROPERTIES VISUALIZATION OF MESH-DEFINED DATA / Zaporizhzhya National University, Ukraine

This article describes the problem of computer modeling complex geometrical objects. Authors consider discrete models (meshes) of geometrical objects and propose new approaches for surface differential properties visualization. These discrete models can be obtained by topographical or radar scanning of a surface (e.g., surface of a planet).

Authors propose differential properties called the form and the front of a wave for a mesh-defined surface visualization in the first section of the article.

The form in same point is an angle between a surface gradient and Ox axe vector. The form property visualizes a break of a surface. The form is equal zero in extreme points of a surface.

The front of a wave in some point is an angle between normal vector of a surface and Oz axe vector. The front of a wave visualizes character of surface curvature.

Authors propose algorithm for mesh-defined surfaces differential properties visualization. Described algorithm based on the form and the front of a wave. It uses halftone images for visualization. Described algorithms have polynomial complexity.

The last section of the article shows some examples of mesh-defined surface properties visualization. These examples visualize the form of a surface using R-function values in nodes of a mesh.

Keywords: mesh, function, differential characteristic, the form, the front of the wave.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В настоящее время компьютерное моделирование объектов и процессов реального мира занимает ведущее место в научных и инженерных исследованиях. Одной из наиболее актуальных здесь проблем является проблема определения различных механических характеристик объектов или конструкций. Для решения возникающих при этом дифференциальных уравнений на практике часто используются различные численные методы, основанные на идее перехода от непрерывного представления объекта к его дискретной модели.

При решении прикладных задач механики, дистанционном исследовании поверхностей, разработке геоинформационных систем возникает необходимость визуализации больших массивов данных. Графические методы используются в задачах кластеризации для выявления закономерностей, характерных для массивов данных [1-3]. На базе различных типов графиков производится анализ психофизических [4] и финансовых [5] данных. Методы визуализации активно используются для выявления закономерностей и аномалий в больших объемах экспериментальной информации [6].

В работе для визуального исследования данных предлагается использовать такие ее проявления, как форма и фронт волны [7-10]. Алгоритмы, предложенные в работах [7-10], предполагают, что визуализируемая функция в области визуализации является непрерывной явно заданной функцией. Однако применение предложенных алгоритмов для дискретных данных (характерных для экспериментов) вызывает затруднение. Решению данной проблемы посвящена предложенная работа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ И ФРОНТА ВОЛНЫ

Привязка градации тона к направлению проекции вектора нормали на плоскость xOy позволяет упростить восприятие направления склонов поверхности, активизируя при этом точки, в которых это

направление отсутствует [7]. Такими точками являются экстремальные точки, в которых касательная плоскость параллельна горизонту, а проекция вектора нормали на плоскость xOy равна 0. Такой подход позволяет выделить характер изломов поверхности, поэтому определен как «форма» [7]. Форма определяется углом между градиентом функции и положительным направлением оси Ox (угол α на рисунке 1).

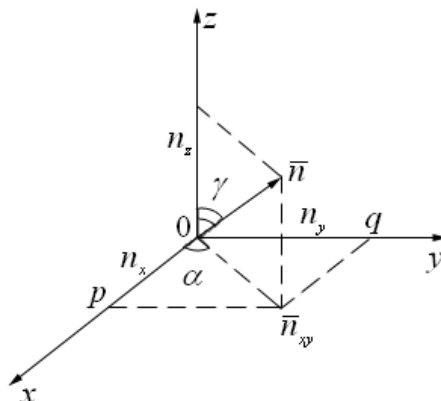


Рис. 1. Углы, определяющие форму и фронт волны

Второе свойство характеризует определение отклонения нормали от выбранного направления и активизирует восприятие изменения характера поверхности, пренебрегая характером излома [7]. В этом случае оно определено как «фронт волны» [7]. Фронт волны определяется как угол между нормалью и осью Oz (угол γ на рисунке 1).

Нормаль к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_m, y_m, z_m)$ представляется уравнениями [8]:

$$\frac{X - x_m}{\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_M} = \frac{Y - y_m}{\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_M} = \frac{Z - z_m}{\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_M}. \quad (1)$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{X - x_m}{p} = \frac{Y - y_m}{q} = \frac{Z - z_m}{-1},$$

или в параметрической форме:

$$\begin{cases} X = pt + x_m, \\ Y = qt + y_m, \\ Z = (-1)t + z_m, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } p = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M \text{ и } q = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M.$$

Из уравнения (2) можно получить длины проекций вектора нормали при $t = 1$ на оси координат:

$$\begin{aligned} n_x &= \left| \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M \right|, \\ n_y &= \left| \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_M \right|, \\ n_z &= 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассматривая на рис. 1 соответствующие треугольники, найдем углы α и γ , учитывая четверти, в которых они располагаются.

Угол α . Пусть $\alpha = 0$ при одновременном выполнении равенств $n_x = 0$ и $n_y = 0$ (т.е. нормаль проецируется в точку). Также будем считать, что при $n_x = 0$ и $n_y \neq 0$ $\arctg \frac{n_y}{n_x} = \frac{\pi}{2}$.

1. $p > 0$ и $q \geq 0$ (первая четверть): $\alpha = \arctg \frac{n_y}{n_x}$.
2. $p < 0$ и $q \geq 0$ (вторая четверть): $\alpha = \pi - \arctg \frac{n_y}{n_x}$.
3. $p < 0$ и $q < 0$ (третья четверть): $\alpha = -\pi + \arctg \frac{n_y}{n_x}$.
4. $p > 0$ и $q < 0$ (четвертая четверть): $\alpha = -\arctg \frac{n_y}{n_x}$.

Угол γ . Косинус γ является направляющим косинусом для вектора-нормали, его найдем по формуле:

$$\cos \gamma = \frac{-1}{n_x^2 + n_y^2 + 1} \Rightarrow \gamma = \arccos \left(\frac{-1}{n_x^2 + n_y^2 + 1} \right). \quad (4)$$

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для определения частных производных используем формулы соответствующих разностных производных. Пусть функция $f(x, y)$ задана в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= f(x_i, y_j), \\ x_i &= a_x + ih_x, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ y_j &= a_y + jh_y, \quad j = 0, 1, \dots, m, \\ h_x &= \frac{b_x - a_x}{n}, \quad a_x < b_x, \\ h_y &= \frac{b_y - a_y}{m}, \quad a_y < b_y, \end{aligned} \quad (5)$$

где a_x, b_x, a_y, b_y — соответственно, ограничивают область задания функции, n — количество отрезков разбиения вдоль оси Ox , m — количество отрезков разбиения вдоль оси Oy , h_x — шаг по оси Ox , h_y — шаг по оси Oy . Тогда выражения частных производных будут иметь вид [11]:

$$z'_x|_{0,j} = \frac{z_{1,j} - z_{0,j}}{h_x}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (6)$$

$$z'_x|_{n,j} = \frac{z_{n,j} - z_{n-1,j}}{h_x}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$z'_x|_{i,j} = \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2h_x}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (8)$$

$$z'_y|_{i,0} = \frac{z_{i,1} - z_{i,0}}{h_y}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

$$z'_y|_{i,m} = \frac{z_{i,m} - z_{i,m-1}}{h_y}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$z'_y|_{i,j} = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2h_y}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \quad (11)$$

Учитывая изложенное выше, составим алгоритмы построения дифференциальных характеристик поверхностей. Предположим, что сеточная функция z_{ij} полностью определена согласно формулам (5).

Тогда для визуализации рассмотренных свойств поверхности можно использовать блок-схему, приведенную на рис. 2.

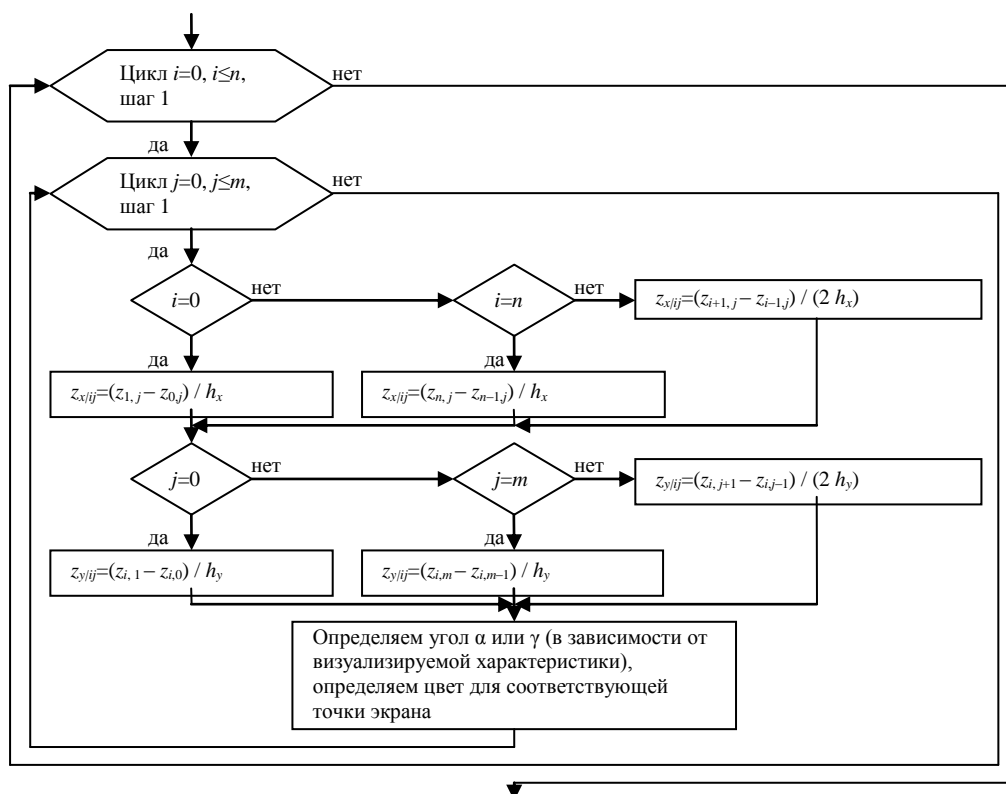
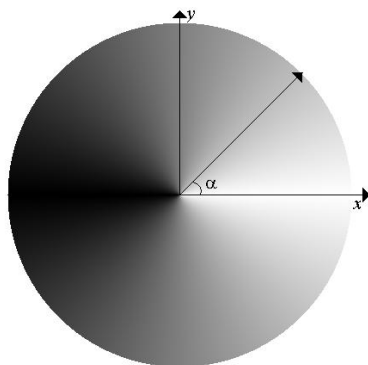


Рис. 2. Блок-схема алгоритма определения характеристик

Интенсивность окраски поверхности в зависимости от угла α определяем по формуле:

$$Color = 255 - \left\lfloor \frac{255 \cdot \alpha}{\pi} \right\rfloor. \quad (12)$$

Таким образом, распределение градации тона от белого к черному цвету равномерно изменяется при изменении угла α от 0° до 180° , затем, наоборот, от 180° до 360° градусов происходит падение тона до белого [7] (рис. 3).

Рис. 3. Интенсивность окраски поверхности в зависимости от угла α

Такая организация окраски позволяет имитировать привычное для глаза освещение поверхности, но вид поверхности отличен от обычного, поскольку отображает лишь параметр формы [7].

Чтобы определить характер образа наклона нормали воспользуемся тем же законом освещенности [7]. Формула (12) принимает вид:

$$Color = \left\lfloor 255 - \frac{255 \cdot \gamma}{\frac{\pi}{2}} \right\rfloor. \quad (13)$$

В зависимости от угла наклона полученного градиента распределение градации тона будем изменять при значении γ от 0° до 90° градусов соответственно от белого к черному цвету, затем, наоборот, от 90° до 180° градусов происходит падение тона до белого [7] (рисунок 4).

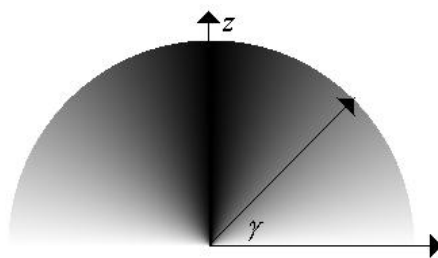


Рис. 4. Интенсивность окраски поверхности в зависимости от угла γ

Предложенный подход может быть использован также для неструктурированных сеток (путем интерполяции значений на элементе). Некоторые результаты применения такого подхода для визуализации формы дискретных моделей сложных геометрических областей, в узлах которых заданы значения соответствующей аналитической модели (при помощи R-функций [12-13]), приведены на рис. 5.

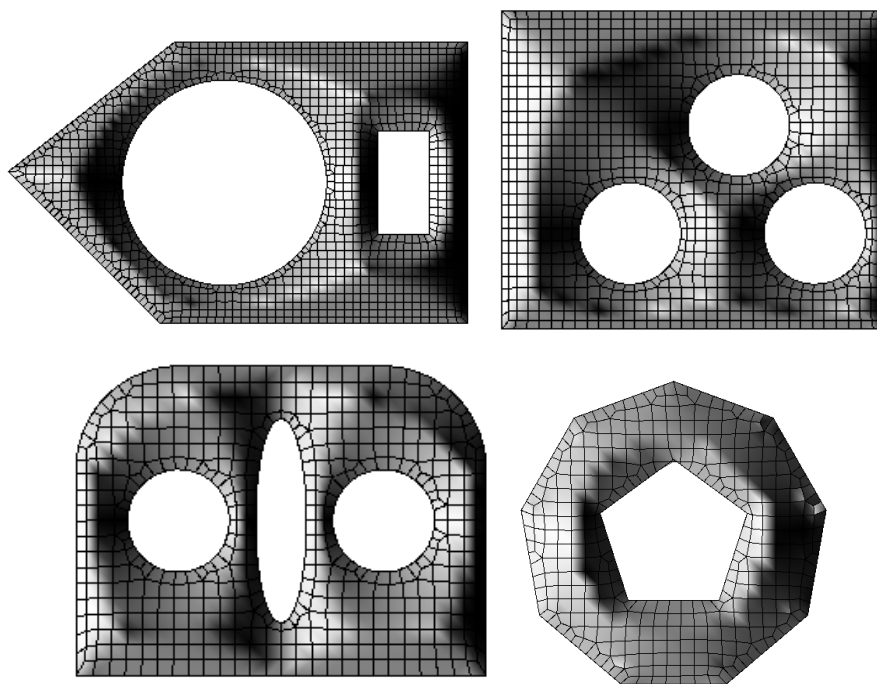


Рис. 5. Некоторые результаты применения предложенного подхода

ВЫВОДЫ

Таким образом, горизонтальная плоскость касания в точке исследуемой поверхности принимает максимальную световую интенсивность освещения, а при вертикальной плоскости касания исследуемой поверхности световая интенсивность снижается до нуля.

Предложенные алгоритмы позволяют построить дифференциальные характеристики поверхностей заданных сеточно, что позволяет их применять для визуализации задач механики и физики. Так же достоинство предложенного подхода – это низкая вычислительная сложность, которая очевидно будет оцениваться полиномом второй степени.

При явном задании функции, зная размеры раstra изображения, можно оптимально выбрать количество отрезков разбиения вдоль соответствующих осей и получить, таким образом, максимально подробное изображение.

Недостатком предложенной схемы является наличие погрешности при ее использовании. Погрешность построения будет эквивалентна погрешности разностных схем, использованных при определении значений частных производных. Погрешность разностных формул (6)-(11) составляет $O(h^2)$ [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюк В. А. Информационные технологии в медико-биологических исследованиях / В. А. Дюк, В. Эммануэль. — СПб : Питер, 2003. — 528 с.

2. Марухина О. В. Технологии визуализации результатов экспериментальных исследований / О. В. Марухина, О. Г. Берестнева, В. А. Воловоденко, К. А. Шаропин // Информационные и математические технологии в науке и управлении. — Ч. 3. — Иркутск, 2010. — С. 165-171.
3. Попечителей Е. П. Анализ числовых таблиц в биотехнических системах обработки экспериментальных данных / Е. П. Попечителей. — Л. : Наука, 1985. — 148 с.
4. Шаропин К. А. Визуализация результатов экспериментальных исследований / К. А. Шаропин, О. Г. Берестнева, Г. И. Шкатова // Известия Томского политехнического университета. — 2010. — Т. 316. — № 5. — С. 172-176.
5. Wong D. M. The Wall Street Journal Guide to Information Graphics: The Dos and Don'ts of Presenting Data, Facts, and Figures / Dona M. Wong. — New York : W.W. Norton & Company, 2010. — 160 p.
6. Берестнева О. Г. Визуализация экспериментальных многомерных данных на основе обобщенных графических образов / О. Г. Берестнева, В. А. Воловоденко, К. А. Шаропин, О. М. Гергет // Вестник науки Сибири. — 2011. — № 1(1). — С. 363-369.
7. Толок А. В. Модель геометрической поддержки для описания формы поверхности / А. В. Толок, В. В. Мухин // Сборник научных трудов, посвященных 10-летию университета. Математика. Физика. — Запорожье : Запорожский государственный университет, 1995. — С. 86-91.
8. Толок А. В. Алгоритм итерационного уточнения области исследования поверхности / А. В. Толок, В. В. Мухин // Вісник Запорізького державного університету. — 1998. — № 2. — С. 90-97.
9. Толок А. В. Исследование функции одной переменной с помощью графических образов / А. В. Толок, В. В. Мухин // Вісник Запорізького державного університету. — 1999. — № 1. — С. 108-112.
10. Толок А. В. Рекурсивный алгоритм разбиения области с дополнительными параметрами уточнения / А. В. Толок, В. В. Мухин // Вестник Херсонского государственного университета. — 2003. — № 3(19). — С. 312-314.
11. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1987. — 288 с.
12. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. — К. : Наукова думка, 1982. — 552 с.
13. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. — 2001. — Т. 4, № 1-2. — С. 46-58.

УДК 004.9

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Науменко Д. А., бакалавр, Кондратьева Н. А., к. ф.-м. н., доцент, Мухин В. В., к. т. н., доцент,
Леонтьева В. В., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет

В статье приведён способ организации графической информации, который даёт возможность выделить особые точки и линии изгибов поверхности. Разработана реализация алгоритма уточнения рассматриваемой области для исследования поверхности.

Ключевые слова: функция двух переменных, графическая информация, программа на C++, особые точки поверхности, линии изгибов поверхности.

Науменко Д. А., Кондрат'єва Н. А., Мухін В. В., Леонтьєва В. В. ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ
ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ПОВЕРХНІ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ / Запорізький національний університет, Україна

У статті наведено спосіб організації графічної інформації, який дає можливість виділити особливі точки та лінії вигинів поверхні. Розроблена реалізація алгоритму уточнення розглянутої області для дослідження поверхні.

Ключові слова: функція двох змінних, графічна інформація, програма на C++, особливі точки поверхні, лінії вигинів поверхні.

Naumenko D. A., Kondratyeva N. A., Mukhin V. V., Leontieva V. V. INFORMATION TECHNOLOGY RENDER THE SURFACE OF A FUNCTIONS OF TWO VARIABLES / Zaporizhzhya National University, Ukraine

In this paper, proposed a new way of organizing information graphics, which allows to allocate specific points and lines bends surface of the object, as well as to provide a reliable and fair graphical representation of geometric objects, that is especially important in the design of complex engineering structures. The proposed method is based on the recursive refinement of the area under consideration for studying the surface of a geometric object. It is considered recursive algorithm for visualization differential properties of functions of two variables. The proposed algorithm allows to visualize the properties of surfaces such as the form and wave front with maximum precision and is associated with a dynamic process. It gives the possibility of operational interference in the processing in each level in the hierarchy of recursion, in turn, permits variation of the methods of investigation in local areas of considered area. The advantage of the proposed algorithm is the possibility of visual evaluation of the image still in the early stage of processing the graphic information. Implemented in the algorithm binding gradation of tone to the direction of projection of the normal vector to the plane XOY can greatly simplify the perception of the direction of the surface slope, while intensifying the points in which this line is missing. Such points in this case are the extreme points at which the tangent plane is parallel to the horizon. This approach allows to allocate character of breaks investigated surface and therefore defined as «*form*». In this approach, the concept of Form determined by the angle between the projection of the gradient on the plane OXY and the positive direction of the axis OX .

The second property, under consideration, characterizes the deviation of the normal to the selected direction and activates perception changing nature of the surface, ignoring the nature of the fracture. In this case, decided to determine it as the «*wavefront*». At the same time, introduced the concept of Wavefront is defined as the angle between the gradient and the axis OZ .

The proposed information visualization technology, allows to extend the class of problems for the visual analysis in different applications of mathematics.

Key words: the function of two variables, graphics, program in C++, singular points of surfaces, lines of curved surfaces.

ВВЕДЕНИЕ

В наше время очень интенсивно развивается программное обеспечение [1-3]. Одним из самых популярных направлений является разработка новых технологий и методов визуализации результатов работы программ, то есть такой их подачи, в которой они наиболее адекватно воспринимаются человеком [1, 2].

Понимание графического образа как графической информации является актуальной проблемой. Для ее решения необходимо разработать новые принципы. Они должны позволять активизировать информацию, которая была интересной, за счет использования различных изобразительных средств [1, 3, 5].

Визуальный анализ работает с *графической информацией*, которая представляет собой визуальный образ геометрического объекта и сводится к зрительному выделению основных свойств поверхности [1, 2]. Традиционные изображения поверхности не всегда позволяют однозначно определить особые точки и линии изгибов формы поверхности. Необходима дополнительная оценка с применением зрительной интерполяции для определения элементов подобного рода [1].

Решению этой проблемы посвящена предлагаемая работа, в которой изложен новый способ организации графической информации. Он дает возможность отображать характеристики графической информации и основан на рекурсивном уточнении рассматриваемой области для исследования поверхности геометрического объекта. Программная реализация выполнена на языке программирования C++ с использованием библиотек WinForms.

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕКУРСИВНОГО РАЗБИЕНИЯ

В алгоритме рекурсивного разбиения прямоугольная область, заданная пользователем, на которой исследуется функция, разбивается на участки в виде правильных n -угольников. Правильность участка обусловлена использованием радиального принципа разбиения области на подобласти.

Одной из проблем, возникающих при работе подобного алгоритма, является определение места расположения n -угольника относительно заданной области исследования функции [1-4]. В данной работе эта проблема решается рекурсивным образом, сущность которого состоит в следующем. На первом шаге рекурсии определяется радиус R и координаты X_c , Y_c центра окружности, охватывающей прямоугольную область исследования функции с вписанным в нее правильным n -угольником. На каждом следующем шаге рекурсии участок в виде правильного n -угольника разбивается на n одинаковых секторов. При этом рассматриваются наклонные плоскости, которые образуются участками подобластей внутри области как приближенные касательные плоскости в окрестности точки P . Сама точка P при подобном рассмотрении приближенной касательной плоскости не имеет, что потребовало усовершенствовать алгоритм, добавив в работу алгоритма дополнительную подобласть той же

конфигурации, что и остальные, но расположенную в центре подобласти. Таким образом, рекурсия продолжается до тех пор, пока это либо необходимо исследователю, либо до пиксельного уровня.

Время, затрачиваемое на получение графического образа с помощью рекурсивного алгоритма, зависит от двух параметров: количества секторов поворота n и степени рекурсивной вложенности k . Процедура сортировки на очередном шаге рекурсии выполняется не более, чем $(n^k - 1)/(n - 1) - 1$ раз, где n – количество секторов, а k – глубина рекурсии.

Следует отметить, что данный подход позволяет получить измененное представление исследуемого графического образа уже на первых шагах рекурсии. Этот факт дает возможность сократить время реакции исследователя на поиск различного рода ошибок, возникающих при описании исследуемого объекта.

На языке программирования C++ данный алгоритм выглядит следующим образом (см. рис.1):

```
void RectangleDraw(double Current,double Count,double R,double Xc,double Yc,double m){
    Form1->StatusBar1->Panels->Items[5]->Text=R;
    if (Current==Count)
    {
        if((Xc - R>= X1) &&( Xc + R <=X2 )&& (Yc - R>=Y1) && (Yc + R<=Y2) )
        {
            // Определение значений функции в заданных узловых точках рассматриваемой подобласти
            // для нужной задачи
            TPoint A[100];
            double angle=0;
            int ii;
            for (ii=0;ii<=m;ii++)
            {
                A[ii].x=int(Xc+r1*cos((angle*M_PI/180+M_PI/m)));
                A[ii].y=int(Yc+r1*sin((angle*M_PI/180+M_PI/m)));
                angle=angle+360/m;
            }
            for (ii=0;ii<=m;ii++) Form1->Image1->Canvas->Polygon(A,m);
            return;
        }
    }
    else { return; }
}
else
{
    for (int i = 0;i < m; i++)
        RectangleDraw (Current+1,Count, R/2.,Xc + R/2.*cos(i*2*M_PI/m), Yc +R/2.*sin(i*2*M_PI/m),m);
    RectangleDraw (Current+1,Count, R/2.,Xc , Yc , m);
}
return;
}
```

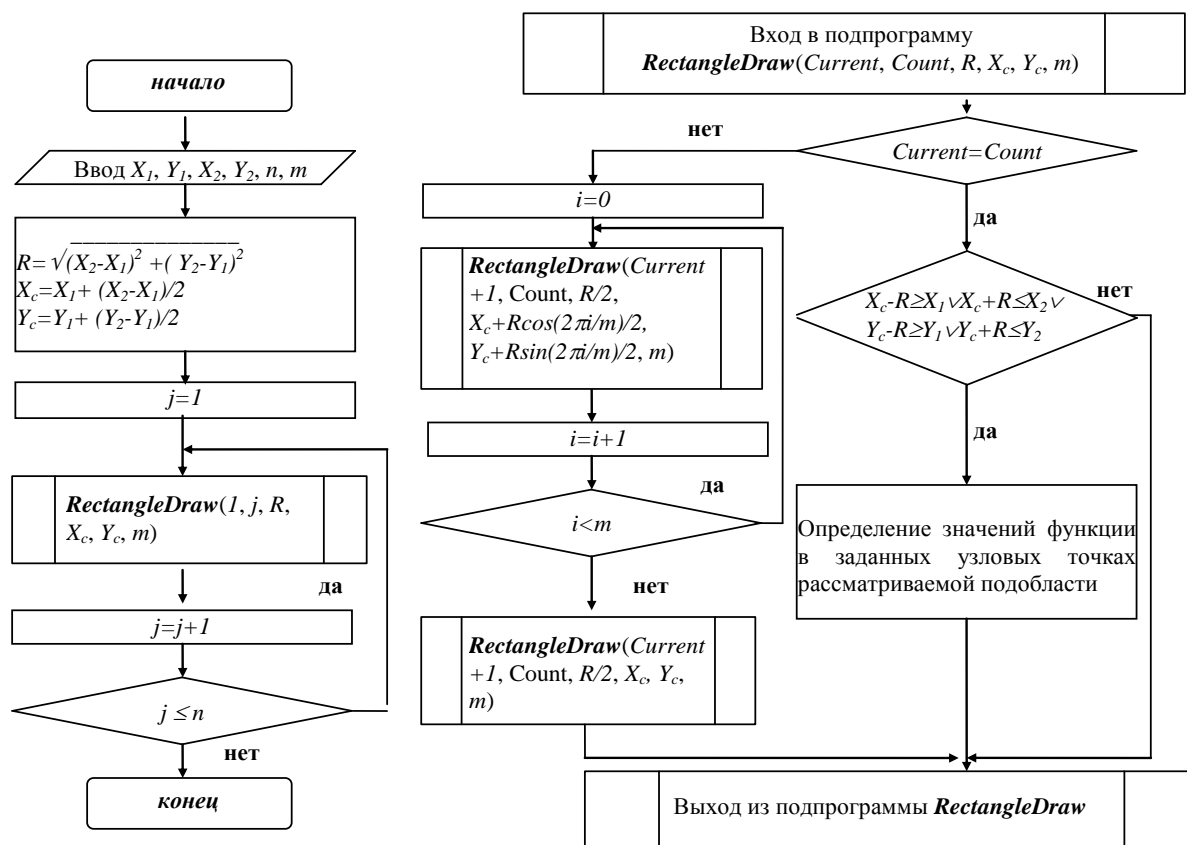


Рис. 1. Блок-схема рекурсивного алгоритма

ПОСТРОЕНИЕ ВИЗУАЛЬНОГО ОБРАЗА ТРЕХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТИ

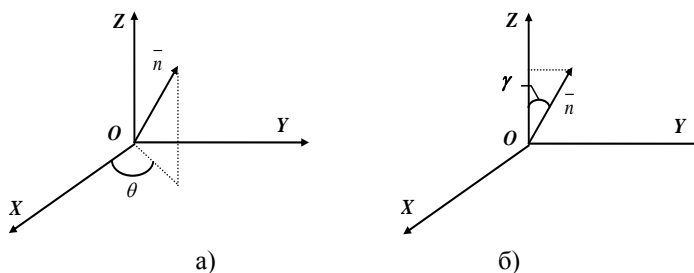
В данной статье в качестве примера реализации рекурсивного разбиения приведено исследование графика функции двух переменных и определение его свойств, таких как **форма**, **фронт волны** и **линии уровня**. Остановимся на данных свойствах более подробно.

Привязка градации тона к направлению проекции вектора нормали на плоскость XOY позволяет упростить восприятие направления склонов поверхности, активизируя при этом точки, в которых это направление отсутствует. Такими точками являются экстремальные точки, в которых касательная плоскость параллельна горизонту. Такой подход позволяет выделить характер изломов поверхности, поэтому определен как «**форма**». При этом форма определяется углом между проекцией градиента на плоскость OXY и положительным направлением оси OX .

Второе свойство характеризует определение отклонения нормали от выбранного направления и активизирует восприятие изменения характера поверхности, пренебрегая характером излома. В этом случае решено определить его как «**фронт волны**». При этом фронт волны определяется как угол между градиентом и осью OZ .

Если под **градиентом** в точке поверхности понимать вектор нормали касательной плоскости в этой точке, то необходимо определить:

- средний угол между направлением проекции градиента на плоскость OXY и осью OX (рис. 2 а));
- средний угол между градиентом и осью OZ (рис. 2 б)).

Рис. 2: а) θ – характеризует форму поверхности; б) γ – характеризует фронт волны

При этом под **средним углом** будем понимать среднеарифметическое значение соответствующих углов θ и γ для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 2), которые обозначим θ_{cp} и γ_{cp} .

Таким образом, задача сводится к определению двух углов θ_{cp} и γ_{cp} .

Для каждого треугольника записываются коэффициенты a , b , c , d уравнения $ax + by + cz = d$ плоскости, в которой расположен треугольник. В общем случае коэффициенты a , b , c , d вычисляются по координатам вершин треугольника.

Алгоритм определения «**формы**» следующий:

1. Вычисляем координаты вершин $\triangle ABC$ (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} x_s &= x_c + R \cdot \cos\left(\frac{(2s-p)\pi}{3}\right), \\ y_s &= y_c + R \cdot \sin\left(\frac{(2s-p)\pi}{3}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $p = 0$ для $\triangle ABC$, $s = 0, 1, 2$, R – радиус окружности, описанной вокруг рассматриваемого участка в виде правильного n -угольника, x_c , y_c – координаты центра, определяющие параметр положения исследуемого участка.

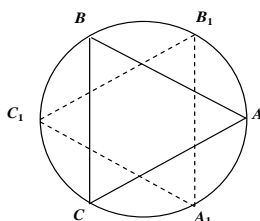


Рис. 3. Схема расположения треугольников на рассматриваемом участке поверхности

2. Вычисляем значения z исследуемой функции в виде

$$z_s = f(x_s, y_s), \quad s = 0, 1, 2, \quad (2)$$

где x_s , y_s – координаты вершин треугольника.

3. Если

$$(x_1 - x_0) \cdot (y_2 - y_0) - (x_2 - x_0) \cdot (y_1 - y_0) = V, \quad (3)$$

где (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) – координаты вершин полученного треугольника, не равно нулю, т.е. три точки не лежат на одной прямой, то переходим к следующему шагу алгоритма; иначе, плоскость $\triangle ABC$ параллельна оси OZ и проекция нормали с осью OX составляет угол $\theta = 0$ и в этом случае необходимо осуществить переход к шагу 7.

4. Вычисляем коэффициенты a , b , c плоскости $\triangle ABC$ в виде:

$$\begin{aligned} a &= yA(zB - zC) - yB(zA - zC) + yC(zA - zB); \\ b &= -(xA(zB - zC) - xB(zA - zC) + xC(zA - zB)); \\ c &= xA(yB - yC) - xB(yA - yC) + xC(yA - yB). \end{aligned} \quad (4)$$

5. Вычисляем угол θ между проекцией нормали и осью OX .

Если одно из условий

а) $\frac{a}{V} = 0$ и $\frac{b}{V} = 0$, то переходим к шагу 8;

б) $\frac{a}{V} = 0$, то $\theta = \frac{\pi}{2}$;

в) $\frac{a}{V} > 0$ и $\frac{b}{V} = 0$, то $\theta = 0$;

г) $\frac{a}{V} < 0$ и $\frac{b}{V} = 0$, то $\theta = \pi$;

выполняется, то переходим к шагу 7.

Иначе, вычисляем угол θ согласно формуле

$$\theta = \arctg \frac{b}{a}. \quad (5)$$

6. Возможны следующие случаи условий:

- $\frac{a}{V} > 0$ и $\frac{b}{V} < 0$, то $\theta = -\theta$;
- $\frac{a}{V} < 0$ и $\frac{b}{V} > 0$, то $\theta = \pi + \theta$;
- $\frac{a}{V} < 0$ и $\frac{b}{V} < 0$, то $\theta = \pi - \theta$.

7. Угол между проекцией нормали к плоскости ΔABC на плоскость OXY и осью OX равен $\theta_p = \theta$.

8. Вычисляем координаты вершин $\Delta A_1 B_1 C_1$ (см. рис. 3) для $p = 1$.

Последовательно выполняем с 1 – 7 шагами алгоритма для плоскости $\Delta A_1 B_1 C_1$.

9. Определяем средние углы для нормали к срединной плоскости в виде

$$\theta_{cp} = \frac{\theta + \theta_1}{2}.$$

Представим программный код реализации изложенного выше алгоритма.

```
double forma(double Xc1,double Yc1,double R1){
    double x01,x02,x03,y01,y02,y03,x11,x12,x13,y11,y12,y13;
    double z01,z02,z03,z11,z12,z13;
    double v,a,b,c,o,o1,o2;
    Xc1=Xc1*Kx+Xmin;
    Yc1=Yc1*Ky+Ymin;
    R1=R1*Kx;
    x01=Xc1+R1*cos(((2*0-0)*M_PI)/3);
    y01=Yc1+R1*sin(((2*0-0)*M_PI)/3);
    x02=Xc1+R1*cos(((2*1-0)*M_PI)/3);
    y02=Yc1+R1*sin(((2*1-0)*M_PI)/3);
    x03=Xc1+R1*cos(((2*2-0)*M_PI)/3);
    y03=Yc1+R1*sin(((2*2-0)*M_PI)/3);
    z01=fun(x01/Kx,y01/Ky);
    z02=fun(x02/Kx,y02/Ky);
    z03=fun(x03/Kx,y03/Ky);
    v=(x02-x01)*(y03-y01)-(x03-x01)*(y02-y01);
    o1=0;
    if (v!=0) {
        a=y01*(z02-z03)-y02*(z01-z03)+y03*(z01-z02);
        b=-(x01*(z02-z03)-x02*(z01-z03)+x03*(z01-z02));
```

```

c=x01*(y02-y03)-x02*(y01-y03)+x03*(y01-y02);
if ((a==0)&&(b==0))
if (a==0)          {o1=M_PI/2;}
if (((a/v)>0)&&(b==0))  {o1=0;}
if (((a/v)<0)&&(b==0))  {o1=M_PI;}
if (((a/v)>0)&&((b/v)<0)) {o1=-o1;}
if (((a/v)<0)&&((b/v)>0)) {o1=o1+M_PI;}
if (((a/v)<0)&&((b/v)<0)) {o1=M_PI-o1;}
if (a!=0)          { o1=atan(b/a); }
}

x11=Xc1+R1*cos(((2*0-1)*M_PI)/3);
y11=Yc1+R1*sin(((2*0-1)*M_PI)/3);
x12=Xc1+R1*cos(((2*1-1)*M_PI)/3);
y12=Yc1+R1*sin(((2*1-1)*M_PI)/3);
x13=Xc1+R1*cos(((2*2-1)*M_PI)/3);
y13=Yc1+R1*sin(((2*2-1)*M_PI)/3);
z11=fun(x11,y11);
z12=fun(x12,y12);
z13=fun(x13,y13);
v=(x12-x11)*(y13-y11)-(x13-x11)*(y12-y11);
o2=0;
if (v!=0) {
a=y11*(z12-z13)-y12*(z11-z13)+y13*(z11-z12);
b=-(x11*(z12-z13)-x12*(z11-z13)+x13*(z11-z12));
c=x11*(y12-y13)-x12*(y11-y13)+x13*(y11-y12);
if ((a==0)&&(b==0))
if (a==0)          {o2=M_PI/2;}
if (((a/v)>0)&&(b==0))  {o2=0;}
if (((a/v)<0)&&(b==0))  {o2=M_PI;}
if (((a/v)>0)&&((b/v)<0)) {o2=-o2;}
if (((a/v)<0)&&((b/v)>0)) {o2=o1+M_PI;}
if (((a/v)<0)&&((b/v)<0)) {o2=M_PI-o2;}
if (a!=0)          { o2=atan(b/a); }
}
o=(o1+o2)/2;
return o;
}

```

Алгоритм описан.

Алгоритм определения «**фронт волны**» следующий:

1. Вычисляем координаты вершин $\triangle ABC$ по формуле (1).
2. Вычисляем с помощью (2) значения z исследуемой функции.

3. Если условие (3) не равно нулю, то переходим к следующему шагу алгоритма; иначе, плоскость ΔABC параллельна оси OZ и проекция нормали с осью OZ составляет угол, $\gamma = 0$ и переходим к шагу 7.

4. Вычисляем с помощью формул (4) коэффициенты a , b , c плоскости ΔABC .

5. Вычисляем угол θ .

Если одно из условий

$$- \frac{a}{V} = 0 \text{ и } \frac{b}{V} = 0, \text{ то } \theta = 0;$$

$$- \frac{a}{V} = 0, \text{ то } \theta = \frac{\pi}{2};$$

выполняется, то переходим к шагу 6. Иначе, вычисляем угол θ согласно формуле (5).

6. Угол между нормалью к плоскости ΔABC и осью OZ определяется в виде

$$\gamma_p = \arctg\left(\frac{a}{V} \cdot \cos(\theta) + \frac{b}{V} \cdot \sin(\theta)\right).$$

7. Вычисляем координаты вершин $\Delta A_1 B_1 C_1$ (см. рис. 3) для $p = 1$.

Последовательно выполняем с 1 – 6 шаги алгоритма для плоскости $\Delta A_1 B_1 C_1$.

8. Определяем средние углы для нормали к срединной плоскости в виде

$$\gamma_{cp} = \frac{\gamma + \gamma_1}{2}.$$

Представим программный код реализации изложенного выше алгоритма.

```
double volna(double Xc1,double Yc1,double R1){
    double x01,x02,x03,y01,y02,y03,x11,x12,x13,y11,y12,y13;
    double z01,z02,z03,z11,z12,z13;
    double v,a,b,c,o1,o2,ygol,ygol1,ygol2;
    Xc1=Xc1*Kx+Xmin;
    Yc1=Yc1*Ky+Ymin;
    R1=R1*Kx;
    x01=Xc1+R1*cos(((2*0-0)*M_PI)/3);
    y01=Yc1+R1*sin(((2*0-0)*M_PI)/3);
    x02=Xc1+R1*cos(((2*1-0)*M_PI)/3);
    y02=Yc1+R1*sin(((2*1-0)*M_PI)/3);
    x03=Xc1+R1*cos(((2*2-0)*M_PI)/3);
    y03=Yc1+R1*sin(((2*2-0)*M_PI)/3);
    z01=fun(x01/Kx,y01/Ky);
    z02=fun(x02/Kx,y02/Ky);
    z03=fun(x03/Kx,y03/Ky);
    v=(x02-x01)*(y03-y01)-(x03-x01)*(y02-y01);
    ygol1=0;
    if (v!=0) {
        a=y01*(z02-z03)-y02*(z01-z03)+y03*(z01-z02);
        b=-(x01*(z02-z03)-x02*(z01-z03)+x03*(z01-z02));
        c=x01*(y02-y03)-x02*(y01-y03)+x03*(y01-y02);
```



```

if (a!=0)          {o1=atan(b/a); }
if ((a==0)&&(b==0)) { o1=0; }
if (a==0) { o1=M_PI/2; }
ygo1=atan((a/v)*cos(o1)+(b/v)+sin(o1));
}

x11=Xc1+R1*cos(((2*0-1)*M_PI)/3);
y11=Yc1+R1*sin(((2*0-1)*M_PI)/3);
x12=Xc1+R1*cos(((2*1-1)*M_PI)/3);
y12=Yc1+R1*sin(((2*1-1)*M_PI)/3);
x13=Xc1+R1*cos(((2*2-1)*M_PI)/3);
y13=Yc1+R1*sin(((2*2-1)*M_PI)/3);
z11=fun(x11,y11);
z12=fun(x12,y12);
z13=fun(x13,y13);
v=(x12-x11)*(y13-y11)-(x13-x11)*(y12-y11);
ygo2=0;
if (v!=0) {
a=y11*(z12-z13)-y12*(z11-z13)+y13*(z11-z12);
b=-(x11*(z12-z13)-x12*(z11-z13)+x13*(z11-z12));
c=x11*(y12-y13)-x12*(y11-y13)+x13*(y11-y12);

if (a!=0)          {o2=atan(b/a); }
if ((a==0)&&(b==0)) { o1=0; }
if (a==0) { o1=M_PI/2; }
ygo2=atan((a/v)*cos(o2)+(b/v)+sin(o2));
}
ygo=(ygo1+ygo2)/2;
return ygo;
}

```

Алгоритм описан.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложенные алгоритмы позволяют построить дифференциальные характеристики поверхностей, заданных аналитически.

При этом для реализации предложенных в работе алгоритмов использовался компилятор Borland C++ Builder 6.0 с выставленной опцией оптимизации кода.

Результаты работы реализованных алгоритмов сведены в таблицы результатов по соответствующей исследуемой функции.

Для проведения сравнительного анализа полученных в ходе проводимого исследования результатов, рассмотрим следующие примеры применения построенных алгоритмов.

1. Построим графики свойств для функции вида

$$F(x, y) = \frac{1}{5} \sin x \cos y - \frac{3}{2} \cos \left(7 \frac{(x-\pi)^2 + (y-\pi)^2}{4} \right) e^{-((x-\pi)^2 + (y-\pi)^2)}$$

на области применения $x \in (0, 2\pi)$; $y \in (0, 2\pi)$.

При помощи математического пакета Mathcad получим для сравнения трёхмерный график функции $F(x, y)$ (рис.4).

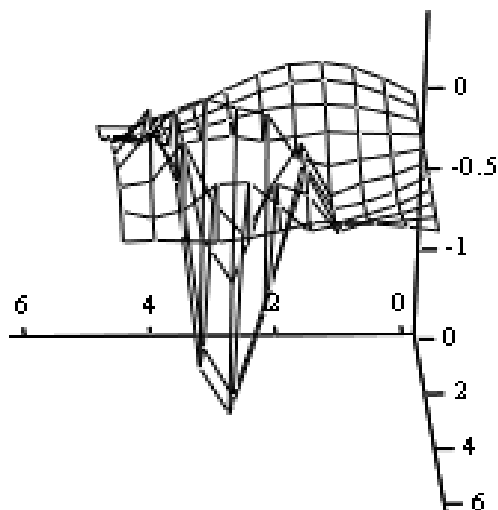


Рис. 4

Для исследуемой функции $F(x, y) = \frac{1}{5} \sin x \cos y - \frac{3}{2} \cos \left(7 \frac{(x-\pi)^2 + (y-\pi)^2}{4} \right) e^{-(x-\pi)^2 + (y-\pi)^2}$ приведем в табличном виде результаты выполнения описанных алгоритмов (табл.1.).

Таблица 1 – Результаты выполнения алгоритмов для функции $F(x, y)$

	Линии уровня	Форма	Фронт волны
Кол-во углов=4 Кол-во итераций=8			
Кол-во углов=8 Кол-во итераций=2			
Кол-во углов=8 Кол-во итераций=4			

2. Построим графики свойств для функции вида

$$G(x, y) = x + y + \cos(x^2 + y^2)$$

на области применения $x \in (0, 2\pi)$; $y \in (0, 2\pi)$.

При помощи математического пакета Mathcad получим для сравнения трёхмерный график указанной функции $G(x, y)$ (рис. 5).

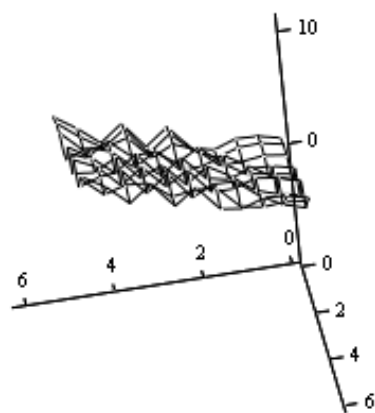


Рис. 5

Для исследуемой функции $G(x, y) = x + y + \cos(x^2 + y^2)$ приведем в табличном виде результаты выполнения описанных алгоритмов (табл. 2.).

Таблица 2 – Результаты выполнения алгоритмов для функции $G(x, y)$

	Линии уровня	Форма	Фронт волны
Кол-во углов=4 Кол-во итераций=8			
Кол-во углов=12 Кол-во итераций=4			
Кол-во углов=12 Кол-во итераций=5			

Сравнивая полученные изображения для рассмотренных соответствующих функций вида $F(x, y) = \frac{1}{5} \sin x \cos y - \frac{3}{2} \cos \left(7 \frac{(x-\pi)^2 + (y-\pi)^2}{4} \right) e^{-((x-\pi)^2 + (y-\pi)^2)}$ и $G(x, y) = x + y + \cos(x^2 + y^2)$ (см. табл. 1,

2 соответственно), видно, что «общий» вид графика свойства поверхности можно заметить уже на первых итерациях.

Визуализация свойства *Форма* наглядно отображает все экстремальные точки независимо от значения функции в этих точках, поскольку изображение исключает такие характеристики поверхности как угол между градиентом и осью *OZ*. Это позволяет наблюдать за развитием волновых деформаций поверхности.

Свойство *Фронт волны* отражает относительную крутизну распространяемых волн, опуская при этом характеристику форма поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толок О. В. Принципи візуальної підтримки властивостей поверхні на основі реконструкції реалістичного образу / О. В. Толок // Збірник наукових праць. Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, біологічні науки. — Запоріжжя, Запорізький національний університет. — 1998. — С. 76-79.
2. Толок А. В. Визуализация некоторых дифференциальных свойств поверхности на основе реконструкции реалистичного образа / А. В. Толок, В. В. Мухин // XXV Юбилейная международная конференция и дискуссионный клуб IT+SE'98 «Новые информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе». (Ч. 1. Украина, Крым, Ялта–Гурзуф, 15-24 мая). — 1998. — С. 162-164.
3. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт. — М.: Мир, 1989. — 360 с.
4. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М.-Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
5. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15: Учебный курс / Е. Г. Макаров. — СПб.: Питер, 2011. — 400 с.

УДК 531.36

МОДЕЛЮВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ

¹Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, ¹Коломійчук О. П., к. ф.-м. н., ²Святовець І. Ф.

¹Ін-т математики НАН України

²Запорізька державна інженерна академія

Пропонується один з можливих підходів визначення умов побудови майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку. Наводяться приклади знаходження керування для побудови майже консервативної системи.

Ключові слова: майже консервативна система, зворотний зв'язок, вектор керувань.

Новицький В. В., Коломійчук О. П., Святовець І. Ф. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ / Ин-т математики НАН Украины, Запорожская государственная инженерная академия, Украина

Предлагается один из возможных подходов определения условий построения почти консервативной системы с помощью обратной связи. Приводятся примеры нахождения управления для построения почти консервативной системы.

Ключевые слова: почти консервативная система, обратная связь, вектор управления.

Novitsky V. V., Kolomiychuk O. P., Svyatovets I. F. MODELING THE ALMOST CONSERVATIVE SYSTEM USING FEEDBACK / In-t of Mathematics of NAS of Ukraine, Zaporizhzhya State Engineering Academy, Ukraine

This article examines the controlled linear stationary system even order. Matrix of coefficients of the variable has the form $(F_0 + \varepsilon F_1)$ where ε is a small parameter. The system is not almost conservative, i.e. condition of skew and nonsingularity is not satisfied. We solve the problem to formation almost conservative system

from the given controlled system by using feedback. The feedback is formed so that the conditions of skew and nonsingularity are satisfied for the obtained closed system. We obtained the matrix equation whose solution matrix K_0 takes part in the formation of a skew matrix, and as a result, in the constructing almost conservative system. To solve the equation we use the method the addition of the sum of some skew matrix and its transpose to one of the sides of the equation. This matrix is used to equalize the ranks of the left and right sides of the equation if structure certain other given matrices allows it.

We show how the Kronecker product of matrices can be applying to the task of constructing almost conservative system. The necessary and sufficient condition for the existence of solutions of the system with respect to the system under consideration is shown.

The examples of finding the control vector to construct almost conservative system. In the first example we use two approaches to find the unknown matrix 1) direct solution of the equation for finding K_0 and 2) the use of Kronecker product. In the second example, in addition to these two approaches we suggested finding the best approximation according to the method of least squares. To calculate K_0 we deal with the pseudoinverse. It is shown that the solutions obtained in various ways are the same. Theoretical results agree with the examples.

Keywords: almost conservative system, feedback, control vector.

УМОВИ ПОБУДОВИ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Проаналізувавши ряд гіроскопічних систем, дійшли висновку, що серед них часто зустрічаються майже консервативні [1-3]. Для майже консервативних систем розроблено методи їх дослідження на стійкість, та знайдено алгоритми побудови оптимального керування. Для ефективного їх використання виникла задача побудови керування для зведення систем, які не є майже консервативними до майже консервативних моделей [4].

Розглядається керована лінійна стаціонарна система

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + Gu, \quad (1)$$

де $x = [x_1, x_2, \dots, x_{2n}]^T$ – $2n$ -вимірний вектор стану, $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ – m -вимірний вектор керувань, ε – малий параметр; $F_0, F_1 \in R_{2n \times 2n}$, $G \in R_{2n \times m}$. Ця система не є майже консервативною [5], тобто не виконується умова кососиметричності чи невиврожденості матриці F_0 : $F_0^T \neq -F_0$ або $\det(F_0) = 0$. Необхідно знайти умови побудови з (1) майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку вигляду

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x, \quad (2)$$

де $K_0, K_1 \in R_{m \times 2n}$.

Тобто, майже консервативною повинна стати замкнена система (1), (2)

$$\dot{x} = (F_0 - GK_0 + \varepsilon(F_1 - GK_1))x. \quad (3)$$

З умов майже консервативності [5] маємо

$$F_0 - GK_0 = -(F_0 - GK_0)^T, \quad \det(F_0 - GK_0) \neq 0. \quad (4)$$

Звідси приходимо до рівняння

$$GK_0 + K_0^T G^T = F_0 + F_0^T, \quad (5)$$

розв'язок якого, а саме матриця K_0 , бере участь у формуванні кососиметричної матриці (4), а як наслідок – майже консервативної системи.

Знайдемо умови існування розв'язку рівняння (5). Додамо до правої частини рівняння (5) суму деякої невідомої кососиметричної матриці Q_0 та її транспонованої [6]. Отримаємо

$$GK_0 + K_0^T G^T = F_0 + F_0^T + Q_0 + Q_0^T \quad (6)$$

чи

$$(GK_0 - F_0 - Q_0) + (K_0^T G^T - F_0^T - Q_0^T) = 0. \quad (7)$$

Звідси

$$GK_0 - F_0 - Q_0 = 0 \quad (8)$$

або

$$GK_0 = F_0 + Q_0. \quad (9)$$

Пояснимо роль матриці Q_0 . Зрозуміло, що необхідною умовою існування розв'язку рівняння (9) є рівність рангів правої і лівої частин. Матриця Q_0 слугує для зрівнювання рангів у випадках, коли це дозволяє зробити структура інших заданих матриць.

Проілюструємо сказане на прикладі.

Нехай $G \in R_{2 \times 1}$, $K_0 \in R_{1 \times 2}$, $F_0, Q_0 \in R_{2 \times 2}$. Тоді рівняння (9) в матричному вигляді запишеться так

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} + q_{12} \\ f_{21} - q_{12} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

З відомої нерівності [3]

$$\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\} \quad (11)$$

випливає, що ранг лівої частини рівності (10) не більший за одиницю, а правої не більший за двійку. Визначимо умови, за яких можливо підібрати значення елемента q_{12} так, щоб ліва та права частини (10) мали одиничні ранги. Для лівої частини це умови відмінності від нуля g_{11} або g_{21} та k_{11} або k_{12} . Для правої частини ці умови знайдемо, обчисливши і прирівнявши до нуля її визначник

$$q_{12}^2 + q_{12}(f_{12} - f_{21}) + f_{22}f_{11} - f_{12}f_{21} = 0 \quad (12)$$

та, розв'язавши

$$q_{12} = \frac{f_{21} - f_{12}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{f_{12}^2 + 2f_{12}f_{21} + f_{21}^2 - 4f_{22}f_{11}}. \quad (13)$$

З останнього випливає, що елементи матриці F_0 повинні бути пов'язані умовою

$$(f_{12} + f_{21})^2 - 4f_{22}f_{11} \geq 0. \quad (14)$$

Нехай, наприклад, $f_{11} = 0$. Тоді

$$q_{12} = \frac{f_{21} - f_{12}}{2} \pm \frac{1}{2}(f_{12} + f_{21}). \quad (15)$$

Тобто $q_{12} = f_{21}$, або $q_{12} = -f_{12}$. Значить матриця правої частини рівності (10) може мати один з двох виглядів

$$(F_0 + Q_0)_1 = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} + f_{21} \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}, \quad (F_0 + Q_0)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} + f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Спробуємо розв'язати рівняння (10) зі знайденими матрицями правої частини. У випадку, якщо права частина має вигляд $(F_0 + Q_0)_1$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} g_{11}k_{11} &= 0, & g_{11}k_{12} &= f_{12} + f_{21}, \\ g_{21}k_{11} &= 0, & g_{21}k_{12} &= f_{22}, \end{aligned} \quad (17)$$

яка не має розв'язку.

Якщо права частина має вигляд $(F_0 + Q_0)_2$, система для пошуку невідомих компонент матриці K_0

$$\begin{aligned} g_{11}k_{11} &= 0, & g_{11}k_{12} &= 0, \\ g_{21}k_{11} &= f_{21} + f_{12}, & g_{21}k_{12} &= f_{22} \end{aligned} \quad (18)$$

має розв'язок

$$k_{11} = \frac{f_{21} + f_{12}}{g_{21}}, \quad k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}} \quad (19)$$

за умови, якщо $g_{11} = 0$, $g_{21} \neq 0$.

З аналізу отриманих результатів (17), (19) випливає, що умова рівності рангів правої і лівої частин рівності (9) є необхідною, але не достатньою.

Покажемо, як у поставленій задачі формування майже консервативної системи можна застосувати кронекерівський добуток матриць. Для цього скористаємося результатами, викладеними в [7]. З них випливає, що рівняння (9) еквівалентно рівнянню

$$\tilde{G}k_0 = f_0 + q_0, \quad (20)$$

де

$$\tilde{G} = G \otimes I, \quad (21)$$

$I \in R_{2n \times 2n}$ – одинична матриця, $\tilde{G} \in R_{4n^2 \times 2mn}$.

$$k_0 = \begin{bmatrix} K_{1*}^T \\ K_{2*}^T \\ \dots \\ K_{m*}^T \end{bmatrix}, \quad f_0 + q_0 = \begin{bmatrix} F_{1*}^T + Q_{1*}^T \\ F_{2*}^T + Q_{2*}^T \\ \dots \\ F_{2n*}^T + Q_{2n*}^T \end{bmatrix}, \quad (22)$$

K_{i*} , $F_{i*} + Q_{i*}$ – i -ий рядок відповідної матриці.

$$k_0 \in R_{2mn \times 1}, \quad f_0 + q_0 \in R_{4n^2 \times 1}.$$

Система (20) має $4n^2$ рівнянь з $2mn$ невідомими для матриці K_0 та з $2n^2 - n$ невідомими для матриці Q_0 . З іншого боку, якщо (5) розв'язувати безпосередньо, число рівнянь для знаходження компонент матриці K_0 буде $2n^2 + n$ в силу симетричності правої та лівої частин рівності. Отже, у випадку, коли $2mn > 2n^2 + n$, можна $2mn - (2n^2 + n)$ компонент задати самостійно. Тоді загальна кількість невідомих для K_0 та Q_0 буде дорівнювати $2n^2 + n + 2n^2 - n = 4n^2$, що співпадає з кількістю рівнянь.

Для рівняння, записаного у вигляді (20), діють відомі умови існування розв'язку [3]. А саме: необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь є рівність рангу матриці, яка стоїть при невідомих, та рангу розширеної матриці. У нашому випадку ця умова запишеться у вигляді

$$\text{rang}(\tilde{G}) = \text{rang}(\tilde{G}/(f_0 + q_0)), \quad (23)$$

де $\tilde{G}/(f_0 + q_0)$ – розширена матриця системи, отримана додаванням стовпця $f_0 + q_0$ до матриці \tilde{G} .

Скориставшись формулою [3] $\text{rang}(A \otimes B) = \text{rang}(A) \text{rang}(B)$, будемо мати

$$\text{rang}(\tilde{G}) = \text{rang}(G) \text{rang}(I) = 2n \cdot \text{rang}(G). \quad (24)$$

Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку рівняння (20) має вигляд

$$\text{rang}(\tilde{G}/(f_0 + q_0)) = 2n \cdot \text{rang}(G). \quad (25)$$

ПРИКЛАДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

Приклад 1. Задана система (1) при $2n = 2$, $m = 2$, $F_0^T \neq -F_0$. Знайти матрицю керування K_0 таку, що $F_0 - GK_0 = -(F_0 - GK_0)^T$.

Для цього випадку у загальному вигляді матриці F_0 , G , K_0 запишуться так:

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Застосуємо два підходи до пошуку K_0 : 1) безпосереднє розв'язання рівняння (5); 2) використання кронекерівського добутку.

1) При безпосередньому розв'язку (5), в силу симетричності правої та лівої частин рівності, маємо систему трьох рівнянь для знаходження невідомих компонент матриці K_0

$$\begin{cases} g_{11}k_{11} + g_{12}k_{21} - f_{11} = 0, \\ g_{11}k_{12} + g_{12}k_{22} + g_{21}k_{11} + g_{22}k_{21} - f_{12} - f_{21} = 0, \\ g_{21}k_{12} + g_{22}k_{22} - f_{22} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Якщо покласти $k_{22} = 0$, отримаємо наступні значення шуканих елементів

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{-g_{12}g_{21}f_{12} - g_{12}g_{21}f_{21} + g_{12}g_{11}f_{22} + g_{21}g_{22}f_{11}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})}, \\ k_{12} &= \frac{f_{22}}{g_{21}}, \\ k_{21} &= \frac{-g_{21}^2f_{11} + g_{21}g_{11}f_{12} + g_{21}g_{11}f_{21} - g_{11}^2f_{22}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})}. \end{aligned} \quad (28)$$

2) При використанні другого підходу задамо кососиметричну матрицю

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ -q_{12} & 0 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

У розгорнутому вигляді рівняння (20) запишеться наступним чином

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & g_{12} \\ g_{21} & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{21} & 0 & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} + q_{12} \\ f_{21} - q_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Умова (23) виконується, а саме

$$\text{rang}(\tilde{G}) = \text{rang}(\tilde{G}/(f_0 + q_0)) = 4, \quad (31)$$

а значить існує розв'язок рівняння. Знайдемо його, але спочатку згадаємо, що кількість компонент матриці K_0 , які можна знайти з системи, дорівнює $2n^2 + n = 3$, а для матриці Q_0 — $2n^2 - n = 1$. Задамо, як і в попередньому розв'язку, $k_{22} = 0$, та отримаємо значення невідомих елементів

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{-g_{12}g_{21}f_{12} - g_{12}g_{21}f_{21} + g_{12}g_{11}f_{22} + g_{21}g_{22}f_{11}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})}, \\ k_{12} &= \frac{f_{22}}{g_{21}}, \\ k_{21} &= \frac{-g_{21}^2f_{11} + g_{21}g_{11}f_{12} + g_{21}g_{11}f_{21} - g_{11}^2f_{22}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})}, \\ q_{12} &= \frac{g_{11}f_{22} - g_{21}f_{12}}{g_{21}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Як бачимо, значення компонент матриці K_0 з (32) та (28) повністю співпадають.

Приклад 2. Нехай для системи (1) $2n = 2$, $m = 1$. Тоді загальний вигляд матриць F_0 , G , K_0 наступний

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix}, \quad K_0 = [k_{11} \quad k_{12}]. \quad (33)$$

Застосуємо три підходи: 1) безпосереднє розв'язання рівняння (5); 2) використання результатів, що одержані в 1); 3) знаходження найкращого наближення згідно з методом найменших квадратів.

1) При безпосередньому розв'язку рівняння (5) отримаємо перевизначену систему трьох рівнянь з двома невідомими, а саме

$$\begin{cases} g_{11}k_{11} - f_{11} = 0, \\ g_{11}k_{12} + g_{21}k_{11} - f_{12} - f_{21} = 0, \\ g_{21}k_{12} - f_{22} = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Розв'язок цієї системи існує тільки при накладенні додаткових умов на елементи матриць F_0 , G , тобто у частковому випадку.

2) Для застосування другого підходу обчислимо \tilde{G} згідно з (21)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{11} \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

та запишемо розширену матрицю $\tilde{G}/(f_0 + q_0)$ з урахуванням, що Q_0 має вигляд (29)

$$\tilde{G}/(f_0 + q_0) = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & f_{11} \\ 0 & g_{11} & f_{12} + q_{12} \\ g_{21} & 0 & f_{21} - q_{12} \\ 0 & g_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Як бачимо, що у загальному вигляді ранги цих матриць не співпадають, а саме $\text{rang}(\tilde{G}) = \text{rang}(G)\text{rang}(I) = 1 \cdot 2 = 2$, а $\text{rang}(\tilde{G}/(f_0 + q_0)) = 3$, тобто умова (23) не виконана.

Розглянемо окремі випадки. Нехай

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

тоді

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}/(f_0 + q_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{12} + q_{12} \\ g_{21} & 0 & f_{21} - q_{12} \\ 0 & g_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Якщо $q_{12} = -f_{12}$, ранги матриць будуть однакові, а рівняння (20) у розгорнутій формі запишеться так

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{21} + f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

звідки

$$k_{11} = \frac{f_{21} + f_{12}}{g_{21}}, \quad k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}}. \quad (40)$$

Такі ж результати матимемо, якщо безпосередньо розв'яжемо рівняння (5) за умови $f_{11} = 0$, $g_{11} = 0$.

3) Розглянемо ще один спосіб знаходження розв'язку рівняння (9). Згідно з методом найменших квадратів, найкраще наближення розв'язку для рівняння (9) визначається формулою [8]

$$K_0^0 = G^+ \cdot (F_0 + Q_0), \quad (41)$$

де G^+ – псевдообернена матриця для G .

З [8]

$$G^+ = C^+ \cdot B^+ = C^* (CC^*)^{-1} (B^* B)^{-1} B^*, \quad (42)$$

де $G = C \cdot B$ – скелетний розклад матриці.

Обчисливши за формулою (41) значення K_0^0 і підставивши його в (9), знайдемо значення елементів матриці Q_0 , за яких отримана система є тотожністю, або доведемо, що при заданих матрицях F_0 і G рішення K_0 не існує.

Отже, система (9) має вигляд

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} + q_{12} \\ f_{21} - q_{12} & f_{22} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

За формулою (42)

$$G^+ = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}}{g_{11}^2 + g_{21}^2} & \frac{g_{21}}{g_{11}^2 + g_{21}^2} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Підставляючи його в (41), отримаємо

$$K_0^0 = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}f_{11}}{g_{11}^2 + g_{21}^2} + \frac{g_{21}(f_{21} - q_{12})}{g_{11}^2 + g_{21}^2} & \frac{g_{11}(f_{12} + q_{12})}{g_{11}^2 + g_{21}^2} + \frac{g_{21}f_{22}}{g_{11}^2 + g_{21}^2} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Для порівняння відповідей покладемо, як і в прикладі з першого пункту, $f_{11} = 0$, та підставимо знайдене K_0^0 в рівняння (43). Отримаємо наступну систему

$$\begin{aligned} \frac{g_{11}g_{21}(f_{21} - q_{12})}{g_{11}^2 + g_{21}^2} &= 0, \\ \frac{g_{11}^2(f_{12} + q_{12}) + g_{11}g_{21}f_{22}}{g_{11}^2 + g_{21}^2} &= f_{12} + q_{12}, \\ \frac{g_{21}^2(f_{21} - q_{12})}{g_{11}^2 + g_{21}^2} &= f_{21} - q_{12}, \\ \frac{g_{11}g_{21}(f_{12} + q_{12}) + g_{21}^2f_{22}}{g_{11}^2 + g_{21}^2} &= f_{22}. \end{aligned} \quad (46)$$

Розв'язок існує у двох випадках

- 1) якщо $g_{11} = 0$, тоді $q_{12} = -f_{12}$ і $k_{11} = \frac{f_{21} + f_{12}}{g_{21}}$, $k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}}$, що повністю співпадає з (19) та (40);
- 2) якщо $g_{21} = 0$, тоді $q_{12} = f_{21}$, $f_{22} = 0$ і $k_{11} = 0$, $k_{12} = \frac{f_{12} + f_{21}}{g_{11}}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Лекции по теории гироскопов / А. Ю. Ишлинский, В. И. Борзов, Н. П. Степаненко. — М. : Изд-во МГУ, 1983. — 248 с.
2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов / Б. В. Булгаков. — М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1955. — 355 с.
3. Новицький В. В. Гіроскопічний компас як майже консервативна спостережна і керована механічна система / В. В. Новицький, І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012) : межд. конф.; Севастополь, 10-14 сентября 2012 г. / отв. ред. О.В. Анашкин ; Таврический нац. ун-т имени В.И. Вернадского. — Симферополь : ДИАЙПИ, 2012. — С. 134–135.
4. Новицький В. В. Формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В. В. Новицький, І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук // Dynamical system modeling and stability investigation : XVI International Conference: Modelling and stability : Abstracts of conf. reports, Kiev, Ukraine, 29-31 may / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] — Kiev, 2013. — С. 376 — (Вісник Київського національного ун-ту імені Т. Шевченка).
5. Коломійчук О. П. Умови формування майже консервативної динамічної системи за допомогою зворотного зв'язку / О. П. Коломійчук, В. В. Новицький, І. Ф. Святовець // «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функції та їх застосування», 23-30 червня 2013 р. Севастополь, Україна. — С. 304.
6. Barnett S. Introduction to mathematical control theory / S. Barnett, R. G. Cameron. — Oxford, 1985. — 404 p.
7. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1978. — 280 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 576 с.

REDUCING THE m -PARAMETER N -MODEL UNCERTAINTY TO A PROBABILISTIC DISTRIBUTION OVER MODELS THROUGH HAVING UNIFIED MODEL OUTPUTS

Romanuke V. V., associate professor, c. t. s., associate professor

Khmelnitskiy National University

The study concerns the problem of selecting the single model for working and processing on an object data certainly, what is needed when the object is described or identified in more than one mathematical model. Any pattern is regarded unavailable, occurring widely on the prime stage of the object investigation. Thus the being concerned problem cannot be resolved as a classical optimization. And then the only way to optimize and to select the optimal model is to determine a probabilistic measure over the set of the mathematical models. Without preliminary object identification the most non-contradictory method of the plain definition of that probabilistic measure is the minimax principle, giving the second player optimal strategy as such measure. The target of the study is to state a probabilistic distribution over those models, considering them equi-output-parametrized. For that there is the job of unifying all the parameters of each model into a parametrical unit, whereupon this unit is going to be associated with the appropriate probability from the probabilistic distribution in the second player optimal strategy, generated by the minimax principle. On this ground there has been suggested a method of reducing the uncertainty in modeling mathematically the object with m parameters, when there are N models for fulfilling this and the pattern data are unavailable. Uncertainty reduction is made through determining the minimax probabilistic distribution over those models by unifying all the parameters of each model into a parametrical unit with its probability. There have been stated three ways of such unification, restated explicitly for the cases when the number of mathematical models equals to three or four.

Key words: uncertainty, mathematical model, minimax probabilistic distribution, minimax expectation value.

Романюк В. В. СУЖЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ N МОДЕЛЕЙ С m ПАРАМЕТРАМИ К ВЕРОЯТНОСТНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ НА МОДЕЛЯХ ПОСРЕДСТВОМ ОБЪЕДИНЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ВЫХОДОВ / Хмельницький національний університет, Україна

В исследовании рассматривается проблема выбора единственной модели для детерминированной работы с объектными данными, что необходимо в случаях, когда объект описывается или идентифицируется более чем одной математической моделью. При этом никакого образца в наличии не имеется, что случается повсеместно на начальной стадии исследования объекта. Соответственно, рассматриваемая проблема не может быть разрешена на основе классической оптимизации. И тогда единственным способом оптимизировать и выбирать оптимальную модель является определение вероятностной меры на множестве математических моделей. Без предварительной идентификации объекта наиболее непротиворечивым методом простого задания этой вероятностной меры является принцип минимакса, предоставляющий оптимальную стратегию второго игрока в качестве такой меры. Цель исследования состоит в описании вероятностного распределения на моделях, принимая то, что у них равное количество выходных параметров. Для этого следует объединять все параметры каждой модели в некую параметрическую единицу, после чего эта единица будет ассоциирована с соответствующей вероятностью из вероятностного распределения в оптимальной стратегии второго игрока, получаемой по принципу минимакса. На этой основе предложен метод сужения неопределённости в математическом моделировании объекта с m параметрами, когда для выполнения этого имеется N моделей, а опорные данные недоступны. Сужение неопределённости осуществляется с помощью определения минимаксного вероятностного распределения на этих моделях при объединении всех параметров каждой модели в некую параметрическую единицу со своей вероятностью. Изложено три способа такого объединения, которые выписаны явно для случаев, когда число математических моделей равняется трём или четырём.

Ключевые слова: неопределённость, математическая модель, минимаксное вероятностное распределение, ожидаемое значение по минимаксу.

Романюк В. В. ЗВУЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ N МОДЕЛЕЙ З m ПАРАМЕТРАМИ ДО ЙМОВІРІСНОГО РОЗПОДІЛУ НА МОДЕЛЯХ ЧЕРЕЗ ОБ'ЄДНАННЯ МОДЕЛЬНИХ ВИХОДІВ / Хмельницький національний університет, Україна

У дослідженні розглядається проблема вибору єдиної моделі для детермінованої роботи з об'єктними даними, що необхідно у випадках, коли об'єкт описується або ідентифікується більш ніж однією математичною моделлю. При цьому ніякого зразка в наявності немає, що трапляється повсякчасно на початковій стадії дослідження об'єкта. Відповідно розглянута проблема не може бути вирішена на основі класичної оптимізації. І тоді єдиним способом оптимізувати і вибрати оптимальну модель є визначення ймовірнісної міри на множині математичних моделей. Без попередньої ідентифікації об'єкта найбільш несуперечливим методом простого завдання цієї ймовірнісної міри є принцип мінімаксу, що надає оптимальну стратегію другого гравця у якості такої міри. Мета дослідження полягає в описі ймовірнісного розподілу на моделях, приймаючи те, що у них рівна кількість вихідних параметрів. Для цього слід об'єднувати всі параметри кожної моделі у деяку параметричну одиницю, після чого ця одиниця буде асоційована з відповідною ймовірністю з ймовірнісного розподілу в

оптимальній стратегії другого гравця, одержуваної за принципом мінімаксу. На цій основі запропоновано метод звуження невизначеності у математичному моделюванні об'єкта з m параметрами, коли для виконання цього є N моделей, а опорні дані недоступні. Звуження невизначеності здійснюється за допомогою визначення мінімаксного ймовірнісного розподілу на цих моделях при об'єднанні всіх параметрів кожної моделі у деяку параметричну одиницю зі своєю ймовірністю. Викладено три способи такого об'єднання, котрі виписані явно для випадків, коли число математичних моделей дорівнює трьом або чотирьом.

Ключові слова: невизначеність, математична модель, мінімаксний ймовірнісний розподіл, очікуване значення за мінімаксом.

PREAMBLING THE PROBLEM

When an object of investigation is described or identified in more than one mathematical model, then the investigator collides with the problem of selecting the single model for working and processing on the object data certainly [1, 2]. However, this problem cannot be resolved as a classical optimization for the case neither of differently classified models, nor of equal precision (error rate) models. Therefore in every watch moment or sample the arising model uncertainty should be reduced into some unifying model [3, 4].

SURVEYING THE PROBLEM RESOLUTION WAYS

The classical optimization resolves the model uncertainty problem just if there are pattern values of the object parameters, that could help in getting the models classified, comparing also their outputs to the pattern ones [2, 3, 5, 6]. But if there is no pattern at all, what occurs widely on the prime stage of the object investigation [7, 8], then the only way to optimize and to select the optimal model is to determine or to define a probabilistic measure over the set of the mathematical models [9, 10]. Nevertheless, determining such measure requires at least some pattern data, might be obtained during the initial process of watching or identifying the object. So without preliminary object identification there is an open discussion about defining a probabilistic measure over the set of the object models. And the most non-contradictory method of the plain definition of that probabilistic measure is the minimax principle [11, 12], giving the second player optimal strategy (SPOS) as such measure. This method had been implemented for cases with three and four mathematical models [13, 14], though they were pre-stated to produce just the single output parameter [2, 3, 9, 10, 15, 16].

TARGET AND JOB

May there be N non-identified mathematical models, each of which gives the same number of output parameters. The target of the initiated investigation is to state a probabilistic distribution over these models, considering them equi-output-parametrized [17, 18]. For that there is the job of unifying all the parameters of each model into a parametrical unit, whereupon this unit is going to be associated with the appropriate probability from the probabilistic distribution in SPOS, generated by the minimax principle [11, 12, 19, 20].

UNCERTAINTY REDUCTION

In common generality, say that the j -th mathematical model has its m output parameters, $m \in \mathbb{N}$, and $j = \overline{1, N}$ by $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. The case $N = 2$ under condition of the pattern data unavailability is resolved only into equiprobable distribution $\left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right]$, because there cannot be verified or refuted any nonobservational hypothesis on the two-element distribution.

As every mathematical model has the same number of output parameters, then the models may be separated by those parameters. This means that for the k -th parameter there should be found a probabilistic distribution over its N output values $\{v_j^{(k)}\}_{j=1}^N$, where $v_j^{(k)}$ is the fixed value of the k -th parameter of the j -th mathematical model. Due to the pattern data unavailability, such a probabilistic distribution for $N \in \{3, 4\}$ and $m = 1$ was determined [13, 14] in SPOS of the 3×3 and 4×4 games with the matrix

$$\mathbf{H}_1 = \left(h_{ij}^{(1)} \right)_{N \times N} \quad \text{for} \quad h_{ij}^{(1)} = \left| v_i^{(1)} - v_j^{(1)} \right| \quad \text{at} \quad i = \overline{1, N} \quad \text{and} \quad j = \overline{1, N}. \quad (1)$$

In essence, the matrix \mathbf{H}_1 there [13, 14] had appeared the function of two [13] and three [14] variables, which are the distances

$$\{h_{12}^{(1)}, h_{23}^{(1)}\} \quad \text{and} \quad \{h_{12}^{(1)}, h_{23}^{(1)}, h_{34}^{(1)}\} \quad (2)$$

correspondingly. Consequently, three-element and four-element SPOS were the functions of the distances (2), although there was the continuum of SPOS in both cases, and the single SPOS was determined as the nearest probabilistic distribution to the equiprobable distribution: some \mathbb{R}^3 -point $\left[\check{q}_1^{(1)} \quad \check{q}_2^{(1)} \quad \check{q}_3^{(1)} \right]$ was nearest to

$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ and some \mathbb{R}^4 -point $\begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{(1)} & \tilde{q}_2^{(1)} & \tilde{q}_3^{(1)} & \tilde{q}_4^{(1)} \end{bmatrix}$ was nearest to $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ correspondingly by the least-squares method.

Up to now the set of SPOS in the game with the matrix (1), being the function of variables $\{h_{j-1j}^{(1)}\}_{j=2}^N$, is not generally found for the integer $N > 4$. But suppose that the k -th matrix

$$\mathbf{H}_k = (h_{ij}^{(k)})_{N \times N} \quad \text{for } h_{ij}^{(k)} = |v_i^{(k)} - v_j^{(k)}| \quad \text{at } i = \overline{1, N} \text{ and } j = \overline{1, N} \text{ by } k = \overline{1, m} \quad (3)$$

is constructed for the k -th parameter of N models with its values $\{v_j^{(k)}\}_{j=1}^N$, being the function of the variables $\{h_{j-1j}^{(k)}\}_{j=2}^N$. And suppose that the set of SPOS in the game with the matrix (3) is already found and narrowed to a

probabilistic distribution $\{\tilde{q}_j^{(k)}\}_{j=1}^N$, being the nearest to the equiprobable distribution $\{N^{-1}\}_{j=1}^N$, where $\tilde{q}_j^{(k)}$ is the probability of selecting the value $v_j^{(k)}$ of the k -th parameter from the j -th mathematical model, $\sum_{j=1}^N \tilde{q}_j^{(k)} = 1$,

$N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Then it remains only to unify the probabilities along each model through its parameters, what lets to state as an \mathbb{R}^N -point the probabilistic distribution $\{\tilde{q}_j\}_{j=1}^N$ over N models, where \tilde{q}_j is the probability of selecting the j -th mathematical model with its values $\{v_j^{(k)}\}_{k=1}^m$.

The probabilities $\{\tilde{q}_j^{(k)}\}_{k=1}^m$ along the j -th model may be unified only through summing them up or putting them into product. The influence of parameters is unknown, so their unification into the parametrical unit cannot be accomplished with appropriate weights, unless they all are equal, where minimax approach is ignored as the problem might have been ultra-minimax. Thus in summing,

$$\tilde{q}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \tilde{q}_j^{(k)} \quad \text{for } j = \overline{1, N} \quad (4)$$

and in multiplying,

$$\tilde{q}_j = \frac{\prod_{k=1}^m \tilde{q}_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^m \tilde{q}_i^{(k)}} \quad \text{for } j = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Clearly, that (5) can be generalized to

$$\tilde{q}_j = \frac{\left(\prod_{k=1}^m \tilde{q}_j^{(k)} \right)^{\frac{1}{m}}}{\sum_{i=1}^N \left(\prod_{k=1}^m \tilde{q}_i^{(k)} \right)^{\frac{1}{m}}} \quad \text{for } j = \overline{1, N} \quad (6)$$

and (6) is generalized finally to

$$\tilde{q}_j = \frac{\left(\prod_{k=1}^m \tilde{q}_j^{(k)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\sum_{i=1}^N \left(\prod_{k=1}^m \tilde{q}_i^{(k)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{by } \gamma > 0 \text{ for } j = \overline{1, N}. \quad (7)$$

The summation in (4) can be generalized in two ways:

$$\check{q}_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^m \check{q}_j^{(k)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^m \check{q}_i^{(k)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ by } \gamma > 0 \text{ for } j = \overline{1, N} \quad (8)$$

and

$$\check{q}_j = \frac{\sum_{k=1}^m \left(\check{q}_j^{(k)} \right)^{\gamma}}{\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m \left(\check{q}_i^{(k)} \right)^{\gamma}} \text{ by } \gamma > 0 \text{ for } j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Anyone can ensure oneself that for any of (4) — (9) here is that $\sum_{j=1}^N \check{q}_j = 1$.

Surely, for $N = 3$ and $N = 4$ the statements (7) — (9) are restated explicitly due to [13, 14] and denotations

$$h_{12}^{(k)} = a_k, \quad h_{23}^{(k)} = b_k, \quad h_{34}^{(k)} = c_k.$$

Essentially, for $N = 3$ there are

$$\check{q}_1^{(k)} = \frac{2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2}{4(a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k)}, \quad \check{q}_2^{(k)} = \frac{a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2}{4(a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k)}, \quad \check{q}_3^{(k)} = \frac{a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2}{4(a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k)} \quad (10)$$

by $k = \overline{1, m}$ and

$$d_3^{(7)} = \left(\prod_{k=1}^m (2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (11)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{d_3^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_2 = \frac{1}{d_3^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_3 = \frac{1}{d_3^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (12)$$

as (7),

$$d_3^{(8)} = \left(\sum_{k=1}^m (2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (13)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{d_3^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_2 = \frac{1}{d_3^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_3 = \frac{1}{d_3^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (14)$$

as (8),

$$d_3^{(9)} = \sum_{k=1}^m (2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2)^{\gamma} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2)^{\gamma} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2)^{\gamma}, \quad (15)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{d_3^{(9)}} \sum_{k=1}^m (2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2)^{\gamma}, \quad \check{q}_2 = \frac{1}{d_3^{(9)}} \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2)^{\gamma}, \quad \check{q}_3 = \frac{1}{d_3^{(9)}} \sum_{k=1}^m (a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2)^{\gamma} \quad (16)$$

as (9); and for $N = 4$ there are

$$\check{q}_1^{(k)} = \frac{3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k}{2(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k)}, \quad \check{q}_2^{(k)} = \frac{a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k}{2(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k)},$$

$$\check{q}_3^{(k)} = \frac{a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k}{2(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k)}, \quad \check{q}_4^{(k)} = \frac{a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k}{2(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k)} \quad (17)$$

by $k = \overline{1, m}$ and

$$d_4^{(7)} = \left(\prod_{k=1}^m (3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} +$$

$$+ \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (18)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{d_4^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_2 = \frac{1}{d_4^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\check{q}_3 = \frac{1}{d_4^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_4 = \frac{1}{d_4^{(7)}} \left(\prod_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (19)$$

as (7),

$$d_4^{(8)} = \left(\sum_{k=1}^m (3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (20)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{d_4^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_2 = \frac{1}{d_4^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\check{q}_3 = \frac{1}{d_4^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad \check{q}_4 = \frac{1}{d_4^{(8)}} \left(\sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k) \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (21)$$

as (8),

$$d_4^{(9)} = \sum_{k=1}^m (3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k)^{\gamma} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k)^{\gamma} +$$

$$+ \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k)^{\gamma} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k)^{\gamma}, \quad (22)$$

$$\check{q}_1 = \frac{1}{d_4^{(9)}} \sum_{k=1}^m (3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k)^{\gamma}, \quad \check{q}_2 = \frac{1}{d_4^{(9)}} \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k)^{\gamma},$$

$$\check{q}_3 = \frac{1}{d_4^{(9)}} \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k)^{\gamma}, \quad \check{q}_4 = \frac{1}{d_4^{(9)}} \sum_{k=1}^m (a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k)^{\gamma} \quad (23)$$

as (9).

And for many cases of m -parameter model uncertainties the statements (11) — (16) and (18) — (23) are sufficient, inasmuch as five and more mathematical models of the object identification or description is an uncommon rarity.

INFERENCE

The reduced m -parameter N -model uncertainty with the fixed data $\{v_j^{(k)}\}_{j=1}^N$ into the probabilistic distribution $\{\check{q}_j\}_{j=1}^N$ of (7) — (9) may be applied strictly in using the j -th mathematical model with probability \check{q}_j every time, when there are the fixed data $\{v_j^{(k)}\}_{j=1}^N$ on the object event or its watch moment. This particularly is very hard, and investigator can apply the distribution of probabilities $\{\check{q}_j\}_{j=1}^N$ nonstrictly, calculating either the minimaxed expectation values

$$\tilde{v}^{(k)} = \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j v_j^{(k)} \quad \forall k = \overline{1, m}$$

after parametric unification or the minimaxed expectation values

$$\tilde{v}^{(k)} = \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j^{(k)} v_j^{(k)} \quad \forall k = \overline{1, m}. \quad (24)$$

For (24) with $N=3$ and $N=4$ the statements (10) and (17) are valid. In advancing the process of watching the object there will be acquired the nonnegative weights $\left\{ \left\{ w_j^{(k)} \right\}_{j=1}^N \right\}_{k=1}^m$ which help to determine the k -th probabilistic measure from probabilities $\left\{ \mu_j^{(k)} \right\}_{j=1}^N$ over the set of N mathematical models, where

$$\mu_j^{(k)} = \frac{w_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^N w_i^{(k)}} \quad \text{for } j = \overline{1, N} \quad \text{by } k = \overline{1, m}.$$

And then the probability $\mu_j^{(k)}$ should be used in the same way as the probability $\tilde{q}_j^{(k)}$.

REFERENCES

1. Shen-tu H. Feedback structure based entropy approach for multiple-model estimation / H. Shen-tu, A. Xue, Y. Guo // Chinese Journal of Aeronautics. — 2013. — Volume 26, Issue 6. — P. 1506 — 1516.
2. Jeong C. Bayesian multiple structural change-points estimation in time series models with genetic algorithm / C. Jeong, J. Kim // Journal of the Korean Statistical Society. — 2013. — Volume 42, Issue 4. — P. 459 — 468.
3. Mechelen I. V. A unifying model involving a categorical and/or dimensional reduction for multimode data / I. V. Mechelen, J. Schepers // Computational Statistics & Data Analysis. — 2007. — Volume 52, Issue 1. — P. 537 — 549.
4. Gómez V. U. Ring: A unifying meta-model and infrastructure for Smalltalk source code analysis tools / V. U. Gómez, S. Ducasse, T. D'Hondt // Computer Languages, Systems & Structures. — 2012. — Volume 38, Issue 1. — P. 44 — 60.
5. Ocampo C. J. Field exploration of coupled hydrological and biogeochemical catchment responses and a unifying perceptual model / C. J. Ocampo, M. Sivapalan, C. E. Oldham // Advances in Water Resources. — 2006. — Volume 29, Issue 2. — P. 161 — 180.
6. Kask K. Unifying tree decompositions for reasoning in graphical models / K. Kask, R. Dechter, J. Larrosa, A. Dechter // Artificial Intelligence. — 2005. — Volume 166, Issues 1 — 2. — P. 165 — 193.
7. Miyamichi J. Some maximal absolutely unstable sign patterns of 4×4 matrices / J. Miyamichi // Systems & Control Letters. — 1982. — Volume 1, Issue 6. — P. 404 — 408.
8. Xu D. Estimation of periodic-like motions of chaotic evolutions using detected unstable periodic patterns / D. Xu, Z. Li, S. R. Bishop, U. Galvanetto // Pattern Recognition Letters. — 2002. — Volume 23, Issues 1 — 3. — P. 245 — 252.
9. Mahsuli M. Sensitivity measures for optimal mitigation of risk and reduction of model uncertainty / M. Mahsuli, T. Haukaas // Reliability Engineering & System Safety. — 2013. — Volume 117. — P. 9 — 20.
10. Kwiatkowska M. Compositional probabilistic verification through multi-objective model checking / M. Kwiatkowska, G. Norman, D. Parker, H. Qu // Information and Computation. — 2013. — Volume 232. — P. 38 — 65.
11. Riis M. Applying the minimax criterion in stochastic recourse programs / M. Riis, K. A. Andersen // European Journal of Operational Research. — 2005. — Volume 165, Issue 3. — P. 569 — 584.
12. Huang M.-N. L. Minimax and maximin efficient designs for estimating the location-shift parameter of parallel models with dual responses / M.-N. L. Huang, C.-S. Lin // Journal of Multivariate Analysis. — 2006. — Volume 97, Issue 1. — P. 198 — 210.
13. Романюк В. В. Единственное решение в общей строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости с принципом гарантировано минимальных абсолютных

отклонений / В. В. Романюк // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. — 2013. — № 2. — С. 176 — 182.

14. Romanuke V. V. Selection of quasiequiprobable distribution from continuum of optimal strategies to the generalized strictly formulated problem of removing single-parameter four-model uncertainty within assuredly minimized deviation approach / V. V. Romanuke // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. — № 1. — С. 93 — 110.
15. Ding J. Parameter identification of multi-input, single-output systems based on FIR models and least squares principle / J. Ding, F. Ding, S. Zhang // Applied Mathematics and Computation. — 2008. — Volume 197, Issue 1. — P. 297 — 305.
16. Liu Y. Multi-innovation stochastic gradient algorithm for multiple-input single-output systems using the auxiliary model / Y. Liu, Y. Xiao, X. Zhao // Applied Mathematics and Computation. — 2009. — Volume 215, Issue 4. — P. 1477 — 1483.
17. Xiang L. Hierarchical least squares algorithms for single-input multiple-output systems based on the auxiliary model / L. Xiang, L. Xie, Y. Liao, R. Ding // Mathematical and Computer Modelling. — 2010. — Volume 52, Issues 5 — 6. — P. 918 — 924.
18. Han Z. Real time prediction for converter gas tank levels based on multi-output least square support vector regressor / Z. Han, Y. Liu, J. Zhao, W. Wang // Control Engineering Practice. — 2012. — Volume 20, Issue 12. — P. 1400 — 1409.
19. Klemelä J. Lower bounds for the asymptotic minimax risk with spherical data / J. Klemelä // Journal of Statistical Planning and Inference. — 2003. — Volume 113, Issue 1. — P. 113 — 136.
20. Saha B. N. Image thresholding by variational minimax optimization / B. N. Saha, N. Ray // Pattern Recognition. — 2009. — Volume 42, Issue 5. — P. 843 — 856.

УДК 519.17

ПРО ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНОСТЬ ГРАФОВ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

¹Семенюта М. Ф., к. ф.-м. н., доцент, ²Петренюк Д. А., к. ф.-м. н.

¹Кировоградская летная академия национального авиационного университета

²Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины

В статье проведено исследование структуры графов, не допускающих Фибоначчи грациозную разметку. Доказана теорема, исключающая определенный класс графов, из списка Фибоначчи грациозных графов. Получены результаты относительно Фибоначчи грациозности графа nC_m .

Ключевые слова: разметка графа, Фибоначчи грациозная разметка, Фибоначчи грациозный граф.

¹Семенюта М. Ф., ²Петренюк Д. А. ПРО ФІБОНАЧЧІ ГРАЦІОЗНІСТЬ ГРАФІВ ЦИКЛІЧНОЇ СТРУКТУРИ / ¹Кіровоградська льотна академія національного авіаційного університету, ²Інститут кибернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Україна

В статті проведено дослідження структури графів, що не допускають Фібоначчі граціозну розмітку. Доведена теорема, яка виключає певний клас графів зі списку Фібоначчі граціозних графів. Одержано результати відносно Фібоначчі граціозності графа nC_m .

Ключові слова: розмітка графа, Фібоначчі граціозна розмітка, Фібоначчі граціозний граф.

¹Semenyuta M., ²Petreniuk D. ON FIBONACCI GRACEFULNESS OF GRAPHS / ¹Kirovograd Flight Academy of National Aviation University, ²Institute of Cybernetics named V.M. Glushkov of national Academy of Sciences of Ukraine

Relevancy of the subject is indicated in the paper, and some special cases of the general Fibonacci graceful graphs characterization problem are considered. In 1967 Alexander Rosa introduced β -labeling (which was later called gracious labeling) in connection with graph decomposition theory. The case when edge labeling of graph is a bijection from the edge set to the first q numbers of an arbitrary progression $\{a_i\}$, is a natural development of the graph gracefulness concept. The first instance when Fibonacci numbers were used as $\{a_i\}$ progression took place in 1983, but the papers showing the main results on the subject have been published in recent 8 years. In the present study unsolved problems are indicated by analyzing the papers. The

purpose of this study is to investigate the structure of graphs that do not admit Fibonacci graceful labeling, and also to study Fibonacci gracefulfulness of graphs that contain cycles of certain length. Finite undirected graphs without loops and multiple edges are considered. The notions of composition, Cartesian product, and n -dimensional cube are used according to F. Harary. Function f is called Fibonacci graceful labeling of graph $G=(V,E)$ with q edges, if f is injection from $V(G)$ to the set $\{0,1,2,3,4,\dots,F_q\}$, where F_q is the q -th Fibonacci number in the progression $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, ..., $F_q=F_{q-2}+F_{q-1}$, and the edge labeling $f^*(u,v)=|f(u)-f(v)|$ induced by f , is a bijection from $E(G)$ to $\{F_1, F_2, \dots, F_q\}$. Some theoretical results obtained by Bange D. W. and Barkauskas A. E. are used.

The structure of graphs that restrict the class of Fibonacci graceful graphs is studied. It's proved that if every edge of graph $G=(V,E)$ belongs to any two simple cycles of length more than 2 which do not have any other common elements besides this edge, then the graph G is not Fibonacci graceful. It is also proved that for any natural numbers $m \geq 3$ and $n \geq 3$ the graphs $C_m \times C_n$, $C_m[C_n]$, $P_m[P_n]$, $C_m[P_n]$, $P_m[C_n]$, and n -Dimensional cube Q_n are not Fibonacci graceful.

The problem of Fibonacci gracefulfulness is solved for some cyclical constructions, namely for the graph obtained by connecting vertices of C_{3m} to a vertex of C_{3n} using a path P_k ; We consider this problem for graphs nC_m and prove the following: 1) graph nC_3 is a Fibonacci graceful graph for any natural n ; 2) graphs nC_4 (for any natural n) and nC_5 (for any natural $n \geq 2$) do not admit Fibonacci graceful labeling. For nC_4 and nC_5 the proof is obtained using the rule of contraries. To prove Fibonacci gracefulfulness of nC_3 an algorithm has been designed to construct the corresponding labeling. Using of the algorithm is illustrated for $4C_3$ and $5C_3$.

Classes of graphs that do not admit Fibonacci graceful labeling are found in the study. A method is proposed to construct Fibonacci graceful labeling for graph nC_3 , which can be used in further theoretical studies as well as in development of Fibonacci graceful labeling constructive enumeration algorithms for certain classes of graphs.

Key words: graph labeling, Fibonacci graceful labeling, Fibonacci graceful graph.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В 1967 году в связи с исследованиями в теории разложений графов Александр Роса впервые ввел понятие β -разметки, которая позднее была названа грациозной разметкой. В дальнейшем она нашла применение при кодировании радарных импульсов и кодировании при наведении ракет; в рентгеновской кристаллографии; создании макетов антенн в радиоастрономии; в гидролокации. Задачи проектирования коммуникационных сетей и другие практические задачи, связанные с грациозной разметкой, приведены в [1].

Пусть граф $G=(V,E)$ является конечным, неориентированным графом без кратных ребер и петель, и имеет множество вершин $V(G)$ и множество ребер $E(G)$. Если не указана мощность этих множеств, то будем считать $|V(G)|=p$, $|E(G)|=q$. Граф $G=(V,E)$ является грациозным, если существует разметка f его вершин различными целыми числами из множества $\{0,1,2,\dots,q\}$, порождающая разметку ребер $f^*(u,v)=|f(u)-f(v)|$, где u, v – вершины графа G , при этом f^* – биекция из E на $\{1,2,\dots,q\}$. Естественным продолжением идеи грациозности графа $G=(V,E)$ представляется случай, когда разметка ребер – это биекция из множества ребер в первые q чисел произвольной последовательности $\{a_i\}$. В статье [2] последовательность $\{a_i\}$ состоит из чисел Фибоначчи. Мы используем определение Фибоначчи грациозной разметки, данное в [3]. Проблема характеристики всех Фибоначчи грациозных графов, сформулированная в статье [3], остается открытой в общем виде. В последующих публикациях исследования проводились для частных случаев. Например, авторами статьи [4] задача Фибоначчи грациозности решалась для графов, содержащих циклические конструкции. Они доказали, что граф, полученный соединением вершины цикла C_{3m} и вершины цикла C_{3n} цепью P_k , а также произвольное цепное объединение k копий цикла C_{3m} допускают Фибоначчи грациозную разметку. Сужением области значений меток вершин определена супер Фибоначчи грациозная разметка [5]. Таким образом, граф, обладающий супер Фибоначчи грациозной разметкой, является Фибоначчи грациозным. В [4] представлены следующие результаты, касающиеся супер Фибоначчи грациозной разметки: одноточечное объединение двух циклов C_{3m} и C_{3n} , а также одноточечное объединение k циклов C_n (где $n \equiv 0 \pmod{3}$) являются супер Фибоначчи грациозными графами. Авторами статьи [6] доказано, что графы $F_n \oplus K_{1,m}^+$, $C_n \oplus P_m$, $K_{1,n} \oslash K_{1,2}$, $F_n \oplus P_m$, $C_n \oplus K_{1,m}$ допускают супер Фибоначчи грациозную разметку.

Эти же авторы в [7] доказали супер Фибоначчи грациозность таких специальных классов графов, как F_n^t – одноточечное объединение t копий вееров F_n при $n \geq 2$; C_n^t – одноточечное объединение t копий циклов длины n при $n \equiv 0 \pmod{3}$; $S_{m,n}^t$ – одноточечное объединение t копий графов $S_{m,n}$, где $S_{m,n}$ это звезда с m лучами, являющимися цепями длины n , при $n \equiv 1 \pmod{3}$; K_n при $n \leq 3$.

Цель данной работы: продолжить начатое в [3] исследование структуры графов, не допускающих Фибоначчи грациозную разметку, и изучение Фибоначчи грациозности графов, содержащих циклы определенной длины.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Среди разметок графов выделяют вершинные, реберные и тотальные. Понятие вершинной разметки включает три важные составляющие: множество, содержащее метки вершин; правило, по которому присваиваются значения меток каждому ребру и условия, которым эти значения должны удовлетворять. Фибоначчи грациозная разметка графа относится к вершинным разметкам.

Определение 1.1. [3] Функцию f называют Фибоначчи грациозной разметкой графа G с q ребрами, если f – инъекция из $V(G)$ в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, F_q\}$, где F_q – это q -тое число Фибоначчи в последовательности $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots, F_q = F_{q-2} + F_{q-1}$, а индуцируемая ею реберная разметка $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$ является биекцией из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, \dots, F_q\}$.

В 2006 году авторами работы [5] предложено аналогичное определение Фибоначчи грациозной разметки, с тем лишь отличием, что F_q – это q -тое число Фибоначчи в последовательности $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \dots, F_q = F_{q-2} + F_{q-1}$. Это определение используется в статьях [4–7].

Граф, обладающий Фибоначчи грациозной разметкой, называется Фибоначчи грациозным графом.

Очевидно, для Фибоначчи грациозного графа размера q ребро с меткой F_q должно быть инцидентно вершинам с метками 0 и F_q . Кроме того, вершина, смежная с вершиной, имеющей метку 0, должна быть помечена числом Фибоначчи, а остальные вершины получают различные метки числами между 0 и F_q .

Для графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ введем понятия композиции (или, другими словами, понятие лексикографического произведения) и декартового произведения, используя терминологию Харари.

Граф $G = G_1[G_2]$ называется *композицией* графов G_1 и G_2 при условии, что он имеет множество вершин $V = V_1 \times V_2$, а множество ребер $E(G)$ определяется следующим образом: вершины $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$ смежны в G тогда и только тогда, когда или $(u_1, v_1) \in E_1$, или $u_1 = v_1$ и $(u_2, v_2) \in E_2$.

Граф $G = G_1 \times G_2$ называется *декартовым произведением* графов G_1 и G_2 при условии, что он имеет множество вершин $V = V_1 \times V_2$, а множество ребер $E(G)$ определяется следующим образом: вершины $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$ будут смежными в G тогда и только тогда, когда $u_1 = v_1$, $(u_2, v_2) \in E_2$, или $u_2 = v_2$, $(u_1, v_1) \in E_1$.

n -*Мерным (булевым) кубом* Q_n называется граф, у которого множество вершин – это множество всех n -компонентных бинарных векторов, и две вершины считаются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы отличаются только в одной компоненте. n -Мерный куб Q_n можно определить рекурсивно: $Q_1 = K_2$ и $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$.

Если G – связный граф, то под nG подразумевается граф с n компонентами, каждая из которых изоморфна G .

Рассмотрим известные теоретические результаты, нашедшие применение в решении поставленных перед нами задач.

Теорема 1.1. [3] Пусть граф $G = (V, E)$ обладает Фибоначчи грациозной разметкой, и пусть C_i – цикл длины k в G . Тогда существует такая последовательность $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^k$ с $\delta_{ij} = \pm 1$, для всех $j = 1, 2, \dots, k$, что

$$\sum_{j=1}^k \delta_{ij} F_{ij} = 0, \text{ где } \{F_{ij}\}_{j=1}^k \text{ – числа Фибоначчи для меток ребер в } C_i.$$

Следствие 1.1. [3] Если граф $G = (V, E)$ имеет Фибоначчи грациозную разметку, тогда ребра его любого цикла длины 3 должны быть занумерованы тремя последовательными числами Фибоначчи (последовательности F_1, F_3, F_4 и F_2, F_3, F_4 эквивалентны).

Следствие 1.2. [3] Если граф $G = (V, E)$ имеет Фибоначчи грациозную разметку, тогда ребра его любого цикла длины 4 должны быть занумерованы последовательностью вида $F_i, F_{i+1}, F_{i+3}, F_{i+4}$.

Следствие 1.3. [3] Если граф $G = (V, E)$ имеет Фибоначчи грациозную разметку, тогда ребра его любого цикла длины 5 должны быть занумерованы последовательностью вида $F_i, F_{i+1}, F_{i+3}, F_{i+5}, F_{i+6}$ или $F_1, F_2, F_i, F_{i+1}, F_{i+2}$.

Теорема 1.2. [3] Цикл C_n является Фибоначчи грациозным графом тогда и только тогда, когда $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ или $n \equiv 2(\text{mod } 3)$.

Очевидно, приведенные выше теоремы и следствия верны в случае терминологии [5]. При этом учитываем, что последовательности F_1, F_3, F_4 и F_2, F_3, F_4 не эквивалентны, и в следствии 1.3 исключается последовательность $F_1, F_2, F_i, F_{i+1}, F_{i+2}$.

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ГРАФОВ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНОЙ РАЗМЕТКИ

Один из возможных способов охарактеризовать Фибоначчи грациозные графы – найти полный список графов такой, что граф G был бы Фибоначчи грациозным только при условии, если он не содержит подграфа, изоморфного одному из графов списка. Этот подход представляется сложным, так как грациозность – это глобальное, а не частное свойство. Тем не менее, следующая теорема и следствия из нее, ограничивают класс Фибоначчи грациозных графов.

Теорема 2.1. Если каждое ребро графа $G = (V, E)$ принадлежит любым двум простым циклам длины больше двух, не имеющих кроме этого ребра общих элементов, то граф G не является Фибоначчи грациозным.

Доказательство. Предположим, что граф $G = (V, E)$ допускает Фибоначчи грациозную разметку и $|E| = q$. Каждое ребро данного графа входит в два простых цикла, каждый из которых имеет длину больше двух. Пусть ребро $(x_k y_k)$ принадлежит циклу $C_i = (V_i, E_i)$ и циклу $C_j = (V_j, E_j)$, где $V_i \cap V_j = \{x_k, y_k\}$, $E_i \cap E_j = \{(x_k y_k)\}$. Не нарушая общности, будем считать, что F_q – метка ребра $(x_k y_k)$. Она является наибольшей для C_i и C_j . Согласно лемме 1 [3], ребро с меткой F_{q-1} должно содержаться в каждом из указанных циклов, что невозможно в силу определения 1.1. Пришли к противоречию. Следовательно, граф G не является Фибоначчи грациозным. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Для любых натуральных чисел $m \geq 3$ и $n \geq 3$ графы $C_m \times C_n$, $C_m[C_n]$, $P_m[P_n]$, $C_m[P_n]$, $P_m[C_n]$ не являются Фибоначчи грациозными.

Доказательство. Каждое ребро указанных графов $C_m \times C_n$, $C_m[C_n]$, $P_m[P_n]$, $C_m[P_n]$, $P_m[C_n]$ входит не менее чем в два цикла, длины которых больше 2. Следовательно, по теореме 2.1 эти графы не являются Фибоначчи грациозными.

Следствие 2.2. n -Мерный куб Q_n не является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального $n \geq 3$.

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 2.1.

ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНОСТЬ ГРАФОВ nC_m

Авторы [3] изучали свойства графов, допускающих Фибоначчи грациозную разметку и содержащих циклы определенной длины. В работе [4] задача Фибоначчи грациозности графов решалась для таких конструкций, как граф, полученный соединением цепью P_k вершины цикла C_{3m} с вершиной цикла C_{3n} , а также для произвольного цепного объединения графов G_1, G_2, \dots, G_k . Мы рассмотрим эту задачу для графов nC_m .

Теорема 3.1. Граф nC_3 является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального n .

Доказательство. Пусть $j=1,2,\dots,n$, обозначим v_1^j, v_2^j, v_3^j – вершины j -ой компоненты C_3^j в графе nC_3 . Зададим разметку вершин f следующим образом: $f(v_1^n)=0, f(v_2^n)=F_{3n-1}, f(v_3^n)=F_{3n}; f(v_1^{n-1})=n+1, f(v_2^{n-1})=n+1+F_{3n-4}, f(v_3^{n-1})=n+1+F_{3n-3}; f(v_1^{n-2})=n, f(v_2^{n-2})=n+F_{3n-7}, f(v_3^{n-2})=n+F_{3n-6}; \dots; f(v_1^2)=4, f(v_2^2)=4+F_5, f(v_3^2)=4+F_6; f(v_1^1)=1, f(v_2^1)=2, f(v_3^1)=3$ (рис.1).

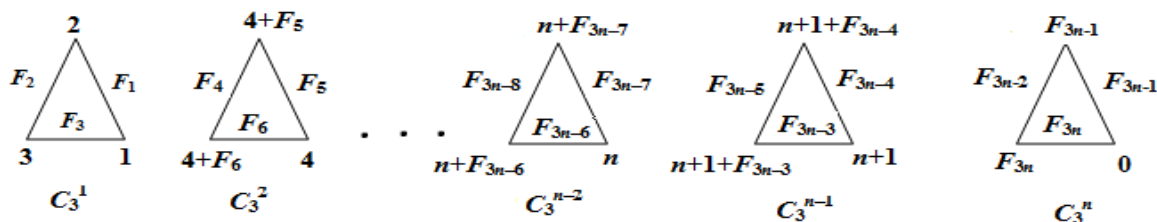


Рис. 1. Фибоначчи грациозная разметка графа nC_3

Следовательно, f – инъективная функция из множества вершин в множество различных положительных целых чисел $0, 1, 2, 3, \dots, F_{3n-2}, F_{3n-1}, F_{3n}$. Пусть в C_3^n входит вершина с меткой 0, тогда одна из смежных ей вершин будет иметь метку F_{3n} , а вторая, согласно следствию 1.1 – метку F_{3n-1} . Ребра C_3^n получают метки: $F_{3n}, F_{3n-1}, F_{3n-2}$. При разметке вершин f , распределение меток ребер в циклах $C_3^{n-1}, C_3^{n-2}, C_3^{n-3}, \dots, C_3^2, C_3^1$ будет соответственно следующее: $F_{3n-3}, F_{3n-4}, F_{3n-5}; F_{3n-6}, F_{3n-7}, F_{3n-8}; F_{3n-9}, F_{3n-10}, F_{3n-11}; \dots; F_6, F_5, F_4; F_3, F_2, F_1$ (рис.1). Согласно определению 1.1 разметка f является Фибоначчи грациозной для графа nC_3 , где n – произвольное натуральное число. Теорема доказана.

Для графов $4C_3$ и $5C_3$ применим алгоритм построения разметки вершин, изложенный в теореме 3.1, тогда метки ребер образуют соответствующую последовательность чисел Фибоначчи. Результаты представлены на рисунках 2, 3.

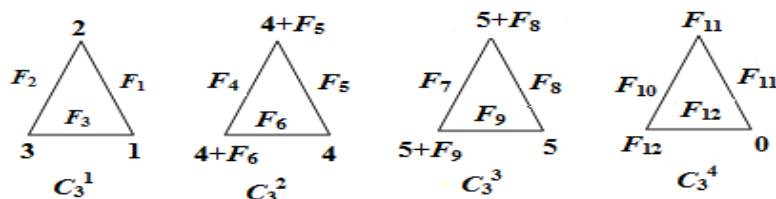


Рис. 2. Фибоначчи грациозная разметка графа $4C_3$

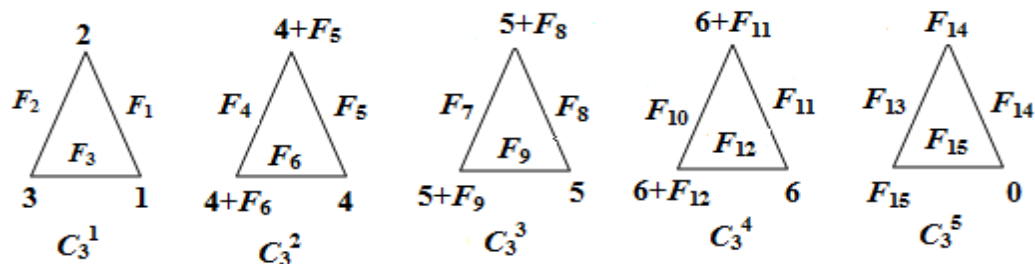


Рис. 3. Фибоначчи грациозная разметка графа $5C_3$

Теорема 3.2. Граф nC_4 не является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального n .

Доказательство. Рассмотрим случай $n=1$. Согласно теореме 1.2, граф C_4 не является Фибоначчи грациозным. Пусть $n>1$. Предположим, что nC_4 – Фибоначчи грациозный граф. Тогда цикл C_4 , содержащий вершину с меткой 0, будет иметь метки ребер $F_{4n}, F_{4n-1}, F_{4n-3}, F_{4n-4}$. Число F_{4n-2} должно быть меткой ребра любого другого цикла. В этом случае не существует последовательности чисел, удовлетворяющих условию следствия 1.2. Пришли к противоречию. Следовательно, граф nC_4 не является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального n . Теорема доказана.

Теорема 3.3. Граф nC_5 не является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального $n \geq 2$.

Доказательство. Предположим, что nC_5 – Фибоначчи грациозный граф. Тогда цикл C_5 , содержащий вершину с меткой 0, будет иметь метки ребер $F_{5n}, F_{5n-1}, F_{5n-3}, F_{5n-5}, F_{5n-6}$. Число F_{5n-2} должно быть меткой ребра любого другого цикла. В этом случае не существует последовательности чисел, удовлетворяющих условию следствия 1.3. Пришли к противоречию. Следовательно, граф nC_5 не является Фибоначчи грациозным графом для любого натурального $n \geq 2$. Теорема доказана.

ВЫВОДЫ

Для повышения скорости и эффективности получения результатов по классу задач, использующих Фибоначчи грациозность графов, требуется разработка алгоритмов. Нами предложены теоретические основы на пути к созданию подобных алгоритмов. При исследовании структуры графов, не допускающих Фибоначчи грациозную разметку, доказана теорема, исключающая определенный класс графов из списка Фибоначчи грациозных графов.

Полученная в данной работе методика построения Фибоначчи грациозной разметки графа nC_3 может быть использована в дальнейших теоретических исследованиях, а также при создании алгоритмов конструктивного перечисления Фибоначчи грациозных разметок определенных классов графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovar P. Decompositions and Factorizations of Complete Graphs / P. Kovar // Structural Analysis of Complex Networks. Edited by Matthias Dehmer. — Springer, 2010.
2. Koh K. M. Fibonacci trees / K. M. Koh, D. G. Lee, T. Tan // SEA bull. math. — 1978. — №2. — P. 45–47.
3. Bange D. W. Fibonacci graceful graphs / D. W. Bange, A. E. Barkauskas // Fibonacci quarterly. — 1983. — Vol. 21, № 3. — P. 174–188.
4. Vaidya S. K. Fibonacci and super Fibonacci graceful labeling of some cycle related graphs / S. K. Vaidya, U. M. Prajapati // International J. Math. Combin. — 2011. — №4 — P. 56–69.
5. Kathiresan K. M. Fibonacci graceful graphs. Ph. D. Thesis / K. M. Kathiresan, S. Amutha // Madurai Kamaraj University, October 2006.
6. Sridevi R. Super Fibonacci graceful labeling / R. Sridevi, S. Navaneethakrishnan, K. Nagarajan // International J. Math. Combin. — 2010. — №3. — P. 22–40.
7. Sridevi R. Super Fibonacci graceful labeling of some special class of graphs / R. Sridevi, S. Navaneethakrishnan, K. Nagarajan // International J. Math. Combin. — 2011. — №1. — P. 59–72.

УДК 518.25

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Семчишин Л. М., к.ф.-м.н

*Чортківський навчально-науковий інститут підприємництва і бізнесу,
Тернопільський національний економічний університет*

Запропоновано новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами, а також метод розв'язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення. Розкладено невідомі x_i цієї розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дробі. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Описаний алгоритм застосований і у випадку систем із прорідженими трьохдіагональними матрицями.

Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язано трьохдіагональні системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом ланцюгових дробів. У роботі показано ефективність запропонованого алгоритму.

Ключові слова: розріджені системи, ланцюгові дробі, скінченні суми, кількість записів, складність алгоритму, комп'ютерна алгебра, тестування алгоритмів.

Семчишин Л. М. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ / Чертковский учебно-научный институт предпринимательства и бизнеса, Тернопольский национальный экономический университет, Украина

Предложен новый подход к решению разреженных систем линейных алгебраических уравнений с блочными элементами, а также метод решения разреженных систем с некоторыми характерными способами заполнения. Разложены неизвестные x_i данной разреженной системы линейных алгебраических уравнений в конечные матричные цепные дроби. Проведен подсчет количеств записей и операций при численной реализации алгоритма умножения матриц. Охарактеризована сложность алгоритма с точки зрения компьютерной алгебры. Проведено сравнение предложенного алгоритма и блочного метода прогонки. Вычислено количество записей для метода прогонки. Описанный алгоритм применен и в случае систем с разреженными трехдиагональными матрицами.

Протестированы алгоритмы решения некоторых типов разреженных числовых систем линейных алгебраических уравнений. Проведено решения трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений методом цепных дробей. В работе показана эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: разреженные системы, цепные дроби, конечные суммы, количество записей, сложность алгоритма, компьютерная алгебра, тестирование алгоритмов.

Semchyshyn L. M. PROGRAM REALIZATION OF THE RAREFIED SYSTEMS LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS SOLUTION / Chortkiv scientific educational Institute of enterprise and business, Ternopil National Economic University, Ukraine

New approach to the linear algebraic equations rarefied systems with block elements solution and the method of rarefied systems with the specific ways of filling solution is suggested in the article. Minor denotation, which lies on the intersection of the block tapes and block columns is introduced. In the suggested work the Cramer's generalized rule is used, and Leonard Euler equality, which ties chain fractions with lines and finite sums is applied. The variables of the x_i rarefied system of the linear algebraic equations into the finite matrix chain fractions are decomposed. Statement for the algorithm complexity estimation in terms of computer algebra is used. Calculation of the records number and operations under the numerical realization of the matrix multiplication algorithm is conducted. The algorithm complication from the point of view of computer algebra is characterized. Comparison of the suggested algorithm and the block tridiagonal matrix algorithm is carried out. The number of records for the tridiagonal matrix algorithm is calculated. The suggested algorithm significantly dominates the classical tridiagonal matrix algorithm. It can be realized both in the analytical and numerical aspect. The described algorithm is used in the case of systems with the rarefied three-diagonal matrix. Matrix can be framed from one side as well as from both sides.

Algorithms of some types rarefied numerical systems of the linear algebraic equations are tested. Three-diagonal systems of the linear algebraic equations solution by the method of chain fractions. The high accuracy of the suggested solution is shown.

Function ESSELS is written and tested for the linear algebraic equations with numerical elements solution systems in the MatLab medium. This function implements the algorithm of the linear algebraic equations solution using the method of cut-off systems. This algorithm allows to solve equation systems in two ways: – in the case of symmetrical filling (the quantity of under-diagonals equals the quantity of above-diagonals), and when the quantity of matrix under-diagonals and the quantity of above-diagonals are different. For the comparison of the MatLab package with regular programs a small program MatLabFC_Three_Diag_Sys was written. The system of equations for testing of the threedagonal linear algebraic equations algorithm using the method of chain fractions was used. It's asymmetric system of equations without a diagonal dominance and with the average meaning of spectrum number conditionality.

FC_Three_Diag_Sys function realizes the procedure of the linear algebraic equations tape systems by means of MatLab. Suggested the simplification of possible usage the text with the block forming of the linear algebraic equations, with the described matrix.

The results of both systems comparison are carried out in the chart. A simple test shows the high accuracy of the suggested method of threedagonal systems solving by the method of chain fractions. Algorithms for the given test system of the average dimension have a considerable advantages in comparison with the standard functions of the MatLab package. Efficiency of the suggested algorithm is shown in the article. Theoretical and methodological basis of investigation comprise methods of optimization and mathematic modeling. The given algorithm can be effectively used in computer algebra systems and for the engineering and applied in analytical and numerical problems solution.

Key words: rarefied systems, chain fractions, finite sums, quantity of records, algorithm difficulty, computer algebra, algorithm testing.

ВСТУП

Постановка проблеми. Актуальною задачею обчислювальної математики є розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Обчислювальна математика вивчає чисельні методи розв'язування різних математичних задач, тобто методи, які ґрунтуються на побудові скінченної послідовності дій над скінченною множиною чисел. Обчислювальні методи є одними з базових інструментів математичного моделювання і важливою частиною програмного забезпечення для комп'ютерів усіх поколінь. За умови використання таких обчислювальних методів застосовують математичне моделювання до розв'язку математичної задачі. Тоді розв'язок одержується у вигляді числового результату. Його ефективність визначається продуктивністю ЕОМ та якістю обчислювальних алгоритмів і програм, що використовуються.

Побудова ефективних методів визначення невідомих для таких систем – потрібна і досить непроста задача.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато відомих вітчизняних і закордонних вчених займалися проблемами розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Серед них: В. Воеводін [1, 2], В. Воеводін, Ю. Кузнецов [3], Є. Тиртишніков [4], Дж. Уїлкінсон [5] та ін. Розв’язуванню розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами присвячені роботи В. Воеводіна [6], Ф. Гантмахера [7]. Однак деякі проблеми не мають однозначного розв’язання і потребують уточнення. У роботі М. Недашковського і О. Ковальчук [8] розглянуто комп’ютерні алгоритми для систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Особлива увага приділялася методам аналізу обчислювальної стійкості алгоритмів у працях таких вчених, як: С. Ашманов [9], В. Валях [10], Д. Девенпорт, І. Сире, Е. Турнье [11].

Мета роботи. Дослідити новий підхід до розв’язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Провести підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Порівняти запропонований алгоритм та блочний метод прогонки. Обчислити кількість записів для методу прогонки. Протестувати алгоритми розв’язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показати ефективність запропонованих алгоритмів.

Теоретичну та методологічну основу дослідження складають методи оптимізації та математичне моделювання.

Дослідження задачі та обґрунтування отриманих наукових результатів. У значній кількості прикладних задач виникає необхідність розв’язання розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами [1, 2]. Розглянемо метод розв’язування розріджених систем із деякими найхарактернішими способами заповнення.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n+1} \\ A_{2,n+1} \\ A_{3,n+1} \\ \dots \\ A_{n-1,n+1} \\ A_{n,n+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

елементи якої A_{ij} – це блоки розмірності $m \times m$. Позначимо через $A \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{bmatrix}$ мінор, розміщений на перетині блочних стрічок i_1, i_2, \dots, i_k та блочних стовпців j_1, j_2, \dots, j_k . За узагальненим правилом Крамера [2]

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{1,n+1} & 0 & 0 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & A_{2,n+1} & \ddots & 0 \\ \ddots & A_{3,2} & \ddots & A_{3,n+1} & \ddots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & A_{n,n+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

Розкладаючи чисельник за мінорами, можна записати

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix} \right). \quad (2)$$

Введемо позначення

$$\alpha_{ik} = A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \cdot \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Тоді для визначення невідомої x_1 маємо співвідношення

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k}. \quad (3)$$

Для компактності запису надалі будемо позначати результат виконання операції множення на обернену матрицю зліва у вигляді $C^{-1}D = D/C$. Тоді вираз $D_1/(C_1 + D_2/C_2)$ означатиме $(C_1 + C_2^{-1}D_2)^{-1} \cdot D_1$.

Якщо до співвідношення (3) застосувати відому рівність Леонарда Ейлера [4], яка пов'язує ланцюгові дроби з рядами та скінченними сумами, то для x_1 одержимо

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} = \frac{A \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} \times$$

$$\times \frac{A_{1,n+1}}{E + \frac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}/A_{1,n+1}\alpha_{1,1}}{E - \frac{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{A_{1,n+1}\alpha_{1,2}} + \frac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}/A_{2,n+1}\alpha_{1,2}}{E - \frac{A_{3,n+1}\alpha_{1,3}}{A_{2,n+1}\alpha_{1,2}} + \dots + \frac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}/A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}{E - \frac{A_{n,n+1}\alpha_{1,n}}{A_{n-1,n+1}\alpha_{1,n-1}}}}}. \quad (4)$$

Тут і далі E – означає одиничну матрицю.

Вираз $\alpha_{1,k+1}^{-1} \cdot \alpha_{1,k}$ ($k = 1, 2, \dots$) також можна розкласти в ланцюгові дроби [11]

$$\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{1,k+1}} = \frac{A_{1,k} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{1,k} \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}}{A_{k+1,k+1} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} A \begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{E}{A_{k+1,k+1} - A_{k+1,k} A_{k,k+1} \left(A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} 1 & \dots & k-1 \\ 1 & \dots & k-1 \end{bmatrix} \right)^T} =$$

$$= \dots = \frac{E}{A_{k+1,k+1} - \frac{A_{k+1,k} A_{k,k+1}}{A_{k,k} - \frac{A_{k-1,k} A_{k,k-1}}{A_{k-1,k-1} - \dots}}}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

$$\dots - \frac{A_{1,2} A_{2,1}}{A_{1,1}}$$

В подібний спосіб

$$\frac{A \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}} = \frac{E}{A_{1,1} - A_{2,1} A_{1,2} \left[A^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 4 & \dots & n \end{bmatrix}^T \right]} =$$

$$= \dots = \frac{E}{A_{1,1} - \frac{A_{2,1} A_{1,2}}{A_{2,2} - \frac{A_{2,3} A_{3,2}}{A_{3,3} - \dots}}}$$

$$\dots - \frac{A_{n-1,n} A_{n,n-1}}{A_{n,n}}$$

За аналогічною схемою знаходимо решту невідомих x_i

$$x_i = \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\frac{A_{i,n+1}}{2} \alpha_{i,i} + \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} + \frac{A_{i,n+1}}{2} \alpha_{i,i} + \sum_{k=i+1}^n (-1)^{i+k} A_{k,n+1} \alpha_{i,k} \right) =$$

$$= \left[(-1)^{2i-1} A_{i-1,i} \alpha_{i,i-1} / \alpha_{i,i} + (-1)^{2i} A_{i,i} + (-1)^{2i+1} A_{i+1,i} \alpha_{i,i+1} / \alpha_{i,i} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{2} A_{i,n+1}}{E - \frac{2(A_{i,n+1} \alpha_{i,i})^{-1} A_{i-1,n+1} \alpha_{i,i-1}}{E + \frac{2A_{i-1,n+1} \alpha_{i,i-1}}{A_{i,n+1} \alpha_{i,i}} - \dots}} - \frac{\frac{1}{2} A_{i,n+1}}{E - \frac{2(A_{i,n+1} \alpha_{i,i})^{-1} A_{i+1,n+1} \alpha_{i,i+1}}{E + \frac{2A_{i+1,n+1} \alpha_{i,i+1}}{A_{i,n+1} \alpha_{i,i}} - \dots}} \right].$$

$$\dots - \frac{\frac{A_{1,n+1} \alpha_{i,1}}{A_{2,n+1} \alpha_{i,2}}}{E + \frac{A_{1,n+1} \alpha_{i,1}}{A_{2,n+1} \alpha_{i,2}}} \quad \dots - \frac{\frac{A_{n,n+1} \alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1} \alpha_{i,n-1}}}{E + \frac{A_{n,n+1} \alpha_{i,n}}{A_{n-1,n+1} \alpha_{i,n-1}}}$$

А для кожного відношення $\alpha_{i,k} / \alpha_{i,k+1}$ в свою чергу можна записати:

$$\frac{\alpha_{i,k}}{\alpha_{i,k+1}} = \frac{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^{k-1} A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}}{A \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 \end{bmatrix} \prod_{s=i+1}^k A_{s,s+1} A \begin{bmatrix} k+2 & \dots & \dots & n \\ k+2 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}} = \frac{A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}}{A_{k,k+1} A \begin{bmatrix} k+1 & \dots & \dots & n \\ k+1 & \dots & \dots & n \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} - \frac{A_{k+1,k+2} A_{k+2,k+1}}{A_{k,k+1} \left(A^{-1} \begin{bmatrix} k+3 & \dots & n \\ k+3 & \dots & n \end{bmatrix}^T A^T \begin{bmatrix} k+2 & \dots & n \\ k+2 & \dots & n \end{bmatrix} \right)^T} =$$

$$= \dots = \frac{A_{k+1,k+1}}{A_{k,k+1}} - \frac{A_{k+1,k+2}A_{k+2,k+1}/A_{k,k+1}}{A_{k+2,k+2} - \frac{A_{k+3,k+2}A_{k+2,k+3}}{A_{k+3,k+3} - \frac{A_{k+3,k+4}A_{k+4,k+3}}{A_{k+4,k+4} - \dots}}} \cdot \dots - \frac{A_{n-1,n}A_{n,n-1}}{A_{n,n}}.$$

Отже, одержуємо аналітичне розв'язання невідомих x_i даної розрідженої системи лінійних алгебраїчних рівнянь у скінченні матричні ланцюгові дроби.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМУ

Тепер підрахуємо необхідну кількість записів при символічному розв'язуванні задачі та кількість операцій під час чисельної реалізації алгоритму множення матриць $A_{ij} \cdot A_{kl}$.

Твердження [8]. Нехай деяка обчислювальна задача з вхідними даними $\{A_i\}$ розв'язується на ЕОМ за алгоритмом ψ (A_1, A_2, \dots, A_n) і складається з k кроків ψ_j ($j = \overline{1, k}$). Якщо на кожному кроці алгоритму $\psi(A)$ реалізується хоча б один запис виду $\psi_{ji_1}(A) \cdot \psi_{ji_2}(A)$, який використовує результат попереднього кроку, то загальна складність Q_ψ задачі буде не меншою $2^k \cdot m^2$, але не більшою H^k записів, де H – найбільша ширина алгоритму на k кроках.

Використаємо це твердження для оцінки складності алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри [11]. Для чисел x_i ($i = \overline{1, n}$) на одному поверсі реалізація алгоритму вимагає одне блочне множення, одне блочне ділення, одне блочне додавання, а для n поверхів – $3n$ операцій, тобто по n блочних множень, ділень та додавань.

Обчислення показують, що для визначення всіх $A_{i,k}/A_{i,k+1}$ потрібно $5k$ записів, якщо $k < i$, і $5(n-k)$, якщо $k > i$. Так необхідно виконати

$$5 \sum_{k=1}^i k + 5 \sum_{k=i}^n n - k = 5 \left[\frac{(1+i)i}{2} + n(n-i+1) - \frac{(i+n)(n-i+1)}{2} \right] = 5 \left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni \right].$$

Отже, загальна складність методу становить

$$5 \sum_{i=1}^n \left[i^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - ni \right] = \frac{5}{2} (n^3 + n).$$

Відомо [7, 10], що алгоритм прогонки реалізується співвідношеннями

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_{i,n+1} + a_{i,i-1}\beta_i}{a_{i,i} - a_{i,i-1}}$$

для прямого та зворотного ходу.

Проведемо порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Кількість записів для методу прогонки, який реалізується співвідношеннями

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}, \quad \beta_2 = \frac{a_{1,n+1}}{a_{1,1}},$$

$$x_2 = \alpha_3 x_3 + \beta_3, \quad \alpha_3 = \frac{a_{2,3}}{a_{2,2} - a_{2,1}}, \quad \beta_3 = \frac{a_{2,n+1}}{a_{2,2} - a_{2,1}},$$

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n, \quad \alpha_n = \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}}, \quad \beta_n = \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-1,n-1} - a_{n-1,n-2}},$$

буде оцінюватися відповідно до *твердження*. Розрахунки свідчать, що для обчислення α_{i+1} та β_{i+1} необхідно записати по i операцій блочного додавання, блочного множення та блочного ділення.

Тоді для обчислення кожного x_k треба записати $\sum_{k=1}^i k = (1+i)i/2$ записів, а для обчислення всіх x_i $i = \overline{1, n}$ потрібно $(n^3 + n^2 + 2n)/4$ записів.

Отже, із точки зору комп'ютерної алгебри запропонований алгоритм суттєво переважає класичний алгоритм прогонки. Він може бути реалізований як в аналітичному, так і в числовому вигляді. Для реалізації запропонованого алгоритму потрібно по $6n$ блочних додавань і блочних ділень і $4n$ блочних множень, оскільки в цьому випадку результати обчислень проміжних дробів можуть використовуватися багаторазово.

Відзначимо, що описаний алгоритм можна також застосовувати і у випадку систем із прорідженими трьохдіагональними матрицями наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & A_{1,k} & & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \ddots & A_{2,k+1} & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ A_{k,1} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & A_{n-k,n} \\ 0 & A_{k+1,2} & \ddots & & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n,n-k} & \ddots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Матриці можуть також бути і обрамленими з однієї або двох сторін. Системи з подібним заповненням розпадаються на k систем вигляду (1), кожна з яких матиме порядок n/k .

Тестування алгоритмів розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Опис тестування функції FC_Three_Diag_Sys

Для перевірки алгоритму розв'язання трьохдіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом ланцюгових дробів була використана система рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1,5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1,5 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Це несиметрична система рівнянь без діагонального домінування із середнім значенням спектрального числа обумовленості.

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з числовими елементами в середовищі MatLab написана і протестована функція FC_Three_Diag_Sys. Ця функція реалізує алгоритм розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом ланцюгових дробів і написана за допомогою об'єктно-орієнтованої макромови MatLab.

Для спрощення її можливого використання поданий текст разом з блоком формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має описану матрицю.

```
function [] =FC_Three_Diag_Sys( )
```

```
% Розв'язування трьохдіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь
```

```
%      Ax=b
```

```
% за допомогою матричних ланцюгових дробів
```

```
clc
```

```
n=25;
```

```
% формування тестової системи лінійних рівнянь
```

```
for i=1 : n
```

```
    for j=1: n
```

```

A(i,j)=0;
if (i==j) A(i,j)=1.5; end
if(i==j+1) A(i,j)=-1; end
if(j==i+1) A(i,j)=1; end
end
b(i)=0;
end;
b(1)=3;
%, обчислення X(1) і решти невідомих
D(n)=A(n,n);
i=n;
while (i>1);
    i = i-1;
    D(i)=A(i,i)-A(i+1,i)*A(i,i+1)/D(i+1);
end;
x(1)=b(1)/D(1);
i=1;
while (i<n)
    i=i+1;
    x(i)=-A(i,i-1)*x(i-1)/D(i);
end
x
end

```

Результати тестування функції FC_Three_Diag_Sys для $n = 25$ скопійовані з вікна MatLab і подані у таблиці:

Значення n	Значення невідомих x_i									
25	1.5000	0.7500	0.3750	0.1875	0.0938	0.0469	0.0234	0.0117	0.0059	0.0029
	0.0015	0.0007	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000					

Нескладна перевірка показує високу точність запропонованого методу розв'язання трьохдіагональних систем методом ланцюгових дробів.

Опис тестування функції ESSELS

Тут мова піде про розв'язування систем зі стрічковим заповненням. Позначимо через L – кількість наддіагоналей, а через M – кількість піддіагоналей конкретної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У такому разі обчислення можна вести, звичайно, і за формулами (2) та (3). Однак з врахуванням характеру заповнення стрічкової матриці їх можна привести до вигляду

$$\left. \begin{aligned} b_{i,k} &= \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^M a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum_{j=1}^M a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad (i = \overline{k+1, n}); \\ z_k^{(k)} &= b_{k+1,k}, \quad (k = \overline{1, n-1}); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^M b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad (s = \overline{k-1, 1}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{i,k} &= \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^L a_{i,j} x_j^{(k-1)}}{a_{k,k} - \sum_{j=1}^L a_{k,j} x_j^{(k-1)}}, \quad (i = \overline{k+1, n}); \\ z_k^{(k)} &= b_{k+1,k}, \quad (k = \overline{1, n-1}); \quad z_s^{(k)} = b_{k+1,s} - \sum_{i=s+1}^L b_{i,s} z_i^{(k)}, \quad (s = \overline{k-1, 1}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

За рекурентними формулами (6) та (7) на деякому k -му кроці обчислюються лише ті $b_{i,j}$ і $b_{j,i}$, для яких існує хоча б один ненульовий елемент $a_{i,j}$ початкової матриці.

Алгоритм дозволяє розв'язати системи рівнянь як у випадку симетричного заповнення (кількість піддіагоналей дорівнює кількості наддіагоналей), так і тоді, коли кількість піддіагоналей та наддіагоналей матриці різні.

Отже, запропонований алгоритм для даної тестової системи середньої розмірності має суттєві переваги у порівнянні зі стандартними функціями пакету MatLab.

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто новий підхід до розв'язування розріджених систем лінійних алгебраїчних рівнянь із блочними елементами. Проведено підрахунок кількостей записів та операцій при чисельній реалізації алгоритму множення матриць. Охарактеризовано складність алгоритму з точки зору комп'ютерної алгебри. Проведено порівняння запропонованого алгоритму та блочного методу прогонки. Обчислено кількість записів для методу прогонки. Протестовано алгоритми розв'язання деяких типів розріджених числових систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Показано ефективність запропонованого алгоритму.

Запропонований алгоритм можна ефективно використовувати в системах комп'ютерної алгебри та для аналітично-числового розв'язування інженерних задач та прикладних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1977. — 303 с.
2. Воеводин В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. — С.-Пб. : Лань, 2008. — 416 с.
3. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
4. Тыртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. — М. : Физматлит, 2007. — 480 с.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. — М. : Наука, 1970. — 564 с.
6. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1986. — 296 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 324 с.
8. Недашковський М. О. Обчислення з λ -матрицями / М. О. Недашковський, О. Я. Ковальчук. — К. : Наук. думка, 2007. — 294 с.
9. Ашманов С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1981. — 340 с.
10. Валях В. Е. Последовательно-параллельные вычисления / В. Е. Валях. — М. : Мир, 1985. — 456 с.
11. Дэвэнпорт Д. Компьютерная алгебра / Д. Дэвэнпорт, И. Сирэ, Э. Турнье. — М. : Мир, 1991. — 352 с.

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ ОРТОТРОПНЫЙ КОЛЬЦЕВОЙ СЕКТОР И В ПОЛУПОЛОСУ

Щербина И. В., к. ф.-м. н., доцент, Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент

Национальная металлургическая академия Украины

Сформулирована и решена новая задача о контактном взаимодействии ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией и жесткого штампа. Получено распределение напряжений под штампом, а также напряжений в пластине. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с найденным ранее решением подобной задачи для ортотропной полуполосы.

Ключевые слова: метод возмущения, малый параметр, ортотропная пластина, криволинейная анизотропия, передача нагрузки, контактное усилие взаимодействия.

Щербина І. В., Білова О. В. ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВТИСКУВАННЯ ЖОРСТКОГО ШТАМПА В НАПІВБЕСКІНЧЕННИЙ ОРТОТРОПНИЙ КІЛЬЦЕВИЙ СЕКТОР І В НАПІВСМУГУ / Національна металургійна академія України

Сформульована і розв'язана нова задача про контактну взаємодію ортотропної пластини з циліндричною анізотропією і жорсткого штампу. Отримано розподіл напружень під штампом, а також напруження у пластині. Проведений порівняльний аналіз отриманих результатів зі знайденим раніше розв'язком подібної задачі для ортотропної напівсмуги.

Ключові слова: метод збурення, малий параметр, ортотропна пластина, криволінійна анізотропія, передача навантаження, контактне зусилля взаємодії.

Scherbina I., Belova O. COMPARISON OF RESULTS OF DECISION OF TASKS ABOUT PRESSING OF HARD STAMP IN SEMIINDEFINITE ORTHOTROPIC CIRCULAR SECTOR AND IN A SEMISTRIP/ the National metallurgical academy of Ukraine

Now special interest is called with constructions from modern composite materials. Problems of contact of bodies of such materials define processes of durability and longevity of buildings. Anisotropy of a material of constructions leads to serious difficulties of mathematical character. However for a wide class of constructions of performance of anisotropy of the elastic environment can be used as parameters of asymptotic integration.

In the given article solved the problem about impression of a hard stamp in orthotropic a plate with cylindrical anisotropy. Distribution of efforts in a plate and under a stamp is received.

For the decision of a problem the perturbation method offered in operations by L.I. Manevich and A.V. Pavlenko is used. According to such approach the asymptotic analysis of the equations of the theory of elasticity for orthotropic bodies is executed with use of the parameters describing anisotropy. At such approach the intense-deformed condition (VAT) is split on two components, and each of them is at the sequential decision of boundary value problems of a potential theory. The decision of an initial problem is defined as superposition of the specified components.

In an environ of an angular point of a stamp character of a tension same, as well as for a half-plane, therefore for this case in operation is brought result of comparison of the known decision received by an asymptotic method for a half-plane with L.A. Galin's decision. Results of comparison of direct stresses under a stamp for ring semi-infinite sector and orthotropic semi stripe are reduced. For such problem every possible passage to the limit are lead. In zero approximation the decision of a problem Galin turns out. Influence of abrasion on pressure under a stamp and on character of feature is considered from the third approximation. It is established, that suitable near to angular points of a stamp the asymptotic decision coincides with the exact decision of L.A. Galin spread decomposed in series. The account of first two approximations gives good approximation of the exact decision and specifies character of feature near to an angular point of a stamp.

Key words: perturbation method, small parameter, orthotropic plate, curvilinear anisotropy, transmission of loading, contact effort of cooperation.

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении длительного времени поиск подходов к решению контактных задач для тел с криволинейной анизотропией является актуальным, так как подобные задачи имеют обширную область применения. Анизотропия упругой среды обычно приводит к существенным трудностям при решении краевых задач [1]. Однако для широкого класса конструкций характеристики анизотропии упругой среды могут быть использованы в качестве параметров асимптотического интегрирования [2]. Одним из наиболее важных и хорошо разработанных к настоящему времени разделов теории упругости, где достижения науки особенно велики, является плоская задача теории упругости. Успех в разработке плоских задач, в частности, контактных, объясняется привлечением к их рассмотрению теории аналитических функций комплексного переменного. Основополагающие результаты в этом направлении представлены в работе [3].

Метод малого параметра нашел широкое применение в различных разделах механики, физики, математики, а именно таких, как небесная механика, теория колебаний, устойчивость движения.

Относительно недавно этот метод стал использоваться для решения краевых задач деформируемых тел со сложными физико-механическими свойствами [4].

К недостаткам традиционных численных методов расчета, используемых многими авторами, можно отнести в большинстве случаев отсутствие универсального подхода при решении конкретных задач (например, при использовании метода конформных отображений), большой объем вычислительных операций (решение с помощью уточненных теорий изгиба), большую размерность разрешающей системы уравнений (метод конечных элементов, метод конечных разностей) [5]. Попытки построения более общих алгоритмов решения такого рода задач приводят, как правило, к наложению друг на друга ряда итерационных процедур. В этом случае вычислительная схема задачи становится чрезвычайно громоздкой, что отражается на сходимости процесса решения и затратах машинного времени.

Поэтому поиск простых и эффективных методов решения контактных задач с учетом сложной геометрии, физических свойств современных материалов, условий нагружения и характера деформирования по-прежнему остается актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Цель данного исследования – решение новой плоской контактной задачи теории упругости аналитическим методом и сравнение полученных результатов с аналогичными задачами. Остановимся более подробно на результатах решения задачи о вдавливании жесткого штампа в ортотропную пластину с цилиндрической анизотропией.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть упругая пластина ($R_0 \leq r \leq \infty$; $-\gamma \leq \theta \leq \gamma$) закреплена по кромкам $\theta = \pm\gamma$ (рис. 1). На границу $r = R_0$ действует жесткий штамп на участке $-\lambda \leq \theta \leq \lambda$ с основанием, совпадающим с границей $r = R_0$. Штамп нагружен нормальным усилием P_0 и касательным Q_0 . При этом между штампом и пластиной учитывается трение, подчиняющееся закону Кулона (рассматривается состояние предельного равновесия штампа). На бесконечности ($r \rightarrow \infty$) перемещения и деформации равны нулю. Пластина толщины t работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Материал пластины является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами r, θ . Требуется найти распределение напряжений под штампом и в пластине.

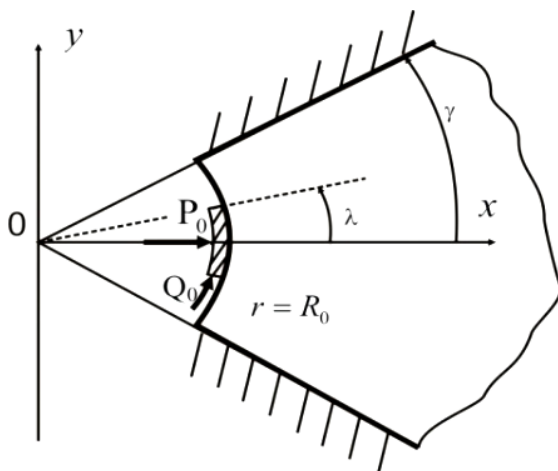


Рис. 1

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения был применен асимптотический метод, позволяющий сводить краевую задачу теории упругости к последовательности краевых задач теории потенциала [1].

Если вместо полярных координат r, θ ввести безразмерные координаты ξ, η соотношениями $r = R_0 e^\xi$, $\theta = \eta$, то поставленная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия пластины в перемещениях

$$B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0,$$

$$G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= B_1 (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\xi + \vartheta_2 (v_\eta + u)) = 0, \\ \tau &= G (R_0 e^\xi)^{-1} (u_\eta + v_\xi - v) = 0 \quad (\xi = 0, \lambda \leq |\eta| \leq \gamma), \\ u &= v = 0 \quad (\eta = \pm \gamma), \\ u &= C_0, \quad \tau = \rho \sigma_1 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda).\end{aligned}$$

На бесконечности перемещения и напряжения равны нулю. Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0, \eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0, \eta) d\eta + Q_0 = 0.$$

Здесь $u = u_r$, $v = u_\theta$ – компоненты вектора перемещений пластины; $B_1 = \frac{E_1 t}{1 - \vartheta_1 \vartheta_2}$, $B_2 = \frac{E_2 t}{1 - \vartheta_1 \vartheta_2}$ – жесткости пластины на растяжение-сжатие; E_1, E_2 – модули упругости вдоль главных направлений; $G = G_* t$ – жесткость пластины на сдвиг; G_* – модуль сдвига; σ_1, τ – нормальное (в направлении координаты ξ) и касательное усилия в пластине; $m = 1 + \vartheta_2 B_1 / G = 1 + \vartheta_1 B_2 / G$; ϑ_1, ϑ_2 – коэффициенты Пуассона материала пластины ($\vartheta_1 B_2 = \vartheta_2 B_1$), ρ – коэффициент трения ($\rho < 1$); индексы ξ, η обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Определение напряженного состояния первого типа (медленно изменяющегося в направлении координаты ξ) в первом приближении [6] сводится к интегрированию уравнения

$$B_1 u_{\xi\xi}^{1,0} + G u_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}u_{\xi}^{1,0} &= 0 \quad (\xi = 0, \lambda < |\eta| < \gamma), \\ u^{1,0} &= C_0 \quad (\xi = 0, |\eta| < \lambda), \\ u^{1,0} &= 0 \quad (\eta = \pm \gamma).\end{aligned} \quad (2)$$

На бесконечности выполняются нулевые условия по производным искомой функции. Так как при $\eta = \pm \gamma$ компонента вектора перемещений u равна нулю, то и $u_{\xi}^{1,0}$ при $\eta = \pm \gamma$ также будет равна нулю. Перемещение $v^{1,0}$, соответствующее данному напряженному состоянию, находится из соотношения:

$$v_{\eta}^{1,0} + u^{1,0} = 0. \quad (3)$$

Введем новые независимые переменные $x_1 = (G/B_1)^{1/2} \xi$, $y_1 = \eta$. Тогда краевая задача (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned}u_{x_1 x_1}^{1,0} + u_{y_1 y_1}^{1,0} &= 0, \\ u_{x_1}^{1,0} &= 0 \quad (x_1 = 0, \lambda < |y_1| < \gamma), \\ u^{1,0} &= C_0 \quad (x_1 = 0, |y_1| < \lambda), \\ u_{x_1}^{1,0} &= 0 \quad (y_1 = \pm \gamma),\end{aligned} \quad (4)$$

на бесконечности производные обращаются в нуль.

Таким образом, требуется найти аналитическую в полуполосе $0 \leq x_1 < \infty$, $|y_1| \leq \gamma$ функцию $u^{1,0}$ по заданным граничным условиям (5). Эта задача решается отображением полуполосы из плоскости z_1 ($z_1 = y_1 + i x_1$) в верхнюю полуплоскость изображений ζ_1 ($\zeta_1 = \eta_1 + i \xi_1$) [7]. Указанное отображение можно выполнять при помощи преобразования Шварца-Кристоффеля. Задача об определении аналитической в полуплоскости функции, когда на некоторых интервалах границы известна

действительная, а на других мнимая часть искомой функции, решается при помощи формулы Келдыша-Седова. Так как из условий (5) следует, что на границе полуплоскости ζ_1 в интервале $|\eta_1| < l_1$ действительная часть функции φ_1^0 равна нулю, а на остальной части границы мнимая ее часть равна нулю, то решение для функции φ_1^0 во всей полуплоскости имеет вид

$$\varphi_1^0(\zeta_1) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - l_1^2}}, \quad (6)$$

где A – действительная постоянная; выбирается та ветвь корня, которая положительна при положительных значениях аргумента.

$$A = -\frac{P_0 R_0 \pi}{4\gamma \sqrt{GB_1} K(l_1)},$$

где $l_1 = \sin \frac{\pi \lambda}{2\gamma}$, $K(l_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Давление под штампом в первом приближении выражается следующим образом [8]:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4\gamma K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad (7)$$

а функция $u_{y_1}^{1,0}$ при $\xi_1 = 0$, $|\eta_1| > l_1$ находится по формуле

$$u_{y_1}^{1,0} = A(\eta_1^2 - l_1^2)^{-1/2}.$$

Составляющая $v^{1,0}$ компоненты вектора перемещений v^0 , соответствующая данному напряженному состоянию, в этом приближении определяется из уравнения (3), причем функция $u^{1,0}$ находится из соотношений для $u_{x_1}^{1,0}$ и $u_{y_1}^{1,0}$ соответственно при $|\zeta_1| < l_1$ и $|\zeta_1| > l_1$ с учетом, что при $y_1 = \eta = \pm \gamma$ $u^{1,0} = 0$.

В частности, при $x_1 = 0$ ($\xi = 0$), $|y_1| = |\eta| \leq \lambda$ $u^{1,0} = C_0 = (2\gamma/\pi) A \ln(l_1) [\cos(\pi\lambda/2\gamma)]^{-1}$. Эта величина определяет осадку штампа. При $x_1 = 0$ и, достаточно близких к угловой точке штампа на свободной границе ($\lambda \leq |y_1| \leq \gamma$), перемещение $u^{1,0}$ находится по формуле

$$u^{1,0} = \frac{2\gamma}{\pi} A \frac{\ln\left(\sin(\pi y_1/2\gamma) + \sqrt{(\sin(\pi y_1/2\gamma))^2 - l_1^2}\right)}{\cos(\pi y_1/2\gamma)}. \quad (8)$$

Давление под штампом определяется формулой (7), а касательное напряжение τ под ним имеет вид $\tau^0 = \rho \sigma_1^0$. При $\rho = 0$ получим решение для гладкого штампа. Так как $u_{\xi}^{2,0} = 0$, то граничные условия для определения функций $u^{1,1}$ и $v^{2,1}$ во втором приближении оказываются нулевыми. Соответственно, нулевыми являются функции $v^{1,1}$ и $u^{2,1}$. Поэтому и решения являются нулевыми, то есть второе приближение не вносит поправки в первое приближение (разложение решений ведется по целым степеням параметра ε) [1,2].

Влияние трения на давление под штампом сказывается лишь с третьего приближения. В этом случае возникает невязка по деформации u_{ξ} при $\xi = 0$, $l_1 < |\eta_1| < 1$, которая снимается при решении уравнения (1) для функции $u^{1,2}$. Граничные условия для определения $u^{1,2}$ при $\xi = 0$ будут $u_{\xi}^{1,2} = u_{\xi}^{1,0} - \mu v_{\eta}^{1,0}$ ($l_1 < |\eta_1| < 1$) $u_{\eta}^{1,2} = 0$ ($|\eta| < l_1$). На бесконечности все функции обращаются в нуль. Так как $u_{\xi}^{1,0} = 0$ при $|\eta| > l_1$, то $u_{\xi}^{1,2} = -\mu v_{\eta}^{1,0} = \mu u^{1,0}$ ($\xi = 0$, $l_1 < |\eta_1| < 1$). Здесь $\mu = \mathcal{G}_1 B_2 / G = \mathcal{G}_2 B_1 / G$ и учтена связь между $v_{\eta}^{1,0}$ и $u^{1,0}$, обусловленная равенством (3).

Таким образом, невязка по нормальным напряжениям σ_1 при $\xi = 0$, $l_1 < |\eta_1| < 1$ вызвана лишь учетом коэффициента Пуассона.

Поскольку в окрестности угловой точки штампа характер напряженного состояния такой же, как и для полуплоскости, то в этом случае имеется возможность сравнить известное решение для полуплоскости с решением Л.А. Галина [9] непосредственно или, например, сравнить с решением похожей задачи для

полуполосы, для которой уже были проведены всевозможные предельные переходы, при которых в нулевом приближении получалось решение задачи Галина.

Итак, в таблице 1 приведены численные расчеты нормального напряжения под штампом в первом приближении при $l_1 = 0,5$.

Таблица 1 – Сравнение распределения нормальных напряжений под штампом для кольцевого полубесконечного сектора и полуполосы

t		0	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	0,99
σ^*	1)	1,09	1,11	1,21	1,33	1,43	2,03	23,26
	2)	1,186	1,203	1,258	1,369	1,59	2,141	26,536

- 1) асимптотическое решение для ортотропной полуполосы;
- 2) асимптотическое решение для ортотропного полубесконечного кольцевого сектора с криволинейной анизотропией.

ВЫВОДЫ

Из таблицы видно, что влияние трения на давление под штампом и на характер особенности учитывается с третьего приближения. Установлено, что пригодное вблизи угловых точек штампа асимптотическое решение совпадает с разложенным в ряд точным решением Л.А. Галина [9]. Учет первых двух приближений дает хорошую аппроксимацию точного решения и указывает на характер особенности вблизи угловой точки штампа ($\eta_1 = l_1$). Эта особенность имеет вид:

$$\sigma = -B \left(1 - \frac{\eta_1}{l_1} \right)^{-\frac{1}{2} + \theta}.$$

Для гладкого штампа особенность совпадает с точной. Полученное в исходной задаче решение [10] может быть «подправлено» вблизи особых точек при помощи «срачивания» с указанным особым решением. Известно, что с уменьшением значения угла γ точка «срачивания» приближается к границе области контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. — К. : Вища школа, 1982. — 152 с.
2. Павленко А. В. Передача нагрузки стрингером ортотропному круговому сектору с криволинейной анизотропией / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Вісник Донецького Національного Університету, серія А. — 2010. — № 1. — С. 51-55.
3. Острик В. И. Метод Виннера–Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. — К. : Наук. думка, 2006. — 328 с.
4. Якуба Дау. Классификация аналитических решений задач теории упругости, выявляющих особенности в напряженном состоянии деформируемых тел // Неделя науки 2002 : 62-я научно-техн. конф. студ. аспирантов и молодых ученых, 28-29 окт. 2002 г. — СПб : ПГУПС. — 2002. — Ч.1. — С. 85-86.
5. Кузьменко В. И. Компьютерное моделирование поведения упругопластических оснований сложной структуры / В. И. Кузьменко, Ю. Е. Власенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2008. — №12. — С. 113-123.
6. Павленко А. В. Применение асимптотического метода к решению плоских задач теории упругости / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // «Theoretical foundation of civil engineering – XX» Polish–Ukrainian Transaction, September, 2012. — Warsaw. — P. 251-256.
7. Bilova O. V. Asymptotic method for composite theory problems // Теорія і практика металургії. — № 4(87). — июль-август 2012. — С. 138-140.
8. Павленко А. В. Вдавливание жесткого штампа в ортотропную пластину с криволинейной анизотропией / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, Дніпропетровський національний університет. — 2012. — Вип. 13. — С. 320-327.
9. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. — М. : Наука, 1980. — 303 с.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. — М. : Наука, 1977. — 463с.

УДК

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»

Іваненко В. А., д.е.н., професор

Запорізький національний університет

До друку будуть прийматися лише наукові статті, де присутні такі необхідні елементи

(п. 3 Постанови президії ВАК України № 7 – 05 / 1 від 15 січня 2003 р.):

- **Постановка проблеми** у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
- **Аналіз останніх досліджень і публікацій**, в яких започатковано порушення даної проблеми і на які спирається автор.
- **Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми**, яким присвячується стаття.
- **Формулювання цілей** статті (постановка завдання).
- **Виклад основного матеріалу дослідження** з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
- **Висновки з даного дослідження і перспективи** подальших розвідок у даному напрямку.

1. МАКЕТ СТОРІНКИ

Для оригінал-макета використовується формат А4 з такими полями:

з усіх боків – 2 см.

Шрифт набору – Times New Roman.

У разі необхідності для шрифтових виділень у таблицях і рисунках дозволяється застосовувати шрифт Courier New (наприклад, для ілюстрації текстів програм для ЕОМ). Для стилістичного виділення фрагментів тексту слід вживати начертання *курсив*, **напівжирний**, *напівжирний курсив* зі збереженням гарнітури, розміру шрифту та інтервалу абзацу.

Гарнітури, розміри шрифтів та начертання:

- a) для УДК: Times New Roman, – 14 пт, усі літери прописні;
- b) для заголовку статті: Times New Roman, – 14 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- c) для підзаголовків: Times New Roman, – 12 пт, напівжирний, усі літери прописні;
- d) для прізвищ, ініціалів авторів, адреси електронної пошти: Times New Roman – 12 пт, усі строчні;
- e) для назв і адрес організацій: Times New Roman – 12 пт, курсив, усі строчні;
- f) для анотацій, виносок, посилань, підписів до рисунків та надписів над таблицями: Times New Roman – 10 пт;
- g) для ключових слів: Times New Roman – 10 пт, курсив;
- h) для основного тексту: Times New Roman – 12 пт, як у реченні.

Інтервал між абзацами – 6 пт, міжрядковий інтервал – одинарний.

2. ТИПОГРАФСЬКІ ПОГОДЖЕННЯ ТА СТИЛІ

УДК вказується в першому рядку сторінки і вирівнюється за лівим краєм. Заголовок статті набирається в наступному за УДК рядку і вирівнюється по центру. У третьому рядку з вирівнюванням по центру зазначаються прізвища, ініціали авторів. У наступному рядку розміщується інформація про назву та адресу організації, де працює (навчається) автор, яка також вирівнюється по центру. Четвертий рядок містить адресу електронної пошти авторів, розміщену по центру. Далі розташовується анотація (3-5 речень) і ключові слова мовою оригіналу та анотація українською або російською мовами (залежно від мови оригіналу). З наступного абзацу послідовно набираються і вирівнюються по центру заголовки статті англійською мовою, транслітеровані прізвища, ініціали авторів, назви і адреси організацій, які повинні бути подані англійською мовою, із зазначенням міста і країни, без назви вулиці, яка подається транслітерацією. З наступного рядка розміщується розширена (обсягом не менше 3,5 тис. знаків) анотація із ключовими словами англійською мовою. Після анотацій з абзацу викладається основний текст статті.

Заголовки наукових статей повинні бути інформативними та містити тільки загальноприйняті скорочення. У перекладі заголовків статей англійською мовою не повинно бути жодних транслітерацій, окрім неперекладних назв власних імен, приладів та інших об'єктів, що мають власні назви; також не використовується неперекладний сленг. Це стосується також анотацій і ключових слів.

Початок абзацу основного тексту виділяється збільшеним інтервалом між абзацами і **не виділяється відступом або пустим рядком**.

Ілюстрації мають бути оригінальними рисунками або фотографіями. Фотографії скануються у 256 градаціях сірого. Ілюстрації розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні бути підписані та послідовно пронумеровані арабськими цифрами: Рис. 1, Рис. 2. Номер рисунка та підпис розміщуються безпосередньо під рисунком. Кожен рисунок та підпис до нього включаються до тексту публікації. Створення графічних об'єктів може здійснюватися будь-яким графічним редактором у форматі BMP файлів. Виконання рисунків засобами Microsoft Word здійснюється через використання команд панелі «Рисование». Підписи здійснюються командою «Надпись». Усі графічні компоненти рисунка і підписи об'єднуються командою «Группировать» (меню «Действия» на панелі «Рисование») і подаються у вигляді одного графічного об'єкта, прив'язаного до тексту з обтіканням «В тексте». Ілюстрації готують та масштабують так, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір літер основного тексту статті більше, ніж на 50%.

Ілюстрації, так само як і підписи до них, вирівнюються на середину рядка (за виключенням невеликих рисунків – не більш 7 см, які можуть розташовуватися по декілька в ряд).

Таблиці розміщуються у відповідних місцях тексту статті (по можливості вгорі сторінки) і повинні містити назву та бути послідовно пронумерованими арабськими цифрами: Таблиця 1, Таблиця 2. Номер та назва таблиці розміщують над таблицями.

Посилання на літературні джерела послідовно нумеруються арабськими цифрами в порядку появи в тексті статті і зазначаються у квадратних дужках, де вказуються порядковий номер джерела та через кому конкретна сторінка [8, с.16]. Перелік літературних джерел мовою оригіналу подається в порядку їх нумерації після основного тексту статті з підзаголовком «ЛІТЕРАТУРА», який вирівнюється по центру. Список літератури оформлюється відповідно до ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання».

З наступного абзацу подається перелік літературних джерел латиницею з підзаголовком «REFERENCES», який вирівнюється по центру.

3. СТИЛІСТИЧНІ ПОГОДЖЕННЯ

- Не допускається закінчення сторінки одним або декількома пустими рядками, за винятком випадків, спричинених необхідністю дотримання попереднього пункту (висячі підзаголовки і початок абзацу) та кінця статті.
- Не допускається починати сторінку незакінченим рядком (переноси в останньому рядкові заборонені).
- Не дозволяється підкреслювання в заголовках, підписах і надписах.
- Слід дотримуватися правила про мінімальні зміни в шрифтовому та стильовому оформленні сторінки для того, щоб максимально уникнути різноманітності макета і зберегти єдиний стиль збірника.
- Не допускається часте використання виносок (виноска повинна розглядатися як виняток і вживатися тільки у випадку дійсної необхідності).
- Ілюстрації мають бути підготовані та масштабовані таким чином, щоб розміри букв тексту на ілюстраціях не перевищували розмір букв основного тексту статті більш ніж на 50%.
- Сторінки тексту статті слід пронумерувати.
- Диск треба підписати, вказавши прізвище, ініціали автора, імена файлів.
- На диску повинно бути **два файли**:
 - ✓ **перший** – із текстом статті та анотацій з ключовими словами,
 - ✓ **другий** – із відомостями про авторів (прізвище, ім'я, по батькові; посада; вчений ступінь; учене звання; місце роботи або навчання; адреса електронної пошти; домашня адреса; номери контактних телефонів).

4. ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ СТАТТІ АВТОРУ НЕОБХІДНО ПОДАТИ ДО РЕДАКЦІЇ ЗБІРНИКА:

1. Роздрукований текст статті з анотаціями та ключовими словами.
2. Відомості про авторів.
3. Витяг з протоколу засідання кафедри або факультету.
4. Зовнішню рецензію.
5. Диск із текстом статті, анотацій, ключовими словами та відомостями про авторів.

Адреса редакції: Україна, 69600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66

Довідки за телефонами:

(061) 228-76-28 – відповідальний за випуск (технічний редактор)

(061) 289-12-26 – редакція збірника (IV корпус, кімн. 323)

Адреса електронної пошти: kpmf.mf@znu.edu.ua

Збірник наукових праць

Вісник Запорізького національного університету
Фізико-математичні науки
№ 2, 2013

Технічний редактор – *Є.В. Ткаченко*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані у видавництві
Запорізького національного університету
тел. (061) 228-75-47

Підписано до друку 20.05.14. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 14

Замовлення № 179. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2952 від 30.08.2007