

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС  
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

## СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 3

2019

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

#### Головний редактор

**М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ**, акад. НАН України

#### Заступник головного редактора

**Н.Д. ПАНКРАТОВА**, чл.-кор. НАН України

#### Члени редколегії:

**П.І. АНДОН**, акад. НАН України

**А.В. АНІСІМОВ**, чл.-кор. НАН України

**Г.-В. ВЕБЕР**, проф., Турція

**О.Д. ГВІШАНИ**, акад. РАН, Росія

**П.О. КАСЬЯНОВ**, проф., д.ф.-м.н.,  
Україна

**В.М. КУНЦЕВИЧ**, акад. НАН України

**О.А. ПАВЛОВ**, проф., д.т.н., Україна

**Л. САКАЛАУСКАС**, проф., Литва

**А.М. САЛЕМ**, проф., Єгипет

**І.В. СЕРГІЄНКО**, акад. НАН України

**Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ**, проф., Румунія

**Е.О. ФАЙНБЕРГ**, проф., США

**Я.С. ЯЦКІВ**, акад. НАН України

### АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,  
просп. Перемоги, 37, корп. 35,  
ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського  
Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44  
E-mail: journal.iasa@gmail.com  
<http://journal.iasa.kpi.ua>

### У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримання прийняття рішень**

• **Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE  
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX  
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»  
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE  
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

## SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 3

2019

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

### EDITORIAL BOARD:

#### The editor – in – chief

**M.Z. ZGUROVSKY,** Academician of  
NASU

#### Deputy editor – in – chief

**N.D. PANKRATOVA,** Correspondent  
member of NASU

#### Associate editors:

**F.I. ANDON,** Academician of  
NASU

**A.V. ANISIMOV,** Correspondent  
member of NASU

**E.A. FEINBERG,** Prof., USA

**A.D. GVISHIANI,** Academician of RAS,

**P.O. KASYANOV,** Prof., Ukraine

**V.M. KUNTHEVICH,** Academician of NASU

**A.A. PAVLOV,** Prof., Ukraine

**L. SAKALAUŠKAS,** Prof., Lithuania

**A.M. SALEM,** Prof., Egypt

**I.V. SERGIENKO,** Academician of NASU

**H.-N. TEODORESKU,** Prof., Romania

**G.-W. WEBER,** Prof., Turkey

**Ya.S. YATSKIV,** Academician of NASU

### THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,  
av. Peremogy, 37, building 35,  
Institute for Applied System Analysis  
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute  
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**  
E-mail: [journal.iasa@gmail.com](mailto:journal.iasa@gmail.com)  
<http://journal.iasa.kpi.ua>

### In the issue:

- **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**
- **Theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support**
- **Methods of optimization, optimum control and theory of games**
- **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

## Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

### «СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

#### Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

**Головний редактор журналу** — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНІТІ РАН.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**

Редактор **Р.М. Шульженко**

Молодший редактор **Л.О. Тарин**

Комп'ютерна верстка, дизайн **А.А. Патіоха**

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 23234–13074 ПР від 22.03.2018 р.

---

Підписано до друку 07.10.2019. Формат 70x108 1/16. Папір офс. Гарнітура Times.

Спосіб друку – різнографічний. Ум. друк. арк. 13.20. Обл.-вид. арк. 26.07. Наклад 136 пр. Зам. № 19-092

---

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію: ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського, вул. Політехнічна, 14, корп. 15

м. Київ, 03056. Тел. (044) 204-81-78

Наклад 136 пр. Зам. №

## **Dear Readers!**

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

### **«SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES».**

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

#### **The main thematic sections of the Journal are the following:**

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

**The editor-in-chief of the Journal** is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

# СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

3 • 2019

## ЗМІСТ

### ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

*Matsuki Y., Bidiuk P.I.* Calculating energy density and spin momentum density of Moon's gravitational waves in rectilinear coordinates (Part-4) ..... 7

*Кузнєцова Н.В., Грушко Я.В.* Дослідження і прогнозування успішності стартапів платформи kickstarter ..... 18

### ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

*Чапалюк Б.В., Зайченко Ю.П.* Використання рекурентних нейронних мереж для автоматичної діагностики раку легенів ..... 33

*Kolyada Vladimir P.* To the theory of systems: a brief look at the underlying of notions in the field of conceptual content ..... 41

*Криваковська Р.В.* Система підтримання прийняття рішень для оцінювання стану повітря за неточних вхідних даних ..... 55

### МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

*Кравець П.О.* Ігрові стратегії прийняття рішень в ієрархічних системах. I. Математична модель стохастичної гри ..... 63

*Полуциганова В.І., Смирнов С.А.* Методологія побудови основних метрик Q-аналізу та їх застосування ..... 76

### МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

*Романенко В.Д., Милявский Ю.Л.* Метод автоматизации управления в когнитивных картах на основе синтеза приращений весовых коэффициентов и координат вершин ..... 89

*Зак Ю.А.* Алгоритмы приближенного решения многостадийных Flow-Shop-Problem ..... 100

*Кирилюк В.С., Левчук О.І., Гавриленко О.В., Сукач М.К.* Математичне моделювання напруженого стану ортотропного п'єзоелектричного матеріалу зі сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском ..... 110

*Бондаренко В.Г., Маркевич И.С.* Сходимость итераций в формуле Троттера–Далецкого для нелинейного возмущения ..... 118

*Спекторский И.Я.* Функциональные последовательности с нечетким аргументом: сходимость множеств уровня ..... 126

Реферати ..... 141

Відомості про авторів ..... 149

# SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

3 • 2019

## CONTENT

### PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

- Matsuki Y., Bidyuk P.I.* Calculating energy density and spin momentum density of Moon's gravitational waves in rectilinear coordinates ..... 7
- Kuznietsova N.V., Grushko Ya.V.* Research and prediction of the startups' success on kickstarter platform ..... 18

### THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING SUPPORT

- Chapaliuk B.V., Zaychenko Yu.P.* Recurrent neural network usage for computer-aided lung cancer detection system ..... 33
- Kolyada Vladimir P.* To the theory of systems: a brief look at the underlying of notions in the field of conceptual content ..... 41
- Kryvakovska R.V.* Decision support system for assessing the state of atmospheric air under inaccurate input data ..... 55

### METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM CONTROL AND THEORY OF GAMES

- Kravets P.O.* Game strategies for decision making in hierarchical systems. I. Mathematical model of stochastic game ..... 63
- Polutsyhanova V.I., Smirnov S.A.* Methodology for building the basic metrics of  $Q$ -analysis and their application ..... 76

### MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

- Romanenko V.D., Milyavsky Yu.L.* Control automation method in cognitive maps based on the synthesis of increments of weighting coefficients and nodes coordinates ..... 89
- Zack Yu.O.* Algorithms for approximate multi-stage Flow-Shop-Problem solution .... 100
- Kirilyuk V.S., Levchuk O.I., Gavrilenko O.V., Sukach M.K.* Mathematical modeling of the stress state of an orthotropic piezoelectric material with a spheroidal cavity under internal pressure ..... 110
- Bondarenko V.G., Markevych I.S.* On the convergence of iterations in the Trotter–Daletsky formula for nonlinear perturbation ..... 118
- Spectorsky I.Ya.* Functional sequences with fuzzy argument: convergence of level sets ..... 126
- References ..... 141
- Information about the authors ..... 149

**CALCULATING ENERGY DENSITY AND SPIN MOMENTUM  
DENSITY OF MOON'S GRAVITATIONAL WAVES  
IN RECTILINEAR COORDINATES**

**Y. MATSUKI, P.I. BIDYUK**

**Abstract.** In this research the energy density was calculated and the spin momentum density of Moon's gravitational waves in the rectilinear coordinates' system of Moon's gravity and Earth's global temperature. At first, we assumed an action principle that combines the gravitational field and gravitational waves, which formulate a closed system, together with Earth's global temperature. And, then, we calculated the energy densities of those energy field and waves, which are calculated as their variances in the rectilinear coordinates, also to calculate their coefficients and standard errors of the calculated coefficients. The calculated results are consistent with the findings of our previous research [1], which shows the negative contribution of gravitational waves to Earth's global temperature, while the gravitational field positively contributes to the global temperature. We also calculated spin momentum of Moon's gravitational waves in the system of rectilinear coordinates.

**Key words:** Moon, Earth, global temperature, gravitational field, gravitational waves, rectilinear coordinates, energy density, spin momentum density.

**INTRODUCTION**

Our previous research [1] showed a relation between Moon's gravitational field and gravitational waves. After that report we continued investigating the characters of gravitational waves, using the same data set, but this time with the theories of relativity and quantum mechanics.

Our mathematical method starts from an action principle, which assumes that there is an action integral that describes the motion of the waves, which must be stationary to be consistent with the law of conservation of energy within the boundary of a closed space. We also assume the rectilinear coordinates of the flat-space for time and space by tensors that represent the energy field as well as the pseudo-tensors that represent the flow of energy.

Dirac [2, 3] predicted that the pseudo-tensor can be built in the coordinates of the tensors' field only when the motion of the gravitational waves, which is expressed by the pseudo-tensors, occurs in one direction. In addition, he also created a basic equation that describes the gravitational field and the other energy

flows, such as motion of the gravitational waves, and they can be added together linearly, which agrees with the theory of the special relativity [2].

And then, upon the theory [2, 3], we set up an equation to describe the gravitational waves in the gravitational field. Then we solved the equation to calculate the energy densities and coefficients of the gravitational field, and the gravitational waves toward Earth's global temperature in the space between Moon and Earth. After that we also investigate the character of the gravitational waves by calculating the momentum density of the spin of the gravitational waves.

**DATA**

Table 1 shows the descriptive statistics of the data, from 1987 till 2009, of the global temperature (increased degree Celsius since 1978) [4], the distance between Moon and Earth ( $r$  : kilometers, km) [5], and calculated  $\frac{1}{r^2}$  ((kilometers)<sup>-2</sup>, km<sup>-2</sup>), which we use for our calculations.

**Table 1.** Descriptive statistics

Variable	Global temperature (°C) *	Distance between Moon and Earth (r : km)	$\frac{1}{r^2}$ ((km) <sup>-2</sup> )
Mean	0,29130	$3,62618 \cdot 10^5$	$7,60509 \cdot 10^{-12}$
Standard deviation	0,12125	$5,98411 \cdot 10^2$	$2,51097 \cdot 10^{-14}$
Minimum	0,10000	$3,61583 \cdot 10^5$	$7,56999 \cdot 10^{-12}$
Maximum	0,43000	$3,63483 \cdot 10^5$	$7,64865 \cdot 10^{-12}$
Skewness	-0,21063	-0,15249	0,15787
Kurtosis	1,29401	1,67498	1,67879
Valid number of observations	23	23	23

\* Increased degree Celsius since 1978

**CALCULATIONS**

**Gravitational waves in gravitational field**

Dirac [2] created the basic equation for a quantum theory of the Born-Infeld electro-dynamics in the rectilinear coordinates, which agrees with the special relativity theory. It defines the action integral of the motions of particles in the electromagnetic field:  $I = \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} d^4x$ , where,  $\delta I = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})}$  is the energy density of the electro-magnetic field that provides the action principle of a particle in this energy field,  $g_{\mu\nu}$  are fundamental tensors,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$



$F_{\mu\nu}$  are tensors that describe the field quantities of the electro-magnetic field, which are made by two vectors,  $x_\mu$  and  $x_\nu$ , while  $\mu = 0, 1, 2, 3$  and  $\nu = 0, 1, 2, 3$ , where each suffix represents each of 4 coordinates of the flat-space. We use this mathematical formula in order to calculate the energy density of the gravitational waves in the gravitational field, and have made  $\delta I = \sqrt{Y - \left\{ ax^0 + bx^3 + c \frac{1}{r^2} \right\}}$ , where  $a$ ,  $b$ , and  $c$  are coefficients that are to be constants;  $Y$  is Earth's global temperature as we assume that it is influenced by the motion of gravitational waves;  $x^0$  is the metric that refers the time-coordinate of the flat-space, which is made of a time vector (=1), where it is constant. (Because in the theory of the special relativity, nothing can exceed the speed of light; therefore, nothing moves and it is =1.) And  $x^3$  is the metric in the flat-space, which we consider as only one direction with a distance  $r$  between Moon and Earth.

For calculating the energy density of the gravitational waves, we assume that it is  $c \frac{1}{r^2}$ ; because, we assume that the solutions of  $g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma, \mu\nu} = 0$  are the gravitational waves traveling with the velocity of light, which satisfies d'Alambert equation [3]. Here,  $g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  is made of contravariant vectors, and

$g_{\mu\nu}$  are made of their covariant vectors, while  $g_{\rho\sigma, \mu\nu} = \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ , where  $x^\mu, x^\nu$  are the contravariant vectors that are described in the rectilinear coordinates of the flat-space. Here,  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  are the suffixes that indicate the coordinates of time and space. Because of  $g_{\rho\sigma, \mu\nu} = \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$ , the gravitational waves must have dimension of  $\frac{1}{r^2}$ . Now we set  $H^2 = \left\{ Y - \left( a - br + c \frac{1}{r^2} \right) \right\}^2$ .

Now calculate the coefficients  $a$ ,  $b$  and  $c$ , with the constraints:  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial b} = 0$ , and  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial c} = 0$ , And then the equations are transformed to:  $\frac{\partial}{\partial a} E(H^2) = -2E(H) = 0$ , with  $E(H) = 0$ ;  $\frac{\partial}{\partial b} E(H^2) = -2E(Hr) = 0$ , with  $E(Hr) = 0$ ;  $\frac{\partial}{\partial c} E\left(H \frac{1}{r^2}\right) = 0$ , then  $E\left(H \frac{1}{r^2}\right) = 0$ , where  $E(H^2)$  is the expected value of  $H^2$  and where  $L = \left( a - br + c \frac{1}{r^2} \right)$  is Lagrangean. (Note: here in this Lagrangean, the minus-sign of the space coordinate appears as the minus-sign of the coefficient b, because in the special theory of relativity, the geodesic of the

time and space is described by the expression:  $(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ , where  $dx^0$  is a displacement of the time-vector, and  $dx^1$ ,  $dx^2$  and  $dx^3$  are displacements of the space-vectors). And then we can calculate these coefficients:  $a$ ,  $b$  and  $c$ , algebraically as follows: at first, we make a matrix  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ , where  $x_1 = 1$  (time-coordinate),  $x_2 = r$  (space-coordinate, which is a distance between Moon and Earth), and  $x_3 = \frac{1}{r^2}$ . Here, the above mentioned constraints,  $E(H) = 0$ ,  $E(Hr) = 0$  and  $E\left(H \frac{1}{r^2}\right) = 0$  are generally described by the matrices  $X^T H = 0$ , then:

$$Q = X^T X = \begin{bmatrix} 23,00000 & -8,34022 \cdot 10^6 & 1,74917 \cdot 10^{-10} \\ -8,34022e \cdot 10^6 & 3,02432 \cdot 10^{12} & -6,34278 \cdot 10^{-5} \\ 1,74917 \cdot 10^{-10} & -6,34278 \cdot 10^{-5} & 1,33027 \cdot 10^{-21} \end{bmatrix},$$

where  $X^T$  is the transposed matrix of  $X$ ;  $A = Q^{-1} X^T$ , where  $Q^{-1}$  is the inverse matrix (reciprocal matrix) of  $Q$ ;  $\beta = AY$ , and where  $\beta$  is the vector of three coefficients,  $a$ ,  $b$  and  $c$ ;  $N = XA$ ;  $M = I - N$ , where  $I$  is a unity matrix, in which all the diagonal elements are 1, and non-diagonal elements are 0;  $e = MY$ ;  $\Sigma = e'eQ^{-1}/(n-k)$ , where  $\Sigma$  is the matrix that contains variances and covariances of the variables;  $e'$  is the transposed vector of  $e$ ;  $n$  is the number of data (in this analysis 23); and  $k$  is the degree of freedom (number of variables, in this analysis  $k = 3$ ).

The results of the calculations are as follows:

$$\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,72334 \cdot 10^3 \\ 1,05217 \cdot 10^{-2} \\ -2,50844 \cdot 10^{14} \end{bmatrix};$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1,26538 \cdot 10^8 & 2,32669 \cdot 10^2 & -5,54473 \cdot 10^{18} \\ 2,32669 \cdot 10^2 & 4,27814 \cdot 10^{-4} & -1,01952 \cdot 10^{13} \\ -5,54473 \cdot 10^{18} & -1,01952 \cdot 10^{13} & 2,42964 \cdot 10^{29} \end{bmatrix}.$$

Standard errors of the coefficient vector

$$\sigma_b = \begin{bmatrix} \sqrt{1,26538 \cdot 10^8} \\ \sqrt{4,27814 \cdot 10^{-4}} \\ \sqrt{2,42964 \cdot 10^{29}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,12489 \cdot 10^4 \\ 2,06837 \cdot 10^{-2} \\ 4,92914 \cdot 10^{14} \end{bmatrix}.$$

### Spin momentum density of gravitational waves

From the above calculations, we found that the energy of gravitational waves has negative coefficient,  $c = -2,50844 \cdot 10^{14}$  to Earth's global temperature, while the coefficient of the gravitational field has positive coefficient,  $b = 1,05217 \cdot 10^{-2}$ .

It means that the flow of the gravitational waves doesn't increase the potential energy of this system between Moon and Earth. Then we investigated the character of the gravitational waves, assuming that the vectors of the coordinates formulate the motion of the waves, with the theory made by Dirac [3] upon the equation of the motion of the gravitational waves,  $g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0$ .

At first,  $g_{\mu\nu,\sigma} = u_{\mu\nu} l_{\sigma}$ , while  $g_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}$ , where  $x^{\sigma}$  are the contravariant vectors that describe the coordinates of time and space, and  $\mu, \nu, \sigma$  are the suffixes that indicate those coordinates; while we analyze only one direction of the space,  $\mu, \nu, \sigma = 0, \text{ or } 3$ , where 0 is for time, and 3 is for one direction of the space. Also, we put  $u_{\mu\nu} u^{\nu\mu} = u_{\mu}^{\mu} = u$ , where  $u^{\mu\nu}$  are contravariant two-vector tensors and  $u_{\mu\nu}$  are covariant two-vector tensors, and  $u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}$ ; here  $l_{\sigma}$  are constants, which satisfy  $g^{\rho\sigma} l_{\rho} l_{\sigma} = 0$ . Then it was assumed that the gravitational waves are traveling in the empty space where only the gravitational field exists, and then this condition leads to  $g^{\mu\nu} u_{\mu\rho} l_{\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} u_{\mu\nu} l_{\rho} = \frac{1}{2} u l_{\rho}$ , and then we get  $u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = \frac{1}{2} u l_{\rho}$ .

Now, when  $\rho = 0$ , we have:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 u_0^{\nu} = u_0^0 l_0 + u_0^1 l_1 + u_0^2 l_2 + u_0^3 l_3 = u_0^0 + 0 + 0 - u_0^3 = \\ &= g^{00} u_{00} - g^{33} u_{03} = u_{00} - (-1) u_{03} = u_{00} + u_{03} = \frac{1}{2} u l_{\rho} = \frac{1}{2} u l_0 = \frac{1}{2} u, \end{aligned}$$

where  $l_0 = 1, l_1 = 0, l_2 = 0$  and  $l_3 = -1$ .

When  $\rho = 1$ , then

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 u_1^{\nu} = u_1^0 l_0 + u_1^1 l_1 + u_1^2 l_2 + u_1^3 l_3 = u_1^0 + 0 + 0 - u_1^3 = \\ &= g^{00} u_{10} - g^{33} u_{13} = u_{10} - (-1) u_{13} = u_{10} + u_{13} = \frac{1}{2} u l_1 = 0. \end{aligned}$$

When  $\rho = 2$ , we have:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 u_2^{\nu} = u_2^0 l_0 + u_2^1 l_1 + u_2^2 l_2 + u_2^3 l_3 = u_2^0 + 0 + 0 - u_2^3 = \\ &= g^{00} u_{20} - g^{33} u_{23} = u_{20} - (-1) u_{23} = u_{20} + u_{23} = \frac{1}{2} u l_2 = 0. \end{aligned}$$

When  $\rho = 3$ , then we have

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 u_3^{\nu} = u_3^0 l_0 + u_3^1 l_1 + u_3^2 l_2 + u_3^3 l_3 = u_3^0 + 0 + 0 - u_3^3 = \\ &= g^{00} u_{30} - g^{33} u_{33} = u_{30} - (-1) u_{33} = u_{30} + u_{33} = \frac{1}{2} u l_3 = -\frac{1}{2} u. \end{aligned}$$

Thus,

$$(u_{00} + u_{03}) - (u_{30} + u_{33}) = u_{00} + u_{03} - u_{30} - u_{33} = u_{00} - u_{33} = \frac{1}{2}u - \left(-\frac{1}{2}u\right) = u,$$

where  $u_{03} = u_{30}$ . Also,  $u_{11} = g_{11}u_1^1 l_1 = 0$ , and  $u_{22} = g_{22}u_2^2 l_2 = 0$ , therefore

$$u_{00} - u_{33} = u = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33}; \text{ and } u_{11} + u_{22} = 0.$$

Also,  $2u_{03} = u - 2u_{00} = (u_{00} - u_{33}) - 2u_{00} = -u_{00} - u_{33} = -(u_{00} + u_{33})$ , because  $u_{00} + u_{03} = \frac{1}{2}u$ .

Here,  $g^{00} = 1$ ,  $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ , and

$$g^{01} = g^{02} = g^{03} = g^{10} = g^{12} = g^{13} = g^{20} = g^{21} = g^{23} = g^{30} = g^{31} = g^{32} = 0.$$

On the other hand the general formula of the action integral for the waves moving in one direction is:

$$\int L d^4x = -\int \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (u_{\mu}^{\rho} l_{\sigma} + u_{\sigma}^{\rho} l_{\mu} - u_{\mu\sigma} l^{\rho}) (u_{\nu}^{\sigma} l_{\rho} + u_{\rho}^{\sigma} l_{\nu} - u_{\nu\rho} l^{\sigma}) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3,$$

where  $L$  is Lagrangean that describes the motion of the waves [3]. With the constraint,  $\delta L = 0$ , the general solution of the pseudo-tensor  $t_{\mu}^{\nu}$  that represents the spin momentum densities of the gravitational waves are:

$$16\pi t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} u^2) l_{\mu} l^{\nu},$$

where  $l_{\alpha}$  is one direction, in which the waves are moving in. Here,

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} u^2 &= u_{00} u^{00} + u_{11} u^{11} + u_{22} u^{22} + u_{33} u^{33} + 2u_{01} u^{01} + 2u_{02} u^{02} + \\ &+ 2u_{03} u^{03} + 2u_{12} u^{12} + 2u_{23} u^{23} + 2u_{31} u^{31} - \frac{1}{2} u^2 = \\ &= u_{00} g^{00} g^{00} u_{00} + u_{11} g^{11} g^{11} u_{11} + u_{22} g^{22} g^{22} u_{22} + u_{33} g^{33} g^{33} u_{33} + 2u_{01} g^{00} g^{11} u_{01} + \\ &+ 2u_{02} g^{00} g^{22} u_{02} + 2u_{03} g^{00} g^{33} u_{03} + 2u_{12} g^{11} g^{22} u_{12} + 2u_{23} g^{22} g^{33} u_{23} + \\ &+ 2u_{31} g^{33} g^{11} u_{31} - \frac{1}{2} u^2 = u_{00}^2 + u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 + (-1)2u_{01}^2 + (-1)2u_{02}^2 + \\ &+ (-1)2u_{03}^2 + 2u_{12}^2 + 2u_{23}^2 + 2u_{31}^2 - \frac{1}{2} (u_{00} - u_{33})^2 = u_{11}^2 + u_{22}^2 + 2u_{12}^2 = \\ &= \frac{1}{2} (u_{11} - u_{22})^2 + 2u_{12}^2; \end{aligned}$$

and here  $u^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} u_{\mu\nu}$ ,  $g^{00} = 1$ ,  $g^{11} = -1$ ,  $g^{22} = -1$ ,  $g^{33} = -1$ ,  $-2u_{03}^2 = -\frac{1}{2} (u_{00}^2 + 2u_{00}u_{33} + u_{33}^2)$ ,  $\frac{1}{2} (u_{00} - u_{33})^2 = \frac{1}{2} (u_{00}^2 - 2u_{00}u_{33} + u_{33}^2)$ ,

$u_{10}^2 = u_{01}^2 = u_{13}^2 = u_{31}^2$  because  $u_{10} + u_{13} = 0$ , and,  $u_{20}^2 = u_{02}^2 = u_{23}^2$  because  $u_{20} + u_{23} = 0$ , and from  $u_{11} + u_{22} = 0$ ,  $u_{22} = -u_{11}$ , and then  $u_{11}^2 + u_{22}^2 = u_{11}^2 + (-u_{11})^2 = 2u_{11}^2$ , and finally:  $(u_{11} - u_{22})^2 = (u_{11} - (-u_{11}))^2 =$ ,  $= (2u_{11})^2$  so  $u_{11}^2 + u_{22}^2 = 2u_{11}^2 = \frac{1}{2}(2u_{11})^2 = \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})^2$ .

And then the spin momentum density of the gravitational waves becomes of the form:

$$16\pi t_0^0 = \frac{1}{4} \{ (u_{11} - u_{22})^2 + u_{12}^2 \}, \text{ with } t_0^3 = t_0^0.$$

Now assume an infinitesimal rotation operator,  $R$ , in the plane of contravariant vectors  $x^1 x^2$ . If it is applied to any vector,  $A_1, A_2$ , it has the effect:  $RA_1 = A_2$ ,  $RA_2 = -A_1$ , and  $R^2 A_1 = -A_1$ , so  $iR$  must have the eigenvalues  $\pm 1$  when applied to the vector [3]; here,  $iR = \pm 1$ . So, the operator  $R$  makes anti-symmetric change of the vectors. When we apply this infinitesimal rotation operator,  $R$ , to  $u_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu$ , the rotations will occur as follows:

$$Ru_{11} = R(A_1 A_1) = (RA_1) A_1 + A_1 (RA_1) = A_2 A_1 + A_1 A_2 = u_{21} + u_{12} = 2u_{12},$$

where  $u_{21} = u_{12}$ ;

$$Ru_{12} = R(A_1 A_2) = (RA_1) A_2 + A_1 (RA_2) = A_2 A_2 + A_1 (-A_1) = u_{22} - u_{11};$$

$$Ru_{22} = R(A_2 A_2) = (RA_2) A_2 + A_2 (RA_2) = -A_1 A_2 + A_2 (-A_1) = -u_{12} - u_{21} = -2u_{12};$$

$$\begin{aligned} R(u_{11} + u_{22}) &= R(A_1 A_1 + A_2 A_2) = (RA_1) A_1 + A_1 (RA_1) + (RA_2) A_2 + A_2 (RA_2) = \\ &= A_2 A_1 + A_1 A_2 - A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0; \end{aligned}$$

$$R(u_{11} - u_{22}) = R(A_1 A_1 - A_2 A_2) = A_2 A_1 + A_1 A_2 + A_1 A_2 + A_2 A_1 = 4A_1 A_2 = 4u_{12};$$

$$\begin{aligned} R^2(u_{11} - u_{22}) &= R(R(u_{11} - u_{22})) = \\ &= R(Ru_{11} - Ru_{22}) = R(2u_{12} - (-2u_{12})) = 2Ru_{12} + 2Ru_{12} = \\ &= 2(u_{22} - u_{11}) + 2(u_{22} - u_{11}) = 4(u_{22} - u_{11}) = -4(u_{11} - u_{22}). \end{aligned}$$

Thus,  $u_{11} + u_{22}$  is invariant (constant), while  $iR$  has the eigenvalues  $\pm 2$  when applied to  $u_{11} - u_{22}$  or  $u_{12}$ . Therefore, the components of  $u_{\alpha\beta}$  that contribute to the momentum density of gravitational waves correspond to spin 2 [3].

Upon the above theory, it was calculated the spin momentum of the gravitational waves by assuming  $l_\sigma x^\sigma$  as coordinates of 4 dimensional flat-space (rectilinear coordinates),  $x_0, x_1, x_3, x_4$ , and then, we examined the parity of the  $u_{\mu\nu}$ , where each element of vector  $x_0 = 1$  (time-coordinate),  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  and  $x_3 = -r$ , and each of those are  $23 \times 1$  vector.

Now  $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ , and then we calculated the  $u_{\mu\nu}$  as shown below:

$$u_{\mu\nu} = XX = \begin{bmatrix} 23.0 & 0 & 0 & -8,34022 \cdot 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8,34022 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 3,02432 \cdot 10^{12} \end{bmatrix}.$$

We see that:  $u_{00} = 23$ ,  $u_{01} = u_{02} = u_{10} = u_{20} = u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{22} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = 0$ ,  $u_{30} = u_{03} = -8,34022 \cdot 10^6$ , and  $u_{33} = 3,02432 \cdot 10^{12}$ .

And then the rotation operator was applied,  $R$ , to  $u_{\mu\nu}$ , to see the following:

$$Ru_{11} = u_{21} + u_{12} = 0 + 0 = 2u_{12}, \quad Ru_{12} = u_{22} - u_{11} = 0, \quad Ru_{22} = -u_{12} - u_{21} = -2u_{12}.$$

So,  $R(u_{11} + u_{22}) = 0$ ,  $R(u_{11} - u_{22}) = 4u_{12}$ , and  $R^2(u_{11} - u_{22}) = -4(u_{11} - u_{22})$ . This result shows that the calculated  $u_{\mu\nu}$ , shown above, are consistent with the report by Dirac [3] about the infinitesimal rotational operator and the spin momentum of the gravitational waves.

### THEORETICAL JUSTIFICATION OF OUR CALCULATIONS

Our equation for calculating the energy densities of gravitational energy field and gravitational waves is:  $H = \left\{ Y - \left( a - br + c \frac{1}{r^2} \right) \right\}$ , where

$L = \left( a - br + c \frac{1}{r^2} \right)$ ,  $Y$  is the global temperature. And then we calculated the coefficients  $a$ ,  $b$  and  $c$  of  $L = \left( a - br + c \frac{1}{r^2} \right)$ , after giving the constraints:

$\frac{\partial E(H^2)}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial b} = 0$ , and  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial c} = 0$ , where  $E(H^2)$  is the expected

value of  $H^2$ .

Below we show a theoretical justification of this our calculation. In general, if  $f = f(q_n, p_n)$  and  $g = g(q_n, p_n)$  are arbitrary functions, and

$$\text{if}[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n} \frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial g}{\partial q_n}, \text{ and then, for example, } \dot{g} = [g, H] + U_m[g, \phi_m],$$

where  $m = 1, \dots, M$ , which distinguishes independent functions  $\phi_m(q, p)$ . And if  $[\phi_m, H] = 0$ , it gives the constraint to find the solutions of the problem. Here now

we assume that,  $\phi_m$ 's are the functions that describe the gravitational waves, where  $H$  is named as Hamiltonian, where  $q_n$  are coordinates, and  $n = 1, \dots, N$ , while  $N$  is the number of degrees of freedom. Also,  $H = p_n \dot{q}_n - L$ , where

$$L = L(q, \dot{q}) \text{ is Lagrangean, } \dot{q}_n = \frac{\partial q_n}{\partial t}, \text{ } t \text{ is time-coordinate, } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_n}, \text{ and}$$

$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$  are momenta. In the theory of special relativity,  $N$  is finite; but, in the

theory of general relativity of 4 dimensional curved space,  $N$  is infinite; and then,  $\partial L = \int p_x \delta \dot{q}_x$ , where the coefficient of  $\delta \dot{q}_x$  in the integrand in  $\partial L$  is defined to be momenta  $p_x$  [2].

The action integral of Born-Infeld electro-dynamics is  $I = \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} d^4x$ , where  $F_{\mu\nu}$  give the electromagnetic field. Here, the coordinates of electro-dynamics is  $A_r$ , where  $r = 0, 1, 2, 3$ ; and, the related momenta  $D^r$  are the components of electric induction [2].  $A_r$  and  $D^r$  satisfy  $[A_r, D^{s}] = g_r^s \delta(x - x')$ , where  $\delta(x - x')$  are the changes of the coordinates from  $r$  to  $s$ , where  $g_r^s$  is the Kronecker delta function and  $\delta(x - x')$  is the delta function of  $x - x'$ . Now, only  $A$  remains as Hamiltonian,  $H$ . And then,  $B^r = \frac{1}{2} \epsilon^{rst} F_{st} = \epsilon^{rst} A_{t,s}$ , where  $A_{t,s}$  are differentials of  $A_t$ , differentiated by the coordinate vector  $s$ , and  $\epsilon^{rst} = 1$  when  $(rst) = (1, 2, 3)$ . Here there are only 3 coordinates, because in electromagnetic dynamics the time-coordinate  $r = 0$  doesn't have meaning. And now,  $[B^r, D^{s}] = \epsilon^{rst} \delta_{,t}(x - x')$ . Then the momentum density is  $K_r = F_{rs} D^s$ . Also the energy density is:

$$K_{\perp} = \left\{ \Gamma^2 - \gamma_{rs} (D^r D^s + B^r B^s) - \gamma^{rs} F_{rt} F_{su} D^t D^u \right\}^{\frac{1}{2}},$$

where  $\gamma_{rs}$  is the metric in three-dimensional surface and  $-\Gamma^2 = \det \gamma_{rs}$ .

In these calculations Earth's global temperature  $Y$  is assumed to be,  $p_n \dot{q}_n$ ; and the coefficients,  $a$ ,  $b$ , and  $c$  are translated as  $p_n$  of the Lagrangean,  $L$ . Also here,  $H$  is the only Hamiltonian; and now, the energy densities of the gravitational waves and the gravitational field are calculated with

$$H = \left\{ Y - \left( a - br + c \frac{1}{r^2} \right) \right\}.$$

Here,  $a - b \times r$  is generalized as  $\Gamma^2 = -\det \gamma_{rs}$ ; and,  $c \frac{1}{r^2}$  is generalized as  $-\gamma_{rs} (D^r D^s + B^r B^s) - \gamma^{rs} F_{rt} F_{su} D^t D^u$ . Also,  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial b} = 0$ , and  $\frac{\partial E(H^2)}{\partial c} = 0$  are the constraints that we used in our calculations. Here the generalized expression of our constraint  $X'H = 0$  is  $[X, H] = 0$ , and  $X$  represents the energy densities that includes the gravitational waves  $\varphi(q, p)$ . Here we have to note that the number of order of freedom of coordinates is finite,  $N = 4$ , as we assumed only 4 vectors,  $x^0$ ,  $x^1$ ,  $x^2$ , and  $x^3$ , of the rectilinear coordinates in our calculation.

Similarly, in our calculation about the spin momentum of the Gravitational waves, the generalized form of the pseudo tensor is:

$$t_{\mu}^{\nu} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \frac{\partial L}{\partial q_{n,\nu}} q_{n,\mu} - g_{\mu}^{\nu} L \text{ is } [L, q_n],$$

where,  $L = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} (u_{\mu}^{\rho} l_{\sigma} + u_{\sigma}^{\rho} l_{\mu} - u_{\nu\sigma} l^{\rho})(u_{\nu}^{\sigma} l_{\rho} + u_{\rho}^{\sigma} l_{\nu} - u_{\nu\rho} l^{\sigma})$ , is the Lagrangean that describes the motion of the gravitational waves. And then,  $[L, q_n] = 0$ , gives the constraint to calculate the spin momentum of the gravitational waves, which is followed by calculations we showed above. In addition,  $[B^r, D^s] = \varepsilon^{rst} \delta_t(x - x')$ , in the theory of the electromagnetic field is the original idea of the infinitesimal rotation operator,  $R$ , in our analysis shown above. It changes the variables, but it doesn't change the physical system, which is the consistent argument that agrees with the theory of relativity [2].

Here we have to report one more aspect of the gravitational waves: the general solution of the momentum density of the gravitational waves,  $16\pi t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} u^2) l_{\mu} l^{\nu}$ , involves both contravariant vectors,  $x^{\mu}$ 's, and covariant vectors,  $x_{\mu}$ 's. Dirac [3] predicted that the gravitational waves appear only in one direction. Then, the momentum density of the gravitational wave becomes  $16\pi t_0^0 = \frac{1}{4} \{(u_{11} - u_{22})^2 + u_{12}^2\}$ , where  $t_0^3 = t_0^0$ . These contravariant vectors,  $x^{\mu}$ 's, and covariant vectors,  $x_{\mu}$ 's, are exchanged each other through fundamental tensors,  $g^{\mu\nu}$ 's, as we showed as  $u^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} u_{\alpha\beta}$ , and this operation changes the sign ( $\pm$ ) of the vectors. And the momentum density of gravitational waves is calculated as the scalar-products of those two different coordinates' systems. However, contravariant vectors and covariant vectors are in different coordinates' systems, and the momentum density can be calculated when two different coordinates' systems meet, although the contravariant vectors are not yet observable in the real physical system. This issue may be further investigated for explaining the negative contribution of the gravitational waves to the gravitational energy field.

## CONCLUSIONS AND RECOMMENDATION

In our previous research, [1], we compared the influences of  $\frac{1}{r}$  (as a surrogate for Newton's gravitational field) and  $\frac{1}{r^2}$  (as the surrogate for the gravitational waves' movement) to Earth's global temperature, assuming as if they are independent variables for the Least Squares Estimation of Classical Regression Model. Instead in this report, we have calculated the energy density of gravitational waves in the rectilinear coordinates of time and space (the empty space where only gravitational field exists). For these calculations we set an action integral in a rectilinear coordinate system, which linearly combines the gravitational field, the gravitational waves and Earth's global temperature, where each of them describes the field of energy. Then we calculated the coefficients of those energy fields



from the energy densities algebraically with a constraint, in which the derivatives of the energy density are zero, and as a result we found that the gravitational field has more effect on Earth's global temperature, while the energy of Moon's gravitational waves has a negative contribution to it.

In order to investigate the nature of the negative contribution of gravitational waves to the Earth's global temperature, we also examined the spin momentum of the assumed gravitational waves, in the rectilinear coordinate system. Although the spin momentum is very small and it doesn't raise the potential energy in the theory of quantum mechanics, it must exist on theory [6]. The result of our calculation indicated that the gravitational waves in our coordinate system had the spin 2. On the other hand in this analysis, we calculated the scalar products of contravariant vectors and covariant vectors, while contravariant vectors are not observable in the real physical field, which leaves the issue for the further investigation.

## REFERENCES

1. *Matsuki Y.*, Empirical Investigation on Influence of Moon's Gravitational-Field to Earth's global temperature / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology, 1/2019, 2019. — N 2. — P. 107–118.
2. *Dirac P.A.M.* Lectures on Quantum Mechanics. — New York: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964. — 87 p.
3. *Dirac P.A.M.*, General Theory of Relativity. Florida State University. — New York: John Wiley & Sons, 1975. — 69 p.
4. UK Department of Energy and Climate Change (DECC). — Available at: <http://en.openei.org/datasets/dataset/b52057cc-5d38-4630-8395-b5948509f764/resource/f42998a9-071e-4f96-be52-7d2a3e5ecef3/download/england.surface.temp1772.2009.xls>
5. *Moon* Distance Calculator – How Close is Moon to Earth? Available at: <https://www.timeanddate.com/astronomy/moon/distance.html?year=1987&n=367>
6. *Dirac P.A.M.* The Principle of Quantum Mechanics / PAM DITAC. — Oxford: Clarendon Press, 1958. — 312 p.

*Receive 06.02.2019*

---

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

## ДОСЛІДЖЕННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ УСПІШНОСТІ СТАРТАПІВ ПЛАТФОРМИ KICKSTARTER

Н.В. КУЗНЕЦОВА, Я.В. ГРУШКО

**Анотація.** Основна мета дослідження, проведеного у роботі, — виявлення та прогнозування успішності нових проєктів-стартапів. Розв’язано задачу прогнозування факту успішності того чи іншого стартапу, застосовано різні методи інтелектуального аналізу даних, такі як методи екстремального градієнтного бустингу та  $k$ -найближчих сусідів, що дало змогу з високою точністю передбачити успішність проєкту, а найефективнішим виявився метод екстремального градієнтного бустингу. Використання моделей виживання дозволило оцінити середній час роботи над успішним стартапом і визначити ключові галузі, для яких стартапи стають ефективними; спрогнозовано для кожного з них необхідний час роботи для втілення прогресивної ідеї в успішний бізнес. Виявлено найбільш успішні категорії проєктів-стартапів та спрогнозовано час, необхідний як у цілому для досягнення успішності (виживання) проєктів, так і для окремих категорій проєктів. Для цього побудовано моделі виживання на основі пропорційних ризиків Кокса та моделі Каплан–Майєра.

**Ключові слова:** прогнозування, метод екстремального градієнтного бустингу, метод  $k$ -найближчих сусідів, моделі виживання, стартапи, успішність проєктів, платформа kickstarter.

### ВСТУП

Сучасний світ є настільки відкритим і динамічним, що будь-яка ідея, відкриття, технологія можуть бути реалізовані та впроваджені дуже швидко. Це зумовлює не лише швидкий розвиток і передавання нових тенденцій між різними галузями, людьми, народами, континентами, а і зміну навколишнього буття, світогляду та уподобань людей, зацікавленість їх у нових продуктах та послугах, появу нових потреб та розвиток нових звичок і захоплення новими трендами, напрямками, які до цього навіть не мали жодної перспективи для розвитку. Саме відкритість світу і можливість використання інтернет-технологій спричиняють такий розвиток та появу платформ і майданчиків для презентації та обміну ідеями, спеціальні фонди, підтримання і залучення всесвітньо відомих компаній і корпорацій, інвесторів, краудфандингу тощо. Виникнення і поширення однієї технології може не лише досягти великого успіху за короткий час, але і «згаснути», тобто втратити ключові позиції на ринку або основних прихильників.

Найпоширеніший і найбільш відомий термін для визначення прогресивних ідей та думок наразі є стартап. Стартапами часто називають невеликі бізнес-компанії, ядром яких є якась така «особлива» ідея, що гіпотетично зможе перетворити бізнес у великий мільярдний (у доларах США) бізнес. Реалізація стартапів стала дуже поширеним рухом; його розвивають студенти, молодь, прогресивні люди, захоплені і натхненні певною чудовою ідеєю,

які не мають достатнього фінансування для негайного впровадження її у широке виробництво, але зацікавлені її реалізувати як власну, а не під брендом певної відомої компанії.

Компанії, основним зерном яких була «особлива» ідея, створювалися і існували понад 100 років. Є навіть статистика, виконана аналітиками з оцінювання і прогнозування стартапів, яка вказує, що насправді ймовірність поразки стартапу дуже велика. У 2017 р. американський діловий журнал Fortune [1] оцінив такі проекти стартапів і навів вражаючі факти: 90% стартапів в кінцевому підсумку зазнають невдачі. Тобто основна частина таких «ідейних» бізнесів не реалізується, або не знаходить достатньої кількості споживачів, підтримання, фінансування. Це вже не перші такі дослідження ділового журналу. Ця тема є актуальною і досі, а у своєму дослідженні Fortune відзначає [2], що основними причинами невдачі стартапів у 2014 р. були: відсутність потреби продукту у користувачів; нестача коштів у засновників; недостатня згуртованість команди розробників та генераторів ідей; порушення певних законів, наприклад, порушення прав конфіденційності користувачів тощо.

## **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ**

Головною ідеєю роботи стали дослідження та прогнозування популярних і найбільш «успішних» проектів-ідей, реалізованих у вигляді стартапів та зареєстрованих на платформі kickstarter. Мета дослідження — виявлення основних тенденцій, притаманних успішним стартап-проектам, оцінювання та прогнозування періоду їх успішності та необхідні витрати на їх розвиток; на підставі виконаного аналізу успішних проектів визначення ключових галузей та напрям ідей, які можуть бути перспективними для розвитку і впровадження у великий бізнес. Для такого аналізу обрано реальний набір даних і визначено методи інтелектуального аналізу даних (ІАД), такі як методи класифікації, градієнтного бустингу із застосуванням дерев та методи аналізу виживання для прогнозування часу успішності стартапів. Спрогнозувати, чи буде проект успішним, і якщо так, то який період часу потрібен для фінансування і в якій галузі.

## **МЕТОДИ ТА ІНСТРУМЕНТИ ІАД, ВИКОРИСТАНІ У РОБОТІ**

Особливості поставленого завдання зумовлюють необхідність вирішення одразу декількох завдань різними методами ІАД, тому важливим є обрання коректного інструментарію і математичного апарату. Для визначення успішності проекту для обраного набору даних має бути розв'язана задача класифікації, тобто віднесення проекту до успішних або провальних. Для задачі класифікації пропонується використати найбільш відомий і достатньо ефективний метод  $k$ -найближчих сусідів та метод екстремального градієнтного бустингу. Для визначення оптимального часу, необхідного для реалізації стартапу, тобто для орієнтування розробників на необхідний час роботи і інвестування проекту, щоб не зупинитися «за крок до реалізації мрії», вирішується задача прогнозування часу з використанням моделей виживання.

### Метод $k$ -найближчих сусідів ( $k$ -NN)

У розпізнаванні образів метод  $k$ -найближчих сусідів ( $k$ -nearest neighbor method) є непараметричним методом, що використовується для класифікації та регресії [3]. В обох випадках вхід складається з  $k$  найбільш близьких прикладів навчання у просторі ознак. Вихід залежить від того, чи використовується  $k$ -NN для класифікації або регресії:

- У класифікації  $k$ -NN вихід є класом, до якого належить вхідний об'єкт. При цьому об'єкт призначається класу, найбільш поширеному серед його найближчих сусідів ( $k$  — ціле додатне число, зазвичай невелике). Якщо  $k=1$ , то об'єкт просто присвоюється класу того самого найближчого сусіда.

- У  $k$ -NN регресії вихід є значенням властивості для об'єкта. Це значення є середнім значенням для  $k$  найближчих сусідів.

Тобто в основу методу покладено використання відстані (зазвичай евклідової метрики) між вхідним об'єктом та вже промаркованими (навченими) сусідами (об'єктами).

Приклад класифікації методом  $k$ -NN зображено на рис. 1. Вхідний об'єкт (точку) слід класифікувати або до першого класу квадратів, або до другого класу трикутників. Якщо  $k=3$  (суцільне коло лінії), то він присвоюється другому класу, оскільки у внутрішньому колі є 2 трикутники і лише 1 квадрат. Якщо  $k=5$  (коло пунктирної лінії), то він призначається першому класу (3 квадрати проти 2 трикутників всередині зовнішнього кола).

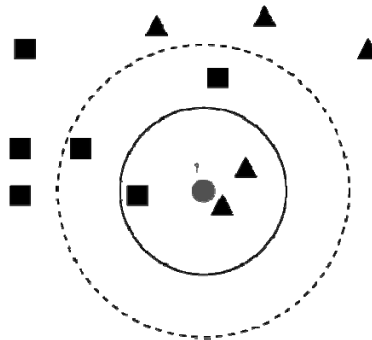


Рис. 1. Приклад класифікації  $k$ -NN

Цікаво, що алгоритм  $k$ -NN є одним з найпростіших алгоритмів машинного навчання і при цьому він є одним з найефективніших (відповідне порівняння, наведено в документації [4] популярної бібліотеки *sklearn* для мови програмування *python*).

### Метод екстремального градієнтного бустингу (XGBoost)

Метод екстремального бустингу XGBoost (eXtreme Gradient Boosting) [5] реалізований у вигляді бібліотеки з відкритим вихідним кодом, доступний на найбільш поширених і широко вживаних мовах програмування, таких як C++, Java, Python [6], R і Julia.

Особливістю методу є те, що він забезпечує паралельний бустинг дерев (також відомий як GBDT, GBM) і дозволяє розпаралелювати, а тим самим пришвидшувати розв'язання задачі порівняно з відомим методом градієнт-

ного бустингу, а сам метод ще називають градієнтним бустингом із застосуванням дерев.

Градієнтний бустинг використовують у регресійних і класифікаційних задачах як техніку, суть якої полягає в тому, щоб збудувати з ансамблю слабких моделей прогнозування (зазвичай моделей дерев рішень) одну, але точну та ефективну модель.

Алгоритм реалізації методу градієнтного бустингу можна подати у такому вигляді [7, 8].

Задано: навчальну вибірку  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ , функцію витрат  $L(y, F(x))$ , кількість ітерацій (кількість слабких моделей) —  $M$ .

1. Ініціалізуємо модель константою ( $F_0(x)$ ):

$$F_0(x) = \arg \min_Y \sum_{i=1}^n L(y_i, \gamma).$$

2. Від  $m=1$  до  $M$ :

- обчислюємо псевдозалишки (pseudo-residuals):

$$r_{im} = - \left[ \frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)} \right]_{F(x)=F_{m-1}(x)};$$

- навчаємо чергову слабку модель (наприклад, дерево)  $h_i(x)$  отриманими псевдозалишками, тобто навчаємо такою вибіркою:  $\{(x_i, r_{im})\}_{i=1}^n$ ;

- обчислюємо множник  $\gamma_m$ , розв'язуючи однорозмірну оптимізаційну задачу:

$$\gamma_m = \arg \min_Y \sum_{i=1}^n L(y_i, F_{m-1}(x_i) + \gamma h_m(x_i));$$

- оновлюємо модель:

$$F_m(x) = F_{m-1}(x) + \gamma_m h_m(x).$$

3. Виводимо  $F_m(x)$ .

Бібліотекою XGBoost почала користуватися велика кількість розробників, що сприяло популярності методу серед спільноти Kaggle (платформа, де змагаються вчені з науки про дані). Метод дозволяє отримати одні з найкращих результатів прогнозів, а тому цей метод обрано в цій роботі для прогнозування успішності проектів стартапів [10].

Для аналізування та прогнозування необхідного часу роботи для успішного запуску стартапу використаємо різні моделі з теорії виживання.

### Моделі виживання

У загальному вигляді функція виживання подається у вигляді [11]

$$S(t) = P(T > t), \text{ де } 0 \leq S(t) \leq 1.$$

Предметом дослідження є визначення ймовірності виживання та провалу (або смерті) проекту, що відбувається в момент часу  $t$  з урахуванням того, що подія смерті не відбувалася до часу  $t$ . Математично це подано таким чином [11, 12]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P(t \leq T \leq t + \Delta | T > t).$$

Ця подія відбувається у безмежно малій проміжок часу (від  $t$  до  $t + \Delta t$ ), тож отримуємо формулу, що є функцією ризику:

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta | T > t)}{\Delta}.$$

Це ідентично такому виразу:

$$h(t) = -\frac{dS(t)}{S(t)}.$$

У наведених позначеннях та припущеннях можна виконати формалізацію реальної практичної задачі оцінювання ризиків.

Відома модель Д. Кокса [13], запропонована в 1972 р., заснована на припущенні, що функцію ризику можна факторизувати, тобто подати у вигляді добутку двох функцій:

$$h_i(t) = h_0(t) \cdot \psi(x_{i1}, \dots, x_{ik}),$$

де  $h_0(t)$  — базова функція інтенсивності, що включає фактор часу, але не включає коваріанти, а  $\psi(x_{i1}, \dots, x_{ik})$  — лінійна функція досліджуваних ознак, яка не включає фактор часу.

Досить часто модель записують у такому вигляді [12, 13]:

$$h_i(t) = h_0(t) e^{\{\beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik}\}};$$

$$\ln h_i(t) = \ln h_0(t) + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik},$$

де  $\beta_1, \dots, \beta_k$  — невідомі параметри, а  $x_i$  є вхідними змінними (тобто стовпчиками) у вибірці.

Модель пропорційних ризиків Кокса у вигляді функції умовного виживання  $S(t|x)$  передбачає оцінку сукупної умовної функції ризику  $L(t|x)$  з використанням максимальної правдоподібності.

## ПІДГОТОВКА ТА ОБРОБЛЕННЯ ВХІДНИХ ДАНИХ ДО МОДЕЛЮВАННЯ

Вхідними даними для моделювання обрано набір даних [10] за стартапами, зареєстрованих на платформі кікстартер [14]. Набір містить 13 змінних (стовпчиків):

**ID:** ID кожного клієнта;

**name:** назва стартапу;

**category:** детальний опис категорії, у якій функціонує стартап (наприклад, їжа, документальна література);

**main\_category:** загальна категорія діяльності стартапу, ширша ніж просто категорія (наприклад, східна кухня, література);

**currency:** валюта проекту;

**launched:** дата та час початку роботи над стартапом;

**deadline:** останній термін (дата та час) закінчення роботи над стартапом.

Оскільки час початку роботи над проектом (launched) у всіх стартапів різний (у когось 2014 р., у когось 2017 р.), то задля кращої репрезентатив-

ності даних будемо створювати агрегований показник, тобто сформуємо нову змінну «термін роботи» як різницю між кінцем і початком роботи над проектом:  $\text{time\_spent} = \text{deadline} - \text{launched}$ , а саме:

**goal:** сума грошей, яку має на меті зібрати стартап;

**pledged:** сума грошей, яку вже вкладено в стартап;

**state:** результат стартапу (0 — провалений, 1 — успішний);

**backers:** кількість людей в команді;

**country:** країна, у якій зареєстровано стартап;

**usd\_pledged:** сума доларів США, яку вже вкладено в стартап.

Вхідними даними обрано для початку 3743 записів із загальних 378600, які містять 9 стовпчиків. Усі дані переведено в числа для розв'язання задачі класифікації (табл. 1).

**Таблиця 1.** Перші рядки з набору даних

Category	Main_category	Currency	Goal	Pledged	State	Backers	Country	Usd_pledged
108	12	5	7	0	0	0	9	0
93	6	13	3908	24883	0	670	22	2015
93	6	13	5325	22364	0	2014	22	39948

Проаналізуємо вхідну вибірку з 3743 унікальних стартапів:

- середнє значення суми грошей, що вже вкладено в стартап ( $\text{usd\_pledged}$ ), — 43911 дол. Стандартне відхилення велике (34961 дол.), максимальне значення 109021 дол.;
- середня кількість людей у команді стартапу: 1585;
- середній час, витрачений на роботу команди над стартапом: 38 днів; максимальний час: 1284 дні; мінімальний — 2 год (так, є і такі проекти!);
- оскільки значення 0 для  $\text{state}$  означає «стартап провалився», а значення 1 означає «стартап успішний», середнє значення 0,375 означає, що лише 37,5% стартапів з усієї вибірки були успішними;
- пропущених даних у вибірці немає.

Матрицю кореляції між вхідними змінними зображено на рис. 2.

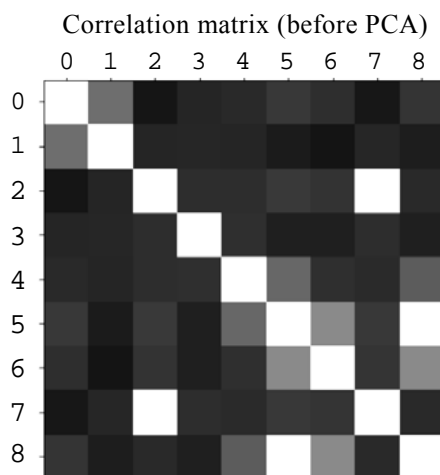


Рис. 2. Матриця кореляції між вхідними змінними

Оскільки існує сильна кореляція (чим світліші квадратики, тим більша кореляція) між деякими вхідними значеннями, тому застосуємо метод головних компонент (Principle Component Analysis (PCA)) для зменшення кореляції та кількості вхідних змінних. Матрицю кореляції вхідних змінних після застосування PCA зображено на рис. 3.

Після застосування методу суттєві сплески кореляції між вхідними значеннями згладились, а кількість змінних зменшилась із 10 до 4, але при цьому, як було перевірено далі, точність значно знизилась (показник становив ROC\_AUC=0,85, а став 0,66), але швидкість оброблення збільшилась. Тож було прийнято рішення не використовувати PCA у подальшій роботі.

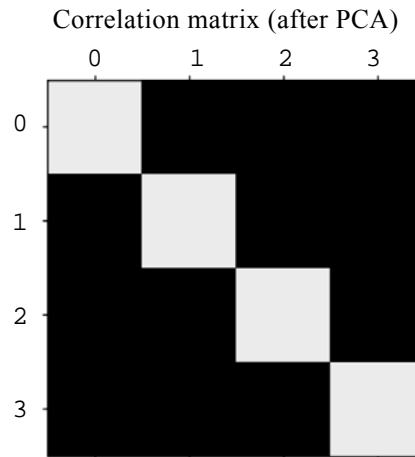


Рис. 3. Матриця кореляції між вхідними змінними після застосування PCA

Вхідну вибірку розділено у співвідношенні 70% для навчальної та 30% для тестової. Для перевірки наближеності тестової вибірки до прогнозованої використовується індекс Жаккара, що є стандартним критерієм у мові програмування python.

Коефіцієнт подібності Жаккара обчислюється за формулою

$$K_j = \frac{c}{a + b - c},$$

де  $a$  — кількість видів на першому пробному майданчику;  $b$  — кількість видів на другому пробному майданчику;  $c$  — кількість видів, спільних для першого та другого майданчиків.

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КЛАСИФІКАЦІЇ

Для прогнозування факту успішності стартапу застосовано метод KNeighboursClassifier ( $k$ -NN), результати роботи якого подано у вигляді матриці помилок (Confusion Matrix) на рис. 4.

Для оцінювання точності прогнозування використовувався показник площі під кривою ROC, який для даного методу визначився на рівні 0,74. Поріг, обраний для оцінювання і побудови матриці помилок, становив 0,6, тобто якщо ймовірність успіху більша за 0,6, то стартап вважається успішним.



Можна бачити, що в методі  $k$ -NN відношення помилок неправильної класифікації позитивних випадків до неправильно виявлених негативних становить  $FP(False\ Positive)/FN(False\ Negative) = 1,3$ . Це означає, що класифікатор прогнозуватиме помилково успіх частіше, ніж помилково провал стартапу, а тому така модель є некоректною для розглядової задачі.

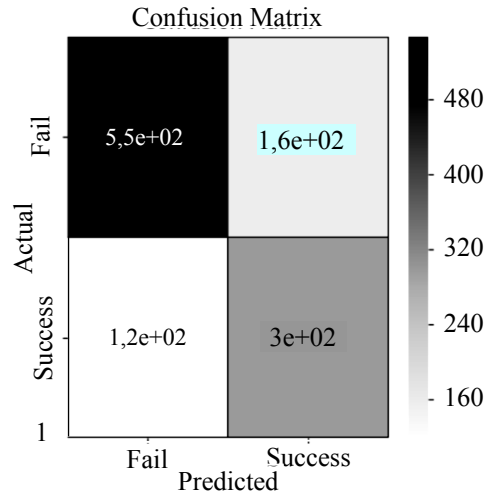


Рис. 4. Confusion Matrix для методу  $k$ -NN з порогом 0,6

Виконано також велику кількість експериментів з різними порогоми і емпірично виявлено, що оптимальний поріг для прогнозування ймовірності успіху стартапу становить 0,7. Матрицю помилок для  $k$ -NN і порога 0,7 зображено на рис. 5.

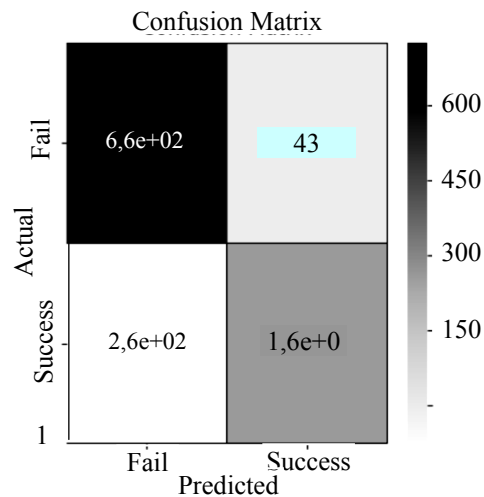


Рис. 5. Confusion Matrix для методу  $k$ -NN з порогом 0,7

Площа під кривою ROC зменшилась до 0,65, але це вимушений крок, оскільки довелося накласти додаткові жорсткіші вимоги, щоб наблизити модель до реальних умов.

За методом екстремального градієнтного бустингу XGBoost визначено модель, для якої індекс Жаккара виявився вищим, ніж у попереднього кла-

сифікатора, і дорівнює 0,85, що свідчить про більшу коректність моделі XGBoost.

Показник ROC\_AUC на тестовій вибірці становив 0,92, що вищий, ніж у класифікатора  $k$ -NN, а сам індекс свідчить про високу предикативну здатність такої моделі.

Для моделі XGBoost встановлено кількість ітерацій на рівні 70, а кількість епох, за якими неможливе покращення, EARLY\_STOP = 70, при цьому ROC\_AUC на тестовій вибірці становив 0,85. Емпірично підібрано кращі параметри: кількість ітерацій збільшено до 1000, а EARLY\_STOP зменшено до 50. За таких параметрів на тестовій вибірці ROC\_AUC = 0,92.

Для методу екстремального градієнтного бустингу також експериментально підібрано поріг для покращення репрезентативності моделі прогнозу успіху стартапів і оптимальне значення порога виявилось 0,6, проте точність моделі за індексом ROC\_AUC дещо знизилась до 0,83, але є вищою порівняно з попереднім методом. Відношення FP(False Positive)/FN(False Negative) для XGBoost становить 0,6, що є більшим порівняно з методом  $k$ -NN зі значенням 0,16 (рис. 6). Порівняння обох методів наведено у табл. 2.

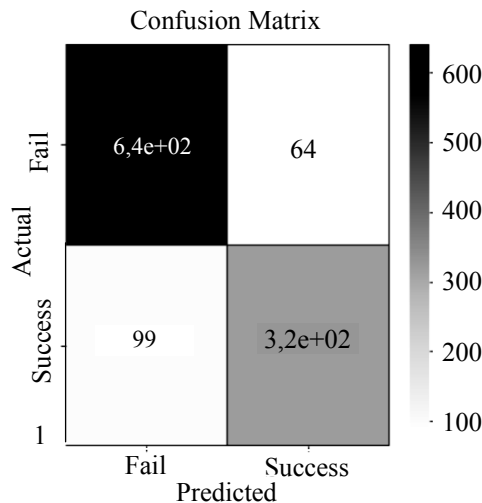


Рис. 6. Матриця помилок для методу екстремального градієнтного бустингу з порогом 0,6

**Таблиця 2.** Порівняльна таблиця результатів методів за різними критеріями ефективності та порогом

Method	Index				
	Jaccard Index	ROC_AUC	ROC_AUC_optimum	FP/FN	Попір
KNeighbours	0,75	0,74	0,65	0,16	0,7
XGBoost	0,85	0,92	0,83	0,6	0,6

Отже, класифікатор XGBoost виявився кращим за основними критеріями і його доцільно застосовувати для прогнозування факту успішності проекту.

## ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСУ УСПІШНОСТІ СТАРТАПУ МОДЕЛЯМИ ВИЖИВАННЯ

Для вхідного набору даних необхідно спрогнозувати час успішності стартапу, для цього ключовими змінними будуть час `time_spent` (який відповідає часу в моделі Кокса) та `state` (має значення  $\{0;1\}$ , 1 — якщо відбулась подія успішного стартапу і 0 — якщо провал).

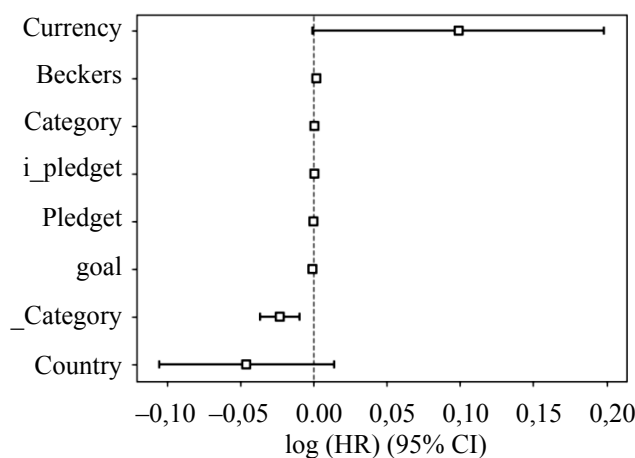
Для побудови моделі Кокса використано python-бібліотеку `lifelines`. Результати оцінювання значень вхідних змінних та коефіцієнтів для моделі виживання Кокса наведено у табл. 3.

**Таблиця 3.** Значення вхідних змінних для моделі Кокса

Variable	Coefficient							
	coef ex	p(coef)	se(coef)	z	P	-log2(p)	lower 0.95	upper 0.95
category	0	1	0	0,72	0,47	1,09	0	0
main_category	-0,02	0,98	0,01	-3,36	<0,005	10,3	-0,04	-0,01
currency	0,1	1,1	0,05	1,94	0,05	4,26	0	0,2
goal	0	1	0	-3,06	<0,005	8,82	0	0
pledged	0	1	0	2,17	0,03	5,06	0	0
backers	0	1	0	11,61	<0,005	101,04	0	0
country	-0,05	0,96	0,03	-1,51	0,13	2,92	-0,11	0,01
usd_pledged	0	1	0	3,5	<0,005	11,09	0	0

Для перевірки предикативної здатності та валідації моделі виживання використовується показник Concordance Index, а прийнятними вважаються моделі, що мають значення індексу від 0,55 до 0,75. Для моделі Concordance Index = 0,63 відношення правдоподібності — 306,07, а  $-\log_2(p) = 201,56$ , тому модель Кокса може використовуватись для подальшого аналізу.

Значення коефіцієнтів у побудованій моделі Кокса подано у вигляді рис. 7.



**Рис. 7.** Значення коефіцієнтів у побудованій моделі Кокса

Далі побудовано модель Каплана–Майєра, графік функції виживання якої зображено на рис. 8.

Порівняння функцій виживання моделей Каплана–Майєра та базового рівня виживання Кокса проілюстровано на рис. 9.

Бачимо, що криві збігаються, хоча з часом дещо розходяться, що є коректним, оскільки чим більше базова лінія в моделі Кокса відрізняється від моделі Каплана–Майєра, тим краще, адже тим більший корисний внесок роблять вхідні змінні, що містяться під експонентою у відповідній формулі моделі Кокса.

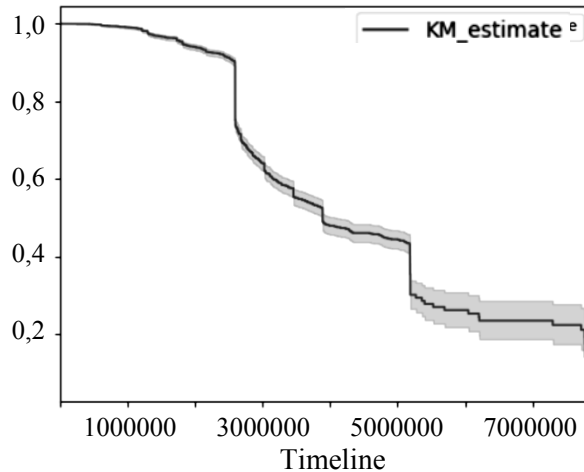


Рис. 8. Графік виживання моделі Каплана–Майєра в часі (у секундах)

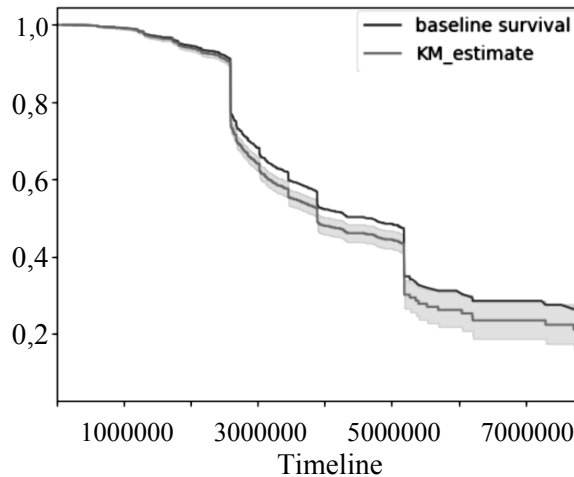


Рис. 9. Порівняння моделей виживання

Оскільки необхідно було виявити стартапи, які найімовірніше стають успішними, то виконувалася стратифікація моделі Кокса за основними категоріями (рис. 10).

Отже, найбільш вдалими є стартапи, реалізовані у таких категоріях, як Crafts, Journalism, Dance, Fashion, Comics, а ймовірності виживання для них становлять відповідно від 0,65 до 0,5. Слід відзначити, що після 60 днів стартапи із цих категорій перестають «вмирати», тобто можемо зробити висновок, що час успішності для стартапів категорії становить понад 60 днів.

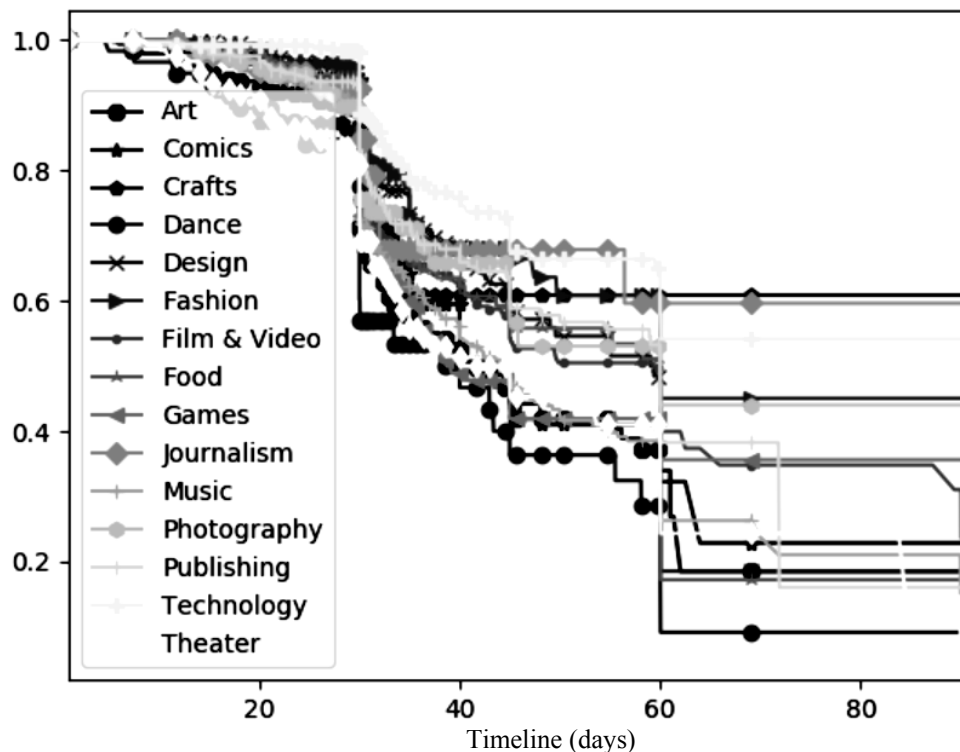


Рис. 10. Стратифікована за стовпчиками *main\_category* модель Кокса

## МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСУ УСПІШНОСТІ СТАРТАПІВ ЗА КАТЕГОРІЯМИ

Для визначення часу, необхідного для розроблення і запуску стартапу, який досягне успіху, було вирішено виконати подальше моделювання. Оскільки вхідна вибірка на платформі велика — 378 000 різних стартапів, то було обрано перші 7486 унікальних стартапів, які розбито в рівних частинах по 3743 — на навчальну та тестову вибірки.

Для аналізу і побудови моделі Кокса використано навчальну вибірку 3743 стартапи і спрогнозовано час життя стартапів за когортами (категоріями/ напрямками стартапів) для другого набору для перевірки вибірки.

Для кожної категорії стартапів спрогнозовано час життя для тестового набору (рис. 11); реальні значення функції виживання для тестового набору подано у вигляді рис. 12.

Отже, результати прогнозування часу для різних категорій стартапів за допомогою функцій виживання показали, що найтриваліший час життя мають такі категорії стартапів з тестового набору, як технології, фільми і відео, фотографія, мода та публікації. Імовірність виживання для цих категорій є не нижчою, ніж 0,4 протягом усього часу спостереження. Крім цього, після 60 днів стартапи таких категорій перестають «вмирати», тобто починають окупатися і переходити в успішний бізнес, що дає дохід розробникам. Аналогічні результати спостерігались і на навчальному наборі, проте для деяких інших категорій (технології, фільми та відео, фотографії, мода та публікації). Моделлю Кокса спрогнозовано, що всі категорії стартапів проходять відмітку 40 днів, найуспішнішими стартапами, що проходять відмітку 60 днів, є такі категорії: Journalism, Technology, Crafts, Fashion, Photography.

Порівнявши з реальними даними, маємо, що прогноз більш-менш точний, оскільки 3 з 5 збігаються з реальними значеннями (Technology, Fashion, Photography), а ще 2 з 5 збігаються з попереднім набором даних (Journalism, Fashion). Отже, одними з найуспішніших категорій для стартапів за проведеним дослідженням можна вважати Fashion, Technology, Journalism, Photography. Цікавим є те, що виділився серед них Fashion, потрапивши до всіх вибірок успішних категорій (і до навчальної, і до тестової, і до реальної).

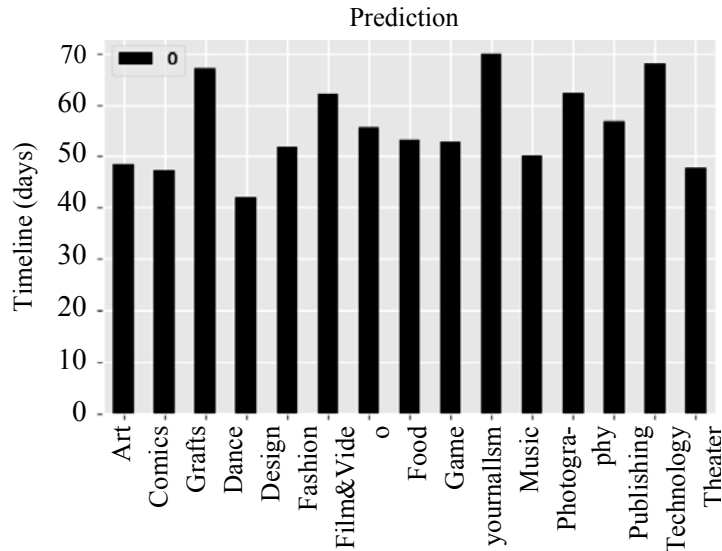


Рис. 11. Прогноз часу життя за категоріями для тестового набору

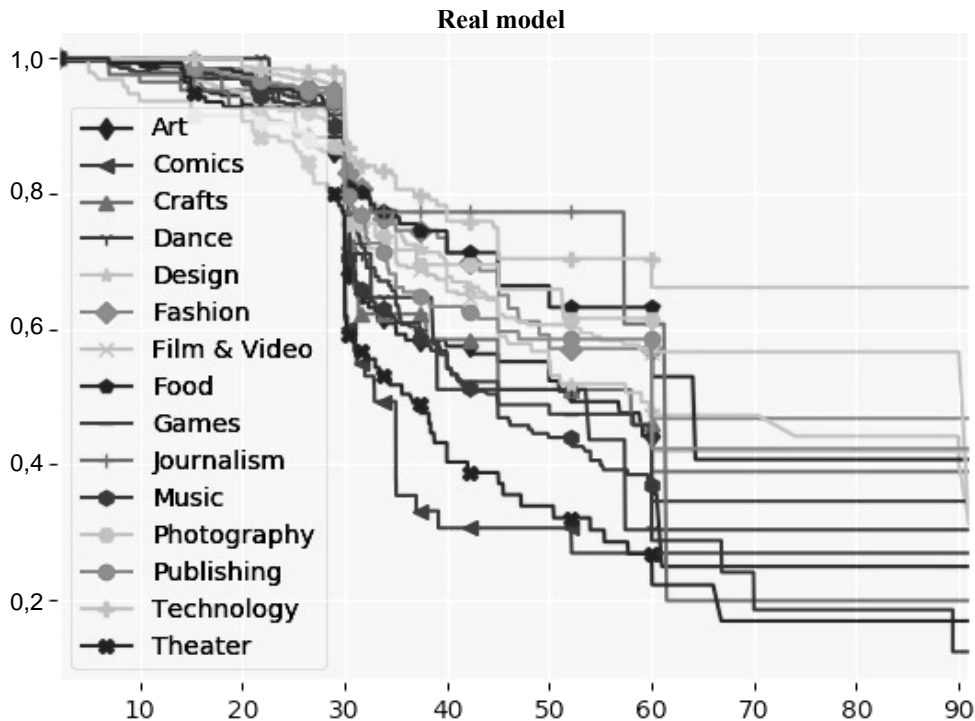


Рис. 12. Реальні значення функції виживання для тестового набору даних за категоріями

## ВИСНОВКИ

Динаміка зміни технологій і уподобань клієнтів викликає появу великої кількості нових стартапів. Успіх тієї чи іншої бізнес-ідеї істотно залежатиме від удадо підібраного моменту, відсутності подібних конкурентних пропозицій, часу її реалізації у вигляді стартапу та навіть галузі, у якій її буде запропоновано. Проведене у роботі дослідження сучасних успішних та провальних проєктів дає змогу зорієнтуватись, для якої галузі натеper є актуальними нові стартапи. За допомогою сучасних методів інтелектуального аналізу даних визначено кращі методи для оцінювання і прогнозування успішності стартапів. Застосовані методи екстремального бустингу та  $k$ -найближчих сусідів дозволили з високою точністю передбачити успішність проєкту, а моделі виживання — оцінити середній час роботи над успішним стартапом і визначити саме ті ключові галузі, для яких стартапи стають ефективними, спрогнозувавши для кожного з них необхідний час роботи для втілення прогресивної ідеї в успішний бізнес. Проведене дослідження буде корисним для молодих винахідників, які хочуть втілити власну ідею у життя і планують започаткувати власний бізнес, а також для інвесторів, які прагнуть підтримувати нові проєкти і хотіли б швидкого повернення та примноження вкладених коштів, а отже, зацікавлені у пошуку потенційних проєктів, які не матимуть конкурентів.

У КПІ імені Ігоря Сікорського також наявна відома широкому загалу платформа для розвитку стартапів і потенційних інвесторів [15], яка є сходинкою для залучення початкового фінансування на розроблення власних ідей. Для виявлення галузей, що потребують змін та втілення нових ідей, напрацювання рекомендацій новачками, які тільки хочуть організувати власний бізнес для реалізації своєї прогресивної ідеї, також може бути корисним таке дослідження вже реалізованих стартапів і аналізу їх доцільності й ефективності за різними напрямками та сферами.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Conventional Wisdom Says 90% of Startups Fail. Data Says Otherwise* // Fortune. — Updated June 2017. — Available at: <http://fortune.com/2017/06/27/startup-advice-data-failure/>
2. *Why startups fail, according to their founders* // Fortune. — Updated September 2014. — Available at: <http://fortune.com/2014/09/25/why-startups-fail-according-to-their-founders/>
3. *Altman N.S.* An introduction to kernel and nearest-neighbor nonparametric regression / N.S. Altman // *The American Statistician*. — 1992. — P. 175–185.
4. *Classifier comparison* // Scikit-learn. — Updated 2018. — Available at: [https://scikit-learn.org/stable/auto\\_examples/classification/plot\\_classifier\\_comparison.html](https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/classification/plot_classifier_comparison.html)
5. *XGBoost (eXtreme Gradient Boosting)* // Distributed (Deep) Machine Learning Community. — Updated 2016. — Available at: <https://github.com/dmlc/xgboost>.
6. *Xgboost 0.82* // Python Package Index (PyPI). — Updated 2019. — Available at: <https://pypi.org/project/xgboost/>.

7. *Friedman J.H.* Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine / J.H. Friedman // Reitz Lecture. — 1999.
8. *Hastie T.* 10. Boosting and Additive Trees / T. Hastie, R. Tibshirani, J.H. Friedman // The Elements of Statistical Learning. — 2009. — N 2. — P. 337–384.
9. *XGBoost* (eXtreme Gradient Boosting) // Distributed (Deep) Machine Learning Community. — Updated 2016. — Available at: <https://github.com/dmlc/xgboost/tree/master/demo#machine-learning-challenge-winning-solutions>.
10. *Kickstarter projects* // Kaggle. — Updated 2018. — Available at: <https://www.kaggle.com/kemical/kickstarter-projects/version/3#ks-projects-201801.csv>
11. *Kuznietsova N.V.* Information Technologies for Clients' Database Analysis and Behaviour Forecasting / N.V. Kuznietsova // Selected Papers of the XVII International Scientific and Practical Conference on Information Technologies and Security (ITS 2017). — 2017. — P. 56–62. — Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-2067>.
12. *Allison P.D.* Survival Analysis Using SAS / P.D. Allison // Cary. — 2010. — 324 p.
13. *Cox D.R.* Regression Models and Life-Tables / D.R. Cox // Journal of the Royal Statistical Society, Series B. — 1972. — Vol. 34, N 2. — P. 187–220.
14. *Kickstarter* // PBC. — Updated 2019. — Available at: <https://www.kickstarter.com/>.
15. *Sikorsky Challenge*. — Updated 2019. — Available at: <https://www.sikorskychallenge.com/>.

Надійшла 08.07.2019



## **ВИКОРИСТАННЯ РЕКУРЕНТНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ АВТОМАТИЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ РАКУ ЛЕГЕНІВ**

**Б.В. ЧАПАЛЮК, Ю.П. ЗАЙЧЕНКО**

**Анотація.** Рак легенів є одним із найбільш агресивним та швидко прогресуючим онкологічним захворюванням, що призводить до смерті великої кількості людей по всьому світу. Одним із основним методів боротьби з раком є виявлення його якомога на найбільш ранній стадії. Побудова автоматичних систем діагностування раку легенів може допомогти лікарям в цьому. Розглянуто можливість побудови рекурентної нейронної мережі для аналізу КТ зображень легенів пацієнтів. Описано побудовану нейронну мережу, що складається із згорткової нейронної мережі, рекурентної нейронної мережі та додаткового механізму уваги, що надає можливість перевикористати попередньо анотовану інформацію про злоякісні ділянки на КТ знімку.

**Ключові слова:** рекурентні нейронні мережі, глибинне навчання, механізм уваги, автоматична діагностика раку легенів

### **ВСТУП**

Розроблення систем автоматичного оброблення медичних зображень — одне з найбільш важливих завдань, вирішивши яке, можна зберегти мільйони життів у всьому світі та поліпшити медичне обслуговування. Це спонукає багатьох науковців та інженерів створювати подібні системи, сподіваючись пришвидшити та підвищити точність медичного діагностування. Мета роботи — розгляд проблеми побудови системи автоматичного діагностування раку легенів на базі рекурентних нейронних мереж.

Рак легенів є однією з найбільш поширених причин смерті пацієнтів, що мають проблеми з онкологією. Причиною цього є агресивність і складність перебігу захворювання, а також проблема виявлення захворювання на пізніх стадіях. Відповідно до даних Всесвітньої організації охорони здоров'я (World Health Organization) протягом 2012 р. зафіксовано близько 1,8 млн нових випадків захворювання раком легенів і близько 1,6 млн випадків смертей [1]. Рак легенів вважається одним із найбільш агресивних видів ракових захворювань через велику кількість летальних випадків у пацієнтів. Протягом п'яти років після діагностування раку легенів виживає лише 10–15% пацієнтів. Проте, якщо рак вдається діагностувати на ранніх стадіях, то протягом десяти років виживає близько 75% пацієнтів, а отже, діагно-

стування раку легенів на дуже ранніх стадіях є життєво необхідною умовою для збереження життя, тому людям із групи ризику призначають регулярні перевірки. Щоб допомогти лікарям проводити подібні діагностування швидко та якісно, розробляються системи автоматичного діагностування раку легенів.

Основним методом діагностування раку легенів є отримання рентгенівського знімка легені або тривимірного зображення за допомогою комп'ютерної томографії (КТ) шляхом пошарового пропускання рентгенівського променя крізь тонкі шари тканин людського тіла в різних напрямках. У результаті отримується набір двовимірних зображень частини тіла людини, з'єднання яких дає тривимірне зображення. У роботі використовувались тривимірні зображення легенів, отримані завдяки комп'ютерній томографії.

Для виявлення злоякісних утворень на знімку рентгенологи зазвичай шукають вузлові утворення діаметром понад шість міліметрів. Якщо вузлове утворення має менший діаметр, імовірність того що вузлик є злоякісною пухлиною дуже низька, але він може стати зачатком злоякісної пухлини, тому лікарі періодично перевіряють їх збільшення з часом отриманням КТ знімка легенів один раз за рік. Переглядаючи та аналізуючи КТ зображення легенів, рентгенологи ретельно перевіряють тканини шар за шаром, аналізуючи просторові залежності між підозрілими вузликами. За таким підходом зроблено спробу застосувати схожий метод аналізу раку легенів у системі автоматичної діагностики.

## ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ ТА ЛІТЕРАТУРИ

Проблема автоматичного діагностування раку легенів може бути розглянута як задача класифікації злоякісної пухлини на зображенні КТ, що являє собою тривимірне зображення легенів пацієнта. Зазвичай розмір КТ зображення дуже великий, тому помістити його в пам'ять відеокарти разом з більш-менш великою нейронною мережею неможливо. Наприклад, набір даних DSB 2017 [2] має розмір  $512 \times 512 \times (\text{кількість шарів})$ . Кількість шарів у зображенні КТ залежить від роздільної здатності сканера, за допомогою якого виконується обстеження пацієнта. У деяких випадках набір даних містить близько 350 шарів. Оскільки вимоги до обчислювальної потужності пам'яті машини підвищуються кубічно з розміром тривимірного зображення, існує декілька підходів для побудови систем діагностування з урахуванням таких обмежень.

Кожен шар КТ зображення можна опрацьовувати як окремо, так і з серією двовимірних даних, використовуючи вже відомі архітектури двовимірних згорткових нейронних мереж — DenseNet [3], ResNet [4] або Xception [5]. Система будується таким чином: кожен шар КТ зображення пропускається через двовимірну згорткову нейронну мережу, яка на виході повертає ймовірність на шарі злоякісної пухлини. Після отримання результатів для кожного із зображень рішення про наявність приймається на основі припущення задачі багатозразкового навчання (Multi-instance learning); якщо хоча б один шар КТ зображення містить злоякісну пухлину, то вважається що все КТ зображення містить злоякісну пухлину. Якщо на жодному шарі зображення не виявлено злоякісної пухлини, то вважається, що все КТ зображення не містить злоякісного утворення.

Однією з найбільших переваг використання такого підходу є можливість перевикористання великої кількості навчених на ImageNet згорткових нейронних мереж. Не зважаючи на те, що вони навчені на даних, які не належать до знімків легенів або медичної галузі, виявлені низькорівневі ознаки на одному наборі даних є корисними і пришвидшують навчання нейронної мережі на іншому наборі даних, а також підвищують точність роботи нейронної мережі [6]. Однак такий підхід ігнорує тривимірну природу даних, а отже, ігнорує просторові залежності між шарами знімка КТ. Тому такий підхід працює, але його можливості досить обмежені.

Іншим підходом є створення тривимірних згорткових нейронних мереж, що можуть використовувати тривимірні дані на вході. Для перетворення КТ зображення у тривимірне потрібно об'єднати всі шари зображення, наклавши двовимірні зображення один на один. Тоді таке зображення можна подавати на вхід тривимірної нейронної мережі. Як згорткову нейронну мережу можна використовувати такі моделі, як C3D [7], або 3D DenseNet [8]. Але зазвичай в медичному домені розмічених даних небагато, і їх не достатньо для того, щоб навчити такі нейронні мережі повністю. Тому підходи [9] передбачають два етапи: сегментацію та класифікацію. На етапі сегментації тривимірне згорткове нейронна мережа намагається знайти ділянки, на яких можливе злоякісне утворення. Для навчання цієї нейронної мережі набір даних має містити інформацію про ділянки, які вказують на наявність потенційно злоякісних утворень. Таку інформацію попередньо описують рентгенологи. Після етапу сегментації виявлені підозрілі ділянки легень подають на тривимірну згорткову нейронну мережу, що прогнозує ймовірність раку в кожній з підозрілих ділянок. Якщо хоч в одній з вибраних ділянок ймовірність раку буде високою, система розглядатиме все тривимірне зображення як таке, що містить рак легенів. Це збігається із припущенням у багатозразковому навчанні. Як показують праці [9, 10], тривимірні згорткові нейронні мережі можуть досягати точності роботи рівня людини, що становить близько 87% правильних відповідей. Система може також надати інформацію про ділянки з виявленими пухлинами, що спрощує взаємодію лікарів з подібними автоматизованими системами.

Попри всі досягнення і переваги використання тривимірних згорткових нейронних мереж, зроблено спробу побудувати систему, яка працює за принципом того, як це робить людина, і перевірити, яких результатів можна досягти з таким підходом. Професійний рентгенолог, досліджуючи КТ знімка пацієнта, переглядає кожне зображення легенів, виявляючи ділянки, які містять потенційно злоякісні утворення. Перевіряючи кожний шар, рентгенолог запам'ятовує інформацію про підозрілі ділянки на попередньому шарі і намагається пов'язати цю інформацію з тим, що є на поточному шарі, враховуючи просторові залежності, розміщення, форму та морфологію. Подібний підхід можна спробувати реалізувати в автоматизованих системах за допомогою рекурентних нейронних мереж.

## **ОПИС ВИКОРИСТАНИХ НАБОРІВ ДАНИХ**

Для діагностування та перевірки наявності раку легенів зазвичай використовують КТ. Зображення, отримане за допомогою КТ, складається із серії рентгенівських знімків, узятих під різним кутом з різних положень. Такі знімки

можуть містити зображення різних тканин, кісток та кровоносних судин. У випадку знімка КТ для діагностування раку легенів зображення робитиметься на рівні грудної клітки пацієнта і міститиме зображення легеневої тканини. Якщо об'єднати отримані зображення в одне, наклавши їх одне на одне, матимемо тривимірне зображення легенів, яке надалі можна використовувати як вхід для нейронної мережі. Діагностуючи рак легенів, рентгенологи шукають ділянки, на яких є злоякісні скупчення, що утворюють вузлики. Зазвичай під час діагностування намагаються віднайти всі вузлики, навіть якщо вони не дуже великі. Небезпечними і найбільш імовірними злоякісними утвореннями вважаються вузлики розміром 6 мм і більше. Малі вузлики перевіряють протягом певного періоду часу на наявність їх росту. Якщо малий вузлик за півроку чи рік значно збільшився, це може свідчити про рак легенів.

Експерименти та навчання нейронної мережі проводилися з використання наборів даних LUNA [11] і Data Science Bowl 2017 (DSB 2017) [2]. DSB 2017 містить КТ зображення для більше ніж 1000 пацієнтів, кожен з яких містить інформацію про наявність раку легенів на знімку. Інформацію про наявність раку підтверджено діагнозом в лікарні. DSB 2017 розбито на тренувальну, перевірку та тестову вибірки, які містять 1397, 198 та 506 зображень КТ пацієнтів відповідно. Тренувальна вибірка є не збалансованою і має 1035 прикладів без наявних ознак раку та 362 зображення-прикладі, що містять пухлину. Набір даних LUNA включає 1186 міток ділянок, що позначають потенційно злоякісну пухлину у 888 пацієнтів. Дані були отримані й описані професійними рентгенологами. Приклади потенційно злоякісних утворень часто використовуються для вирішення завдань сегментації. У випадку побудованої рекурентної нейронної мережі в роботі використовували ановані ділянки в механізмі уваги.

## ПОПЕРЕДНЄ ОБРОБЛЕННЯ ДАНИХ

Дані в КТ знімках містяться в шкалі одиниць Гаунсфільда, що кількісно відображає густину рентгенівського випромінювання. Усі КТ сканери налаштовані та відкалібровані точно вимірювати ці значення. За замовчуванням у наборі даних DSB 2017 наявні не в шкалі Гаунсфільда, тому перед початком використання їх потрібно конвертувати. Це можна зробити шляхом перемноження значень пікселів зображення та параметра «rescale slope» і значень параметра «rescale intercept» [12]. Ці параметри задаються виробником сканера і доступні в метаданих dicom файлу. У наборі даних LUNA це робити не потрібно, оскільки тут значення пікселів уже містяться в шкалі Гаунсфільда.

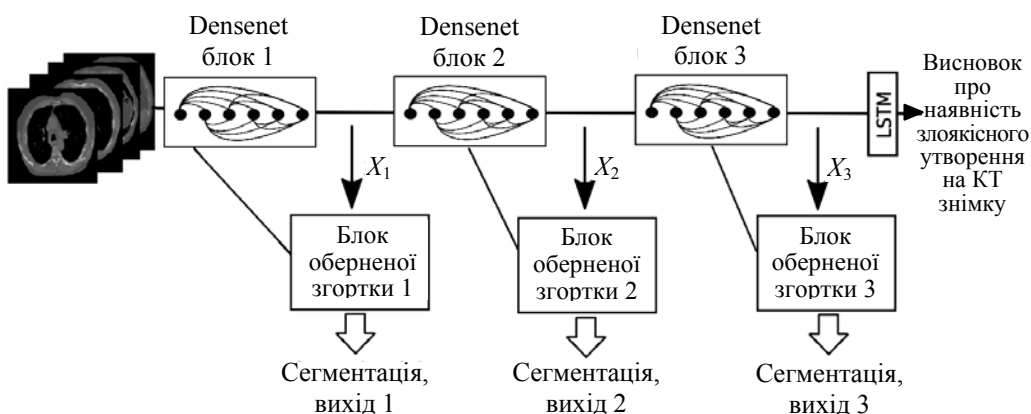
У шкалі Гаунсфільда кожний вид біологічної тканини, кістки, кров, судини мають свої значення рентгенівської густини. Цей факт широко використовують для відфільтрування із зображення, що не стосується легенів. Для цього було відфільтровано всі значення пікселів, які більші або дорівнювали 600. Останнім кроком у попередньому обробленні є зміна розміру зображення та нормалізація значень пікселів для пришвидшення навчання нейронної мережі. У розгляданому випадку кожен шар КТ зображення зменшено до розміру 200×200 для зменшення розмірності вхідних даних.

## ПОБУДОВА ТА НАВЧАННЯ РЕКУРЕНТНОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

У дослідженні вирішено спробувати реалізувати рекурентну нейронну мережу, яка б розглядала КТ знімок у спосіб, подібний до того, як це робить людина. Для цього потрібно поєднати між собою двовимірну згорткову нейронну мережу та рекурентну нейронну мережу. Як двовимірну згорткову нейронну мережу використано DenseNet [3], тоді як рекурентна нейронна мережа реалізована у вигляді LSTM [13]. У цьому випадку згорткова нейронна мережа є екстрактором ознак, який виділяє найбільш важливі ознаки в кожному шарі КТ знімка, а LSTM прогнозує наявність злоякісного утворення в легенях, аналізуючи послідовність отриманих ознак із згорткової нейронної мережі. Тобто рекурентна мережа навчається аналізувати інформацію і залежності між різними шарами КТ знімка з урахуванням тривимірної природи. Спробою навчити таку модель отримано точність роботи нейронної мережі на рівні 0,72, що значно нижче від точності, досягнутої тривимірними згортковими нейронними мережами. Основною проблемою навчання такої мережі є недостатня кількість прикладів у тренувальному наборі даних, що зумовило серйозні проблеми перенавчання.

Для поліпшення роботи нейронної мережі потрібно було розділити задачу на підзадачі, як і у випадку тривимірних згорткових нейронних мереж. У праці [14] автори будували систему для розпізнавання пошкоджень у головному мозку людини на базі КТ знімків черепа людини. Основна особливість побудованої нейронної мережі полягає у використанні механізму уваги [15], яка надавала інформацію нейронній мережі про локацію злоякісного утворення на знімку під час етапу навчання. Локація злоякісного утворення бралася із набору даних, попередньо описаного професійними рентгенологами. Такий підхід значно підвищував точність роботи нейронної мережі зі знаходження пошкоджень у головному мозку людини. Тому було вирішено використати схожий механізм для підвищення точності роботи рекурентної нейронної мережі для виконання поставленого завдання.

В існуючу модель DenseNet + LSTM після кожного Densenet блока додали блоки оберненої згортки (див. рисунок).



Кінцева версія рекурентної нейронної мережі для прогнозування раку на КТ знімку

Додані блоки оберненої згортки під час навчання використовуються як механізм додавання інформації про ділянки злоякісного утворення і виконують сегментацію. Такий механізм надає нейронній мережі інформацію

про місце виявлення проблемної ділянки та стимулює більше приділяти увагу саме потенційно небезпечним ділянкам. Блок оберненої згортки складається з декількох послідовно з'єднаних шарів згортки  $1 \times 1$  та оберненої згортки для відновлення вихідного розміру зображення. Між відповідним DenseNet блоком та шарами з блока оберненої згортки існують додаткові зв'язки, зроблені в такій ж манері, як і в нейронній мережі типу U-Net [16]. Це необхідно для покращення роботи шару оберненої згортки.

Для навчання створеної рекурентної нейронної мережі з механізмом уваги необхідно виконати додаткові кроки оброблення тренувальної вибірки. У наборі даних LUNA [11] є попередні описані рентгенологами координати знаходження потенційно злоякісних утворень, з використанням цієї інформації створено маски, які застосовуються для порівняння того, що повертає нейронна мережа після кожного з блоків оберненої згортки і включення цієї інформації у функцію втрат. Набір даних DSB 2017 не містить інформації про злоякісні утворення в легенях, тож перевикористано описи підозрілих ділянок, створених в межах праці [9].

Під час навчання нейронної мережі використовували DenseNet з глибиною 121, яка була попередньо навчена на наборі даних ImageNet. Використання попередньо навченої нейронної мережі дозволило отримати кращу початкову ініціалізацію вагових коефіцієнтів мережі, що пришвидшило процес навчання. Фінальну функцію втрат визначено як суму з ваговими коефіцієнтами між функціями втрат для задачі класифікації та задач сегментації (визначених блоками оберненої згортки). Навчання нейронної мережі відбувалося за допомогою стохастичного градієнтного спуску з початковим значенням коефіцієнта навчання (learning rate) 0,0005. Упродовж навчання коефіцієнт навчання змінювався вручну залежно від динаміки навчання побудованої мережі. У результаті навчена нейронна мережа показала точність роботи на рівні 0,81.

## РЕЗУЛЬТАТИ

У роботі були навчені два різні види рекурентних нейронних мереж, які описано в попередньому розділі. Перша рекурентна нейронна мережа складалася з двовимірної згорткової нейронної мережі DenseNet [3] та LSTM [13]. Інша модель додає до DenseNet та LSTM механізм уваги шляхом додавання трьох додаткових задач, що розв'язують задачу сегментації (див. рисунок). Також додано значення точності тривимірних нейронних мереж, отримані іншими авторами, для порівняння результатів, здобутих для рекурентної нейронної мережі з іншими підходами.

Результати проведених експериментів та порівняння з тривимірними згортковими нейронними мережами наведено в таблиці.

Models	Accuracy
DenseNet + LSTM	0,72
DenseNet + LSTM з механізмом уваги	0,81
DSB 2017 winner model [9]	0,87

## ВИСНОВКИ

Побудована рекурентна нейронна мережа показала задовільні результати, що не дуже відрізняються від рівня точності людини, але все ще гірші за результати, отримані за допомогою тривимірних згорткових нейронних мереж. Результати показують, що для кращого навчання і роботи рекурентної нейронної мережі необхідно використовувати механізм уваги, що допомагає нейронній мережі навчитися звертати увагу на дійсно злоякісні утворення. Сам механізм уваги реалізовується як додаткові задачі сегментації, які дають змогу враховувати інформацію про злоякісні ділянки, що були попередньо ановані рентгенологами. Основною перевагою використаного механізму уваги є можливість перевикористання людського знання для покращення і пришвидшення навчання мережі.

## ЛІТЕРАТУРА

1. World Health Organization, «World cancer report». — 2014. — Available at: <http://publications.iarc.fr/Non-Series-Publications/World-Cancer-Reports/World-Cancer-Report-2014>.
2. Kaggle, Data Science Bowl. — 2017. — Available at: <https://www.kaggle.com/c/data-science-bowl-2017>.
3. Huang G. Densely Connected Convolutional Networks / G. Huang, Z. Liu, L. van der Maaten, K. Q Weinberger // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). — 2017. — P. 2261–2269. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/CVPR.2017.243>
4. He K. Deep Residual Learning for Image Recognition / K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). — 2016. — P. 770–778. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/CVPR.2017.243>
5. Chollet F. Xception: Deep Learning with Depthwise Separable Convolutions / F. Chollet // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). — 2017. — P. 1800–1807. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/CVPR.2017.195>
6. Pan S. A Survey on Transfer Learning / S. Pan, Q. Yang // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. — 2010. — Vol. 22, N. 10. — Available at: <https://www.doi.org/1345-1359.10.1109/TKDE.2009.191>
7. Tran Du. Learning Spatiotemporal Features with 3D Convolutional Networks / Du. Tran, L. Bourdev, R. Fergus et al. // Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). — 2015. — P. 4489–4497. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/ICCV.2015.510>
8. Bui T.D. 3D Densely Convolutional Networks for Volumetric Segmentation / T.D. Bui, J. Shin, T. Moon. — 2017. — Available at: <https://arxiv.org/abs/1709.03199>.
9. Liao F. Evaluate the Malignancy of Pulmonary Nodules Using the 3D Deep Leaky Noisy-or Network / F. Liao, M. Liang, Z. Li et al. // IEEE transactions on neural networks and learning systems. — 2017. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/TNNLS.2019.2892409>
10. Zhu W. DeepLung: Deep 3D dual path nets for automated pulmonary nodule detection and classification / W. Zhu, C. Liu, W. Fan, X. Xie // Proceedings — 2018 IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision, WACV 2018. —

- Vol. 2018-Janua. — 2018. — P. 673–681. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/WACV.2018.00079>
11. *Validation, comparison, and combination of algorithms for automatic detection of pulmonary nodules in computed tomography images: The LUNA16 challenge // Medical Image Analysis.* — 2017. — Vol. 42. — P. 1–13. — Available at: <https://www.doi.org/10.1016/j.media.2017.06.015>
  12. *DicomLookup.* — Available at: <http://dicomlookup.com/lookup.asp?sw=Tnumber&q=%280028,1052%29>
  13. *Greff K. LSTM: A Search Space Odyssey / K. Greff, R. Srivastava, J. Koutník et al. // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems.* — Vol. 28, N 10. — 2017. — P. 2222–2232. — Available at: <https://www.doi.org/10.1109/TNNLS.2016.2582924>
  14. *Grewal M. RADNET: Radiologist Level Accuracy using Deep Learning for HEMORRHAGE detection in CT Scans / M. Grewal, M.M. Srivastava, K. Pulkit, V. Srikrishna.* — 2017. — Available at: <https://arxiv.org/abs/1710.04934>
  15. *Mnih V. Recurrent Models of Visual Attention / V. Mnih, N. Heess, A. Graves, K. Kavukcuoglu.* — Available at: <https://arxiv.org/abs/1406.6247>
  16. *Ronneberger O. U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation / O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox // Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2015. Lecture Notes in Computer Science.* — Springer, 2015. — P. 234–241. — Available at: [https://www.doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4\\_28](https://www.doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4_28)

Надійшла 16.09.2019



**TO THE THEORY OF SYSTEMS:  
A BRIEF LOOK AT THE UNDERLYING OF NOTIONS  
IN THE FIELD OF CONCEPTUAL CONTENT**

**VLADIMIR P. KOLYADA**

**Abstract.** From the systems theory point of view the attempting was made to establish the most suitable logical and semantical conceptual definition for systems notions while maintaining the maximal compatibility in the theoretical field, which enable to bring together systems with any scale and complexity to a single strategy of interpretation of their dynamics. The special semantic clarifications for notions which generating theoretical ground were established. Thus specified fundamental and system-forming processes. Direct relations of specific terms and subtleties of differences of system notions, their roles for creating solid theoretical representation were highlighted. Some examples of the biochemical types are given. An explicit, semantic clarification of some concepts describing the dynamics of systems and states is proposed.

**Keywords:** theory of systems, notions, universal, evolution.

## **INTRODUCTION**

Understanding system-forming phenomena represents itself a highly important field of study, which allows to establish true mechanisms of genesis, development, functional regularity and self-organization of world-perceived systems on the fundamental level, particularly non-linear dynamic systems. Systems approach suggests not just mathematical modeling of some approximately isomorphic systems (whose dynamics are compatible or almost compatible with a certain differential equation) but primarily comprehensive determination and interpretation systems notions that composing itself the essence of explanations for regularity in the theory of systems. Based on exhaustive logical and semantical conclusions in regard to notional definition that composing the units of metalinguistic concept for current issue, we will attempt to specify possible discrepancies in interpretation of systems dynamic from the point of view of system-based phenomena wherein deviating from specific models (restrictions) or establishing compatibility of corresponded logic with as much as possible described systems, at least in hypothetical field. A prerequisite is made for implementation of a general strategy for defining a system without ignoring specialization i.e. avoiding particular mathematical models on the one hand and statistical analysis methods, which is not allowing to fully implement the quality compatibility of the systems under consideration, on the other.

## **SUBSTRATUM (ENVIRONMENT)**

The basis on which a function can be implemented can be considered as an environment. Independently of how the level of abstraction the realization was caused,

the material *movement* (according to the existing interpretation of modern science) eventually happening as the initiator of the function. For the convenient reason the set of all spaces can be named a *real* environment, defining as a universal  $U$  and described as follows:

The *real environment* in system understanding primarily corresponds with the conceptual definition of the active environment that in the inhomogeneous space of which, relatively ( $\dagger$ ), stationary states exist (sustainable active environments on a spatial scale) the dynamics of which are caused by special, local in relation to such systems, constraints (impulses, disturbances, or vice versa, adynamic *iterations*). The real substratum or environment has three major spaces – material (physical)  $M$ , functional  $P$  and also informational  $I$ , when the material substrate is identified to the state of the system, which behaves in accordance with the natural (physical, chemical, etc.) constraints of environment when

$U \equiv M^{\frac{n}{m}} + P^n + I^n$ ,  $M^{\frac{n}{m}} \supseteq P^n \supseteq I^n$ ,  $M^{\frac{n}{m}} : M^{\frac{n}{m}} \rightarrow f(P^n) : P^n \rightarrow I^n$  provided  $n(M, P, I)$ ,  $m \rightarrow \infty$ , where  $n$  — dimension of action space,  $m$  — coefficient of restrictions. In accordance with the systems approach and continuity problems, the physical space can be formally identified with the functional space, when the concepts of movement and action in a logical-semantic sense describe the same observable phenomenon on some continuum set.

The *functional environment* (functional space) corresponds to an abstract ideally isomorphic projection of the material substrate and expressed in the degree of negentropy or its functional ordering. *Informational environment* (information or signs space), is an abstract ideally isomorphic projection of the functional and the material substrate accordingly and expressed in the degree of negentropy or its informational order. Thus, is highlighting a separate class of functional and information systems that exist at a certain abstract level and are a consequence of entropy-negentropy (chaos $\dagger$ ) or a form (structure) of material substratum being at the same time absolutely isomorphic to the material substrate. The environment is a set of systems ideally isomorphic to each other, simultaneously acting in qualitatively different spaces when the unity of the environment is expressing through the isomorphism. Therefore, in the process of analyzing a certain system, often, the entire axis of related systems can be analyzed simultaneously.

An important characteristic of the functional environment is the tendency to change its functional concentration from state to state (in the process of movement) or analyzing from the perspective of the information environment — a change in the information order. In other words, a functional substrate is more functional than it is more ordered and more addicted to implement informational order or information synthesis. It should be noted that the orderliness and stability of the environment are not identical notions – orderliness tends to predetermine sustainability, in turn, stability tends to negative orderliness.

The unity or atomicity of the real environment is caused not only by its internal isomorphic nature but also by the presence of cyclical conditioning of its material, functional and informational components whose existence is possible only in their equal dependence on each other. For example, in the absence of a functional or informational component, the substrate would be in the first case a model with no dynamics, changes, movement, and therefore *progressive* exis-

tence. In the second case, the absence of communication possibilities between the states generating the signal. This absence inevitably leads to a constant increase of the entropy limit on any scale of the system and, to the progressive existence of a real substrate accordingly.

As the environment moves and the functional concentration fluctuates, the phenomenon of sustainability is formed inevitably and obviously predetermining fundamental evolutionary movement whose dynamics have multiple progressive polymorphism. It is also obvious that there is a phenomenon that predetermining different behavior of the local environment while maintaining a general self-similarity of action to some scale when system dynamics are described by local characteristics ignoring the set of lower order using summation and upper order using instantiation respectively. Such a pattern in the environment naturally indicates the occurrence of attenuation of the dependence between actions in the space of functions, when the index of functional importance decreases as the action vector moves away from a function to a certain target state with minimal importance. The scopes of such an “egocentric” set in the space of functions that highlights the transition area of the function to the external environment and losing its quality importance, defines the concept of the *visibility limit* for a certain functional system.

The visibility limit of the system corresponds to the length of the vector or scale of the system that the functional particular properties of which beyond its boundaries no longer matter. From the point of view of the physical environment, the visibility limit actually corresponds to the spatial geometric structure of the system (which has fairly clear functional ambits).

## **RESTRICTIONS**

It is important to note that the limitations that synthesize the deterministic probabilistic characteristics of the system also constitute the essence of any state and action. States and actions are the executive tools in the space of the environment or phenomena that form the dynamics while restrictions are a direct determinant factor. At the same time, all phenomena synthesized by environmental restrictions certainly are cross-cutting and therefore interact at different levels with different recursiveness and synthesized (including itself) probabilistic factors. We emphasize that the concept of restriction means a non-classical increase in the “rigidity” of the system’s dynamics due to the transformation or replacing the functions of local sets and accordingly devoid the degree of freedom of a limited system. The consequence of the conditional *absolute* removal of restrictions from a certain system, obviously will be the primitivization of the system’s structure by devoid it of the corresponding fundamental properties which predetermine the dynamics of such a system in the environment. Formally, we can say that the restriction  $r$  corresponds to the function (attribute) of the set  $n$  of some system  $S$  in the material environment, when  $r = f(n) \subset S$ .

## **NOISE AND CHAOS**

The concept of noise and chaos in a semantic sense have common features with the only difference that noise is apparently a special case of chaos and closely

related to the concept of dispersion, that is, a phenomenon that has a certain source or beginning the gradual concentration of which differs as it moves, if spatial restrictions contribute to this. The presence of noise in some state naturally implies the existence of a source of such noise and thereby defining the element of noise as part of the gradual dispersion as it moves, in the distal direction, functional and information uncertainty increases (Lyapunov exponent). It can be considered that in relation to another system such an element of noise contains less of functional importance. To achieve a scale of uncertainty that goes beyond the visibility (when turbulent flows form signs of homogeneity beyond the scale) the set of such dissipation can correspond to the criterion of chaos<sup>†</sup>.

Thus, the only source of increasing uncertainty and negative ordering in the real environment is the phenomenon of noise (or intersection of vectors  $V_n$  of the functional state  $A$  of the set  $a$  in the state  $B$  of the set  $b$ , when

$$V_a \subset A_a = \sum_{k=1}^n a_k, \quad V_b \subset B_b = \sum_{k=1}^n b_k, \quad V_a \cap V_b,$$

at  $n \rightarrow \infty$  in continuity) coming from some state, that is the system or state is a source of noise the dispersion dynamics of which generates a functional “pattern” constituting the topological essence of the system. This is not directly about the scenarios of the chaos appearance eg Ruelle–Takens, Pomeau–Manneville or Feigenbaum as noise generators, but about the structure of the dynamics in the physical environment, where each state is an element of noise regardless of whether such a state moves (on a certain scale) with a chaotic potential or not. An example of an elementary formal representation of the appearance of homogeneity (an increasing uncertainty) is any  $2n$ -dimensional model on the Poincaré map with increasing energy (eg Henon–Heiles model) [1]. It is worth to noting that isomorphic interpretations of such a phenomenon are undoubtedly relevant in the functional and information spaces of any level of the hierarchy and probably play a key role in understanding the origin of instability initiation.

The more distally the vector (action) of such a “pattern” is from its central structure, the more its properties tend to be interpreted as the notion of the randomness phenomenon (or increasing complexity as going beyond visibility) and the less likely it is to form under pressure of restrictions. Obviously, with the removal sources of noise step-by-step from the environment, primarily localized “strange” (chaotic) attractors, it is possible to achieve complete determination of any system. It seems that the reduction of restrictions increases the tendency to acquire geometric invariance or self-similarity and fractal similarity of the real environment in scale.

Entropy-negentropy, mainly and probably the only way, comes from inside the state as functional and informational signals having a destructive or, on the contrary, stable potential and further, as the scale increases, generates other state models thus forming the essence of the system topology in the substrate.

The noisiness of the environment, as a result of restrictions, creates a probabilistic<sup>†</sup> situation in the environment that forms an effective or progressive functional substrate. The probabilistic situation in a logical-semantic sense is probably identical to the quantitative measure (density) of the environment on a scale. The probability of state synthesis is determined which somehow or another enters into a dependent relation to the presence of a certain (e.g. high or low) probability

of synthesis of another set which may also be included in other probabilistic dependencies, etc. Thus, the hierarchical synthesis of states and their dynamics in a probabilistic field, which in turn is a derivative of noise in a substrate, is self-regulated.

There is an important feature of radiation in any state that can be observed, when the noise pattern spreads the worse, the more the importance and specificity of the system in which this pattern diffuses. Due to the fact that any state has an atomic form, (when all vectors that nested in it are strictly determined by restrictions) the concept of state radiation is an abstract interpretation in the sense that there is no empty space for any other vector to enter, due to their continuity or infinite density. The notion of the absence of empty space in the state is interpreted as an estimation in a quasi-space that describing the possibility of replacing one set by another if it were possible. In this case, it is impossible to replace the noise distribution vector in a certain target state.

Dynamics in quasi-space during vector  $V_n$  assimilation can form situations (properties of restrictions) when the formations  $V_{n+1} \rightarrow V_n$  are not possible due to congestion of the functional space at the same time, entry into the state is possible only after free up a certain functional place in the state. It should be noted that the concept of congestion is compatible only in the case of higher abstractions or abstractions that have more than one functional space for their implementation, unlike a functional environment that has one implementation space (material environment) when the importance and its properties are defined. Biochemical example of a similar phenomenon in general can be the mechanisms of proteins repressors regulation [2, 3].

## **SYSTEM AND STATE**

Previously, the following conceptual formulation of the system and state should be clarified: the single iteration is a state, the system is at least one state, the system forms at least one state.

Any system  $S$  is a determination of some emerging state by means of incoming action vectors  $S(V_n) \rightarrow S'(S)$  and, as a result of this determination, the possibility of influencing or regulating the final state or the vector itself leading to such a state  $S'(S) \rightarrow S(V_n)$ . Individual cases of such mechanisms are clearly represented for example in protein machines, in the regulation of gene expression and lie in the ability to regulate such expression differentially, selectively controlling the expression of the type of a particular gene or protein and its amount [4]. In supercomplex systems, such regulation is already expressed in the pre-psychic and mental apparatus of the regulation of behavior (movement).

*Effective functional movement* is a *higher order* shift of the environmental functional structure relatively to the material set, with such a degree of preservation of this functional structure that will also preserve its informational row, at least, in the visibility limit of the systems related to it, while the primary (lower level) structure of the environment is certainly not capable to moving without moving its isomorphic material structure. An example of a functional structure shift, basically, without qualitative preservation of the information signal on the scale, is the shift of the reading position by one or two nucleotides in the molecu-

lar gene apparatus that is the transition to the second and third functional space. In this case, it is possible both the preservation and the loss of functional translational consequences.

A similar effect occurs during the shift in higher functional fusion processes when two or more functional structures that are shifted into each other assimilating into one unitary structure (it can be considered that such a union occurs when after a merging the final function subsequently generates a signal identical to the function signals, as if they had not merged). Classical isomorphic phenomena in a probabilistic field can correspond to the formations of points or intersections of trajectories in the phase space at the cross-section of an invariant tori set for Hamiltonian systems.

It is necessary to define the concept of the *importance* of the state. The state importance degree of a set also has a rather abstract concept and in fact, it represents the entropy properties of a state in combination with the functional and informational sets that are the components of such a state or determining it also forming ordering and, as a result, stability. In turn, a state with a sufficient number of destructive signals is likely to be tend to the progression of negative ordering and negative importance accordingly. A suitable example of importance in a biochemical scale substrate is highly conserved receptor domains with a high degree of autonomy, for example, steroid or other hormones or proteins, collectively characterized by a high degree of homology, both at the level of the material substrate, when the amino acid sequence is the same or different and does not affect functionally, and at the level of the functional information environment when sequences perform a single function (for example a DNA binding sites) [5]. On the contrary, amino acid receptor sequences with a low degree of homology may have low conservative, highly specialized, highly dependent, material and functional information indicators, respectively. On the contrary, amino acid receptor sequences with a low degree of homology may have low conservative, highly specialized, highly dependent, material (amino acid sequence varies) and functional-information (carry out various or closely related functions, or the functional ability is insignificant on the scale) indicators, respectively. It is important to emphasize that at the same time similar properties are preserved even within different taxonomic categories, which may indicate constellation genesis in duplicating such a material and/or functional (with isomorphic topology and different material structure in the functional case) structure raised under the restrictions of a similar strategy (algorithm), or indicate congenitality for a specific ancestral gene, due to the fact that quite often closely related proteins performing similar functions have a common genetic ancestor or at least these genes were more or less homologous.

Importance in the information substrate can also be interpreted as a measure of the functional state stability. An example of informational destruction in a biological substrate can be the final death of the immune system B-cell with unsuccessful V-D-J genes functional recombination forming the H- and L- antigen chains [6] which is in the role of the functional essence of the cell without the possibility of restructuring its purpose with no changing the scale, when entering into another information vector at the current scale is impossible and therefore the cell is phagocytosed through certain mechanisms dissolving in the environment. Thus, the system is fragmented to a certain steady state where an attempt will be made to reach the target state in fragments in accordance with the established

restrictions. Such of destruction can be a particular example of the fluence phenomenon and finiteness of importance.

From the informational point of view, the degree of the functional structure importance predetermines, apparently, the *saturation* of signal or saturation can probably be called as the amount of importance, that is, the number of vectors and especially important vectors included in the signal and thus determining the degree of importance of such a signal.

It should be noted specialization and variable properties of importance. Previously, we shall to determine an evolutionary peak notion, which is based on the synthetic theory of evolution and synergetic, can be a system that is stable on long evolutionary periods of time and corresponds to the maximum-specific categorization of matter. For example, in life, this corresponds to the categories of the species and subspecies.

A distinctive feature of systems that are more susceptible to the evolutionary peak from less susceptible systems is the specialized feature of the direction of the signals of such states or their inclusion in certain significant systems specific for such a state (cycles, constellations, regulation, etc.). In this case, for example in multicellular organisms, many unstable cells that have undergone degeneration that destabilize the microprograms and accordingly the higher programs in which they belong. The special and, on the contrary, universal functions of such a set depend on variable factors that determine the importance of individual, functional-information programs that run such cells. There are special factors that have many dependencies, which in turn have their own algorithms for regulating the importance and when changing their dynamics (self-destruction) they are capable of much more disturbing the main program, in contrast to a large number of factors with insignificant importance, which is natural. In relation to the self-destruction, it should be clarified that states with high importance (orderliness) tend to be stable but also, the occurrence of a destructive signal that capable of destabilizing and destroying such a state is permissible.

There is an important pattern in the environment - function-dependent states, as a rule, tend to convergence† or reduce the distance of signal communications as effectively as possible and of course the intensity of such a phenomenon is the higher, the closer a state is localized to a certain evolutionary peak. Due to such a convergence, only and only the function of the highest order  $f'(x)$  of the formed system  $P$  corresponds to the informational purpose  $I$  of the same order  $I(f'(x))$ , because the final function is the limit functional-information structure  $G_{PI}$  of a certain scale of the set  $U \supset G_{PI}$  and can be performed only on such a specific scale:

$$G_{PI} \approx f'(x)_{n+1} = f(G_P): G_P \rightarrow G_I, \exists T \subset G_{PI} \rightarrow f'(x)_{n+1}, T \approx \sum_{k=1}^n f(x)_k,$$

where  $T$  is some important set for  $G_{PI}$ .

Separately, the functions  $f(x)$  of the set  $f'(x)$  are characterized by a specific dependence that highly prepossessed to functional incompleteness and vulnerability with functional deviations from the usual scale or a measure of secondary functional isomorphism in an environment where secondarity is expressed as quantitative qualities without including the main informational purpose (the quin-

tessence of the function fragment). One way or another the higher organism cannot conduct an adequate functional informational activity, for example, without a nervous system, a classic computer without a storage device, a camera without an optical device, but with no doubt, you can try to hammer a nail or split a nut with this camera.

Thus, it is defining the concept of the universality degree of a state which is in a general sense is comparable to the concept of importance and in a particular sense is inclined to gradual properties i.e. a tendency to functional concentration or specialization or on the contrary a tendency to functional dispersion. A limit  $G_{PI}$ -type structures specialized on the one hand and common on the other, are mainly expressed depending on the scale in the environment. At the same time, the specialized function, as a special case of the general, is represented in the minimum permissible instance and is the quintessence of the functional information state.

The target or informational affinity of vectors is determining by the measure of the intersection of such vectors in the space of functions. The target similarity of vectors is determined by the degree of the topological identity of such vectors (which is usually accompanied by algorithmic similarity). Thus, the target or informational similarities are not always related but are always similar algorithmically. Consequently, the similarity of structures regulating (which have affinity respectively) states that perform similar functions is the higher, the higher the similarity of the information purposes of such functions. In turn, the similarity of state structures as functions of an informational purpose, which regulating states that perform similar functions, the higher, the higher the similarity of information goals of such functions and so on. In this interpretation, the gradual dependences of the substrate's states similarity and the information goals of their functions are clearly manifested. The similarity of the environment structures seems to depend on the functional-informational similarity of their purposes, where the measure of similarity in both cases is the level of their algorithmic isomorphism.

Some states have *special* inducible properties when a disturbance, with certain importance, in the structure of state  $S$ , occurs when there is a special incoming signal  $|i(S)| > 0$  for  $S$  appears, and when  $|i(S)| = 0$  the signal is the absence of a signal, respectively. All states are inducible. Therefore, we are talking about a special induction component of the same special functional-information property of the local state (the most important passing vectors). It is assumed that each state has at least one special inducible attribute or vector.

The state of the  $i$ -potential for  $S$  regulation is the main cause of stability and the general existence of systems in which they belong or the dynamics of the sets which they induce. Such of mechanisms are probably the main and only factor in the formation of coordinated behavior regulation of dissipative systems, which, in turn, determine the dynamics of higher-order sets, etc.

## GENERAL DYNAMIC OF SYSTEM

Each system attempts to establish sustainability, its own independence and integrity on a scale, that forms the limit of visibility or some particular form of emergence  $a'$  as a contour of a separate system  $S$ . Even if the dynamics of  $S$  looks and behaves according to absolute rest  $a'(S)$  (not receiving an impulse from out-



side), there is always an active process  $x$  that is part of such a system  $x \subset S$  even if such a process is not able to qualitatively affect on  $S$  and go beyond the restriction  $a'$  without external disturbances.

A stable functional state is a consequence, first of all, of the balance stability in the structure of its set repetitions which is formed by functional cycles  $f(x)^*$  that come from the depths of the state (fig. 1). Deviations<sup>†</sup> (disturbance appearance) in such cycles determine the balance point shift in the repeat state function  $f(x)^*$  the functional significance of which is dependent on the stability property of a higher order system. During the system movement in scale, the forming intervals on repetitions acquire differences only in the case of a certain exogenous signal presence.

We can define  $N_n$  as the set  $n \rightarrow \infty$  of depth  $D$  in the flow  $P$ :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \dots n_k = N_n, \text{ location of the cyclic function } f(x) \text{ in a state } S \text{ can be}$$

displayed as  $a'^* \supset \sum_{k=1}^n (N_n^{(*)})_k \supset f(x)_n^{(*)}$ . Fig. 1 shows a functional movement of four states that form a motion vector that transfers a stable state  $S_1$  to a stable state  $S_2$  with an unstable structure, where the nested function  $f(\gamma_3^2)$  receives an incoming destructive signal  $i(\downarrow_{\gamma}^2)$ , however, depending on the measure of the functional circuit ( $a$ ) stability that received such a signal is defining its further existence and, consequently, the existence of higher functional circuits  $a'$  when  $a \subset a'$ . In this case, the function  $f(\gamma_3^2)$  acts as a property to prevent the disintegration of the cyclic contour  $f(\gamma_{1-3}^2)$  even with the change in the function  $f(\gamma_3^2)$  (the case when an intrafunctional replacement is carried out without a qualitative change in the signal) algorithm and thereby completely leaving the higher structures  $f(\beta_{1-3}^2)$ ,  $f(\alpha_{1-3}^2)$  intact. Degenerative functions, depending on their synergistic potential, can initiate the disintegration of the functional state with different speed or efficiency. Formally, fig. 1 displays the dynamics of the action space as a continuous one-dimensional linear set in such a way that this set is a reflection or map of the actions that are identical to the real environment. It should be noted that this interpretation is very compatible with the description of coupled mappings in distribution systems [7].

A destructive signal  $i_d$  is such if a destructive potential prevails in it and a stabilizing one  $i_s$  is such if a stabilizing potential prevails in it, respectively. Classical destructive processes are instability, for example, in autowaves, it manifests itself in the formation of turbulence or instability and leading to the rupture of the spirals.

$i_d$  can have stabilizing qualities in some local relations while  $i_s$  destructive, but one way or another  $i_d$  leads to functional destruction and  $i_s$  to functional stability in some  $N_n$ , providing there is no effective resistance of the environment that does not enable the distribution  $i$  out of  $a'$ .

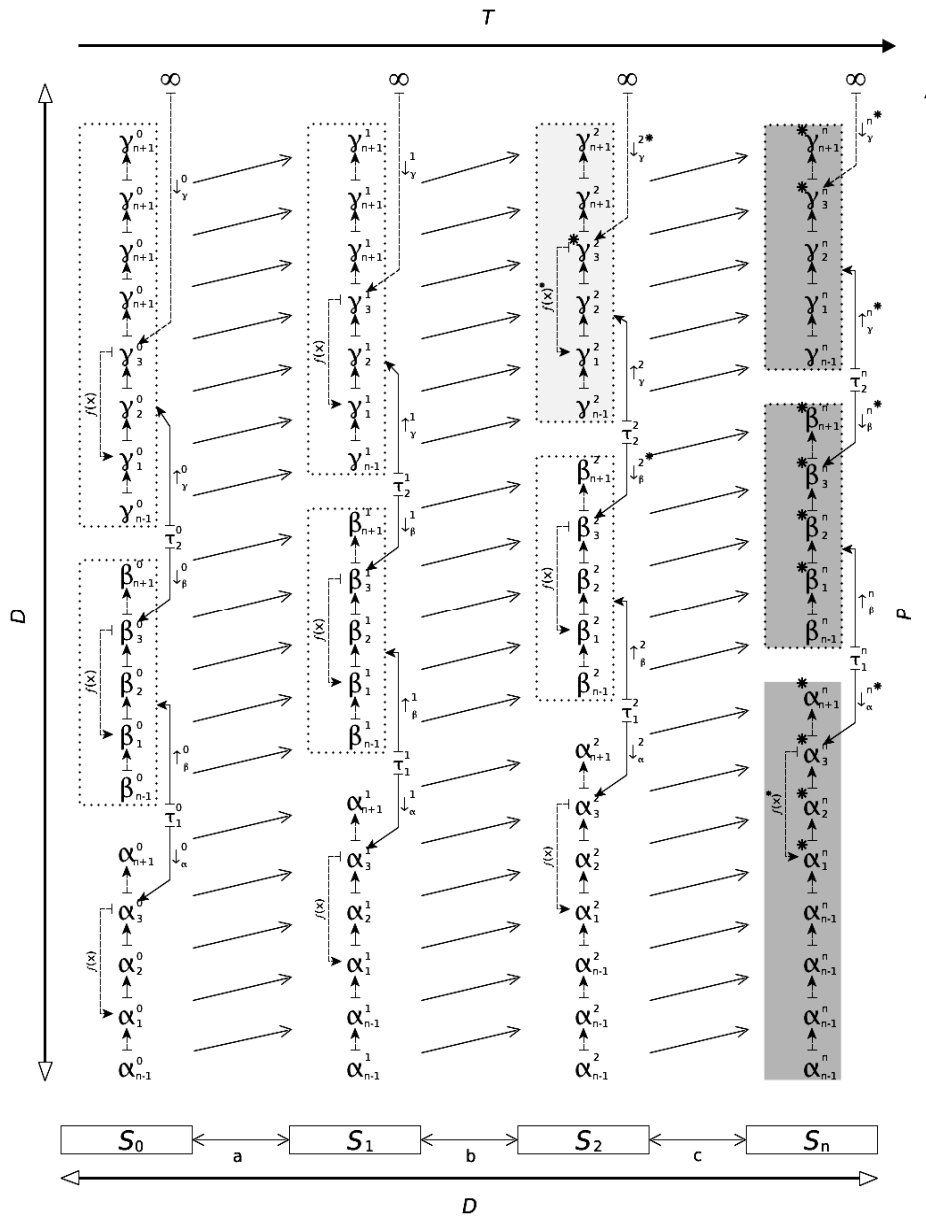


Fig. 1. The diagram illustrates the dynamic features of the functional state in the environmental movement process

The figure displays:  $S_0, S_1, S_2, S_n$  — are states, when  $S_1$  is the repeat of  $S_0$ ;  $S_2$  is the iteration of  $S_1$  etc.;  $\alpha, \beta, \gamma, N_n$  — sets in the environmental scale, when  $\gamma < \beta < \alpha$ ;  $f(\alpha_{1-3}), f(\beta_{1-3}), f(\gamma_{1-3})$  — ranges of cyclic stable function  $P(f(x)) = \sum_{k=1}^n (N_{n(1-3)})_k : N_n \rightarrow i(N_n)$  — is the sum of all qualitative repeats  $f(x)$  of the flow  $P$  which retain the original signal;  $a, b, c$  — are the depths of actions;  $\tau$  — symmetric state (description below);  $\uparrow, \downarrow$  — outgoing and incoming functional-information signals;  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  — noise that is not included in the functional circuit; \* — degenerative functions that reduce the stability of the system

and leading to the rapid disintegration of a stable functional state;  $D$  — scale (depth) of the environment;  $T$  — direction of the environment repeat generation or states map for the next time;  $P$  — flow direction;  $(D, T, P, a(S_0, S_1), b(S_1, S_2), c(S_2, S_n)) \rightarrow \infty$ .

The state  $S_1$  can be considered as a qualitative segment of the state  $S_0$  repetition, that did not receive  $i_d$  to some  $N_n$  of the depth  $D$  or if such a signal was received at the “safe” depth then the function that received the signal has full resistance to it. This class of state repetitions seems to have the greater potential for the complex system’s formation, the larger interval of  $D$  values beyond which the probability in the formation of at least quality destructive signals for the current system  $a'(D)$  is reduced. For example, the state  $S_2$  has an incoming destructive signal  $i_d(*\downarrow_\gamma^2)$ , that does not have sufficient potential for a qualitative (non-structural) effect on the function  $f(\gamma_3^2)$  it happens so that the cyclic function  $f(\gamma_{1-3}^2)$  remains completely intact in relation to the higher functional cycle  $f(\beta_{1-3}^2)$  and state  $S_2$  can also be considered as a qualitative repetition of the state  $S_1$ . In turn, the state  $S_n$  is defined as unstable due to the fact that there is a predominance of self-destructive and not self-stabilizing properties.  $i_d(*\downarrow_\gamma^{(2,n)})$ , with sufficient potential destroys the functional circuit  $f(\gamma_{1-3}^n)$  in such a way that the newly synthesized interval  $N_{\gamma-n}$ , due to its intact functions (functions that have successfully repeated), still not able to qualitatively affect the  $f(\beta, \alpha) \supset f(\gamma)$ . At the same time, a similar situation can also occur in a higher function  $f(\beta_n^n)$  with the only difference that, as a result of a destructive signal  $*\downarrow_\beta^n$ , the number of qualitative repetitions in it will not be enough to form a functional circuit  $f(\alpha_{1-3}^n)$ , which will lead to the complete destruction of the interval on  $S$  and the development of a chaotic regime. With the help of a stabilizing feedback signal  $i_s(\uparrow_\beta^n)$  (or a signal having a local stabilizing potential), the function  $f(\alpha_n^n)$  is quite capable of being qualitatively executed for  $S_{n+1}$  until total destruction, when the structure of involved  $f(\beta_n^n, \gamma_n^n)$  becomes completely inefficient in ensuring the synthesis of high-quality  $S(f(\alpha_n^n))$  repetition.

The processes of a stable system  $N_S$ , the synthesis of which can be carried out by the intersection of certain cyclic (stable) sets  $N_S = N_n \cap N_m$  can also, to some extent, be controlled by states  $N_{nm}$  or other processes that somehow involved in the operation of  $N_S$ . That is, “relatives” of a local functional system, the relatedness of which is the higher, the higher their functional predisposition to such a system. Stable  $N_{nm}$  type states with their algorithm can also initiate such a stable system  $N_{|S+1|}$  that is able to regulatively influence their states-synthesizers  $N_{|nm+1|}$ . Stable states can be in balance† both with each other and with the nearest medium and additively maintain stability through initiation and subsequent regu-

lation of the synthesized states or diffuse recursive regulation of their own functions and other dependent processes in the environment. An indicative and particular example of the described mechanism may be the biochemical functions of the enzymatic intracellular starvation-saturation including extreme cases that lead to the destruction of the system or cell death.

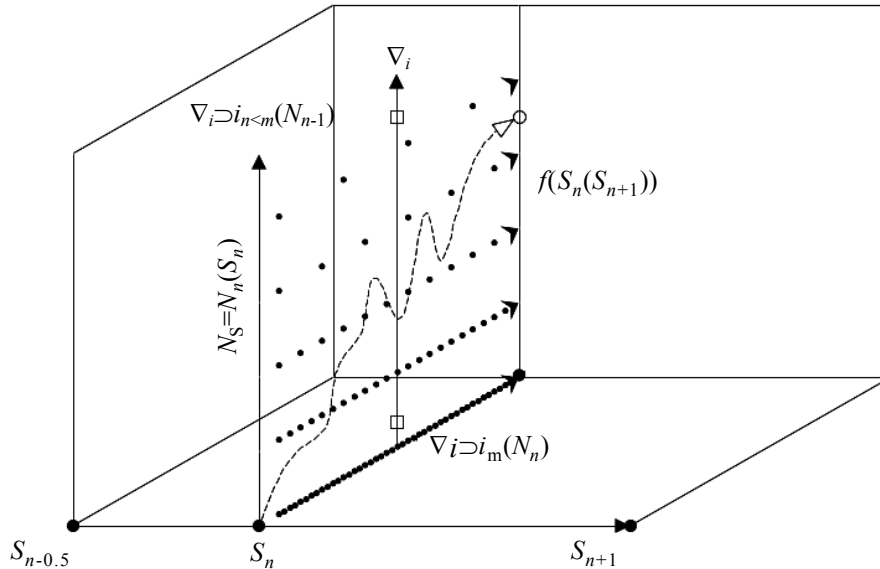


Fig. 2. Dotted arrows schematically indicate the direction of flow in the space of functions, where the depth interval of such a space relatively corresponds to the axis of applycate and indicated by a dotted line with the corresponding density

Processes of individual functional states may have closely related functions or purposes. Previously, in this interpretation, it is worth to characterize the concept of an information gradient (fig. 2) or a changing signal with respect to  $N_{n-1}$ . This effect is a kind of information "fluctuation" with increasing of the distance from the main function, where the fluctuation is expressed as the dynamic  $q$ -parameter of the options set  $A$  of the function that triggers the signal  $i$ , when  $q = f(A)$ ,  $f(A) \rightarrow i$ . In this case, the targets  $\nabla i \supset i_m(N_n)$  of the initial state have the highest concentration (in the  $N$  space) and as the negative scaling proceeds, this functional concentration decreases  $\nabla i \supset i_{n<m}(N_{n-1})$ . The concentration itself is quite similar to the potential function  $f$  for the Laplace operator  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  on a one-dimensional vector space.

It is obvious that the higher the target  $f$  on axis  $N_S$  from the state (at the point  $S_n$ ), the less the probability of this state inductions for  $f$ , which is natural since the number of actions and the entropy factor increase. Consequently, a similar situation arises in a related relation as a special case of  $q$ -parameter in the space of functions.

In addition, as mentioned above, the vectors of closely related functions intersect, and the measure of the relatedness of such functions depends on a quantity of joint states for such vectors and how far these states from each other. Such constellation intersections can form stable states  $N_{nm}$  the number of which becomes dependent on the probability of synthesis a high order steady state  $N'_S$

when  $N'_S(N_S) \supset N_{nm} \cdot N'_S$ , in a particular strategy of self-organization, can have reverse stabilizing signals into itself, ensuring sufficient resistance of the  $N_{nm}$  to degenerative factors. Thus, it is possible that dependencies running in a specialized probabilistic situation (where the general noise level that including the combined levels of uncertainty constitutes a process of states that contributes to the synthesis and subsequent support for the performance of a certain function) with a certain degree of recursion can be or become stable or important states (such as in the regulation of prokaryotic operons [8]).

We can also highlight the phenomenon of the directional regulation, which is a set of stable states vectors at the intersection of which is synthesizing a deterministic state, which, in turn, with a high probability is also stable due to the predisposition of any regulation to stability in principle. From the effectiveness of regulation, the stability or steadiness of regulation is also determined, since regulation itself can occur only in a stable and steadiness dynamic environment.

## **EVOLUTION FEATURES**

The phenomenon of affinity may lead to evolutionary regulation and adjustment of indicators of pseudo-probabilistic intersections as the environment moves. In the first case, the signal with a regulating potential is maintained even under the multiple transformations of the initiating state, and in the second case, the regulation of affinity into itself that executed by the function  $f(|x|)$ .

The ability of complex systems to self-organize and adapt in short-term or long-term (evolutionary) conditions is a natural response to environmental variability. Short-term conditions may correspond in particular to the mechanisms of the Belousov-Zhabotinsky reaction or biological embryonic induction-differentiation. In turn, long-term conditions evolutionary phenomena of allogensis, aromorphosis or anagenesis, etc.

A particular case of long-term self-organization, which seems to have a peak† importance indicator, is the phenomenon of evolutionary cephalization, that reflecting a significant functional similarity between the individual biological systems of an acceptable, higher taxonomic category and the evolutionary movement under correlation factors over time. An artificially† induced adaptation phenomenon can be, for example, the domestication of animals with the subsequent restructuring of the organism's genome and the corresponding phenotypic changes, which is also part of the evolutionary self-organization mechanism.

Corresponding factor of the organization complicating that forming evolutionary peaks in the environment, is an increasing the complexity of the nested systems  $N_{n+1}$  (on a biological scale, this may be the differentiation of individual cells, their groups, membrane, intracellular and other microsystems), organization that synthesizing corresponded return signals of the external environment  $N_{n-1}$  and whose dynamic are also variative. Thus, it is possible to define  $i(\tau)$  (see fig. 1) as a symmetric state in a quasi-space  $I_n$  that inversely complicates the functional-informational structure, which seems to be a crucial part of the evolution strategy in the environment.

The processes of self-organization in all systems and in particular organisms are represented most clearly in the form of protective mechanisms against external and internal influences penetrating the system, increasing the risk of initiating

destructive progress. In the process of evolution, each organism in any way developed a similar system of protection, more clearly in the form of specific internal biochemical reactions, or more generalized in the form of the strategy features of the whole organism's life cycle or their group. Immune-like processes in evolution, obviously modified in proportion to how the organisms themselves changed their habitat and mainly increased the complexity of the system's organization (for example, CRISPR in prokaryotes, RNA interference (RNAi) in plants, or an immune complex of protection against pathogenic effects in higher organisms including humans).

We can conditionally divide the mechanisms of long-term self-organization formed in evolution into two levels. The first is based on more direct dependencies on the structure of the evolutionary movement, and the second level is forming on the basis of indirect or consequence constellations of the first level or states located closer to the periphery on the gradient plane of functional radiation in the environment. If Immune-like systems belong to the first level of self-organization, then at least all other functionally related processes (that are having a much more significant stochastic origin indicator) can be attributed to the second level of self-organization (for example, the phenomenon of allelic exclusion in the regulation of the immune system B-cells differentiation [9, 10]). Anyway, each mechanism having obvious signs of any first level self-organization is located closer to the center of the functional radiation pattern, while the indirect or second level is respectively located to the periphery.

## REFERENCES

1. *Hénon M.* The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments / M. Hénon, C. Heiles // *The Astronomical Journal*. — 1964. — **69**. — P. 73–79.
2. *Campbell K.* Protein-Mediated Translation Repression / K. Campbell, J. Beckwith, J. Davies, J. Gallant // *Gene Function in Prokaryotes*. — New York: Cold Spring Harbor Laboratory, Cold Spring Harbor, 1983. — P. 185–187.
3. *Uhlenbeck O.C.* Interaction of R17 Coat Protein with Its RNA Binding Site for Translational Repression / O.C. Uhlenbeck, J. Carey, P.J. Romaniok et al. // *J. Biomol. Structure and Dynamics*. — 1983. — **1**. — P. 539–552.
4. *Weissbach H.* Molecular Mechanisms of Protein Biosynthesis / H. Weissbach, S. Pestka. — New York: Academic Press, 1977. — P. 605–613.
5. *Singer M.* Ganes and Genomes / M. Singer, P. Berg. — 1991. — P. 514–532.
6. *Singer M.* Ganes and Genomes / M. Singer, P. Berg. — 1991. — P. 783–799.
7. *Loskutov A.Yu.* Basics of Complex Systems Theory / A.Yu. Loskutov, A.S. Mikhailov. — Izhevsk: Computer research institute, 2007. — P. 393–428.
8. *Bauer C.* Attenuation in Bacterial Operons. Gene functions in prokaryotes / C. Bauer, J. Carey, L. Kasper. — New York: Cold Spring Harbor Laboratory, 1983. — P. 65–89.
9. *Mostoslavsky R.* The lingering enigma of the allelic exclusion mechanism / R. Mostoslavsky, W. Alt Frederick, K. Rajewsky // *Cell*. — 2004. — Vol. 118, Issue 5. — P. 539–544.
10. *Liang Hong-Erh.* Variegated transcriptional activation of the immunoglobulin kappa locus in pre-b cells contributes to the allelic exclusion of light-chain expression / Liang Hong-Erh, Hsu Lih-Yun, Cado Dragana, S. Schlissel Mark // *Cell*. — 2004. — Vol. 118, Issue 1. — P. 19–29.

Received 10.04.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

## СИСТЕМА ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ СТАНУ ПОВІТРЯ ЗА НЕТОЧНИХ ВХІДНИХ ДАНИХ

Р.В. КРИВАКОВСЬКА

**Анотація.** Розглянуто питання проектування структури системи підтримання прийняття рішень для оцінювання стану атмосферного повітря за неточних вхідних даних, а також методологію побудови інформаційних систем, їх переваги і недоліки при застосуванні до питання проектування системи підтримання прийняття рішень для оцінювання стану атмосферного повітря за неточних вхідних даних. Досліджено потоки даних і на їх основі запропоновано відповідну діаграму, а також структуру системи в цілому. Розглянуто побудову бази моделей як частини складної системи, різні аспекти функціонування системи, зокрема такі, як організація обміну даними, визначення умов застосовності та верифікація моделей, синхронізація роботи різних частин системи.

**Ключові слова:** оцінювання стану повітря, система підтримання прийняття рішень.

### ВСТУП

Оцінювання стану навколишнього середовища потребує розроблення комплексних інформаційних систем на основі моніторингу стану довкілля, моделювання процесів надходження та поширення шкідливих речовин, а також створення ефективних методів прийняття рішень для зниження небезпечних впливів на екосистеми та здоров'я населення.

Для оцінювання стану навколишнього середовища доцільним є створення інформаційних систем із функціями підтримання прийняття рішень (СППР) щодо регулювання параметрів викидів забруднювальних речовин в атмосферу для забезпечення заданих стандартів якості повітря [1–4].

Особливістю завдань з оцінювання стану атмосферного повітря є те, що дані, які подаються на вхід таких систем, як правило, є неточними. Тому під час проектування систем оцінювання стану атмосферного повітря необхідно передбачити блоки, які б дозволяли працювати з такими даними і отримувати задовільні результати за подібних обмежень.

### ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

У роботі розглядається вирішення завдання загального опису сучасної інформаційної системи оцінювання стану атмосферного повітря (ІСОСАП), її основних блоків та функціональних режимів. Інтерактивна інформаційна система має містити базу даних, блоки моделювання, прийняття рішення, введення та візуалізації даних, інформування населення. Система повинна забезпечувати швидкий та зручний інформаційний обмін між усіма корис-

тувачами інформаційної системи, а також мати змогу оперативно надсилати повідомлення особам, що приймають рішення, у разі потреби. Для цього необхідно розглянути структуру такої системи в цілому, визначити потоки даних, наявних у подібних системах, з'ясувати функції, які виконують окремі блоки цих систем, побудувати діаграми низового рівня для них.

## **РОЗРОБЛЕННЯ СТРУКТУРИ СИСТЕМИ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ**

Вибір методології проектування інформаційної системи є важливим кроком, оскільки правильне використання методологічних засобів дозволяє пришвидшити процес проектування і запобігти появі механічних помилок.

Є декілька підходів, використовуваних для побудови інформаційних систем. Два основні з них — це структурний та об'єктно-орієнтований підходи [5].

Згідно зі структурним підходом спочатку створюється структура системи, яка надалі розбивається на підструктури й уточнюється. За об'єктно-орієнтованого підходу спочатку розглядаються об'єкти, з яких складається система, які потім об'єднуються в цілісну структуру. Обидва підходи мають недоліки.

Недоліком об'єктно-орієнтованого підходу є те, що в разі інтеграції декількох об'єктів у цілісну систему може виникнути ситуація, коли об'єкти не є сумісними. Структурний підхід не має цього недоліку, але під час його використання може виникнути ситуація, коли створена структура системи не відповідатиме її завданням (наприклад, якщо функції завдання системи змінилися або були уточнені після проектування) [5].

Розглянемо засоби, що використовуються для проектування інформаційних систем за обох підходів до їх створення.

Під час проектування інформаційної системи за структурним підходом використовуються дві групи засобів, які відображають відповідно функції, що виконує система, та потоки даних у ній. На сучасному етапі розвитку кожній групі засобів відповідають такі технології:

— для зображення функціональної структури системи — методологія SADT (Structured Analysis and Design Technique) і відповідні діаграми;

— для аналізу потоків даних — діаграми потоків даних або DFD (Data Flow Diagrams) [5].

У межах об'єктно-орієнтованого підходу існує декілька методологій, таких як OMT (Object Modeling Technique), JSD (Jackson Structured Development), OSA (Object-Oriented System Analysis) [5]. Натепер стандартом об'єктно-орієнтованого проектування де-факто є проектування за допомогою мови UML [6].

Інформаційна система оцінювання стану атмосферного повітря є складною системою, яка містить декілька визначених блоків. Системи такого типу добре піддаються декомпозиції, тому застосування структурного підходу видається очевидним. Але оскільки блоки системи — це складні програмні комплекси і для деяких з них уже існує програмна реалізація, створення якої власними силами є дуже складним, часо- та трудомістким процесом, то застосовувати повністю структурний підхід неможливо. Таким чином, варто проектувати засоби ІСОСАП, використовуючи змішаний підхід, за якого



блоки системи проектується за структурним підходом, а для проектування окремого блока може бути застосований об'єктно-орієнтований підхід.

Оскільки для створення ІСОСАП вибрано змішаний підхід, то для проектування будуть використовуватись обидві методології проектування.

Основна структура системи проектується у межах структурного підходу, тому для роз'яснення структури необхідно розглянути потоки даних між елементами інформаційної системи. Діаграму потоків даних показано на рис. 1.

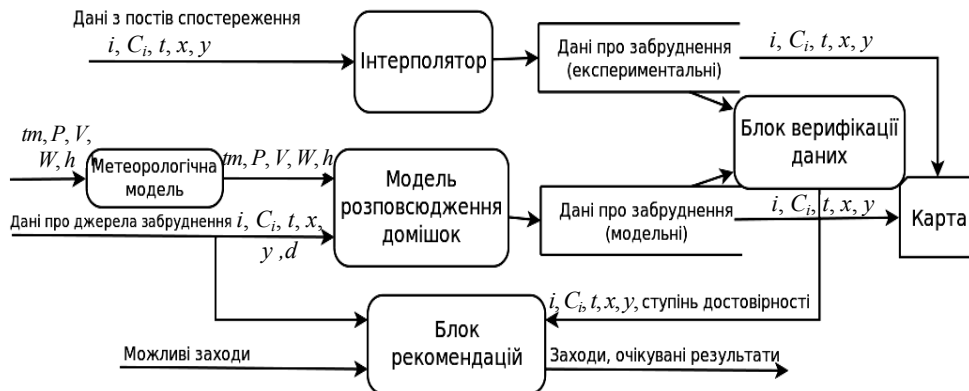


Рис. 1. Діаграма потоків даних:  $x, y$  — координати;  $t$  — час;  $C$  — концентрація забруднювальних речовин;  $tm$  — температура;  $P$  — тиск;  $V, W$  — швидкості вітру (по осях  $x$  та  $y$  відповідно),  $h$  — вологість

Можна зауважити, що на діаграмі зображено два основні види потоків: метеорологічний потік та потік даних про забруднення. Кожен набір даних формується своїми підсистемами.

На основі побудованої діаграми потоків даних можна побудувати структуру ІСОСАП. Для цього скористаємося підходом SADT. Можна побачити, що кожному блоку на діаграмі потоків даних можна зіставити блок базової структури системи. Структуру показано на рис. 2.

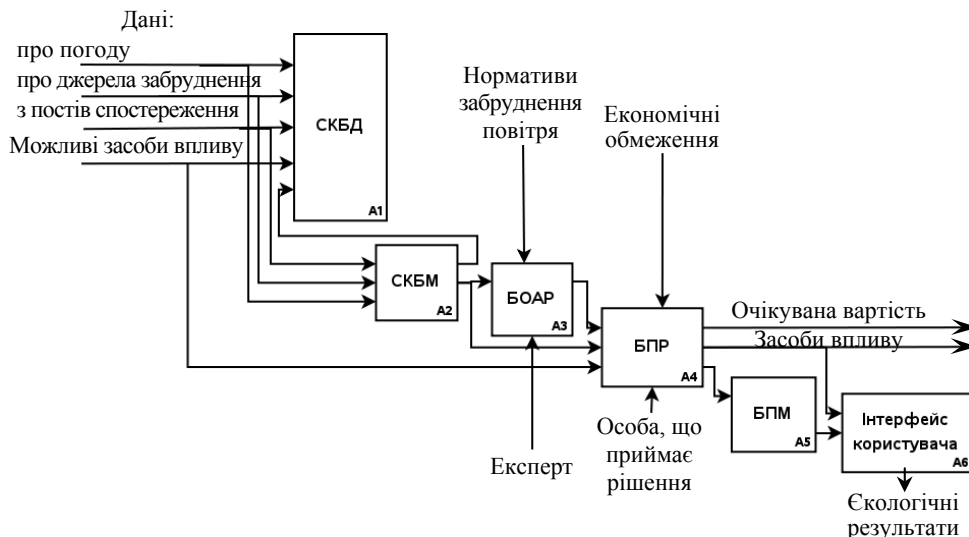


Рис. 2. Базова структура системи: СКБД — система керування базою даних; СКБМ — система керування базою моделей; БОАР — блок оцінювання та аналізу ризиків; БПР — блок прийняття рішення; БПМ — блок просторового моделювання

Оскільки важливою частиною інформаційної системи є моделювальна підсистема або база моделей, то її структуру слід розглянути окремо.

Загальний вигляд бази моделей ICOSAP показано на рис. 3.

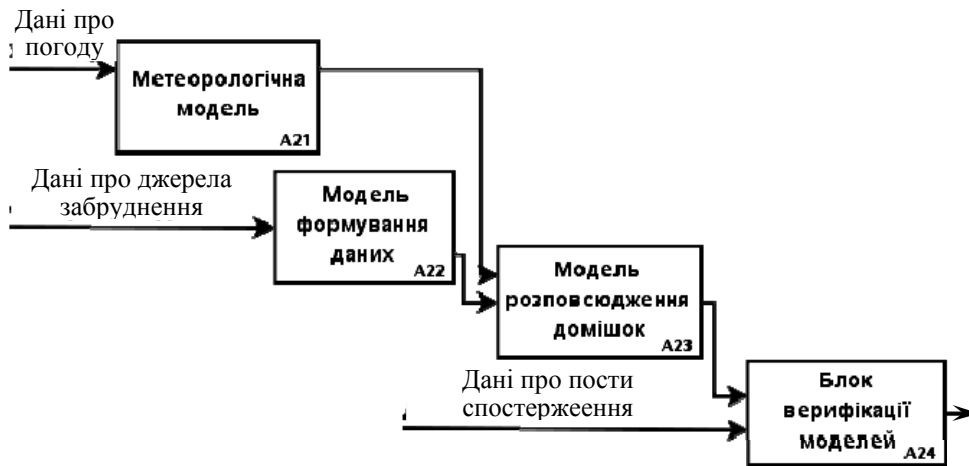


Рис. 3. Загальний вигляд бази моделей ICOSAP

Складність моделювання та верифікації результатів зумовлює виникнення таких завдань, які потрібно вирішити під час проектування бази моделей ICOSAP:

- 1) організація обміну даними;
- 2) визначення умов застосовності та верифікації моделей;
- 3) синхронізація роботи різних частин системи.

Організація обміну даними полягає в тому, що дані між блоками системи повинні передаватися у форматах, зрозумілих для цих блоків. Умови застосовності моделей потрібно визначати до включення моделей до складу бази моделей. Детальніше зупинимось на синхронізації роботи різних частин систем.

Задачу синхронізації роботи моделей, що входять до складу системи, можна подати у вигляді декількох підзадач.

Одна із задач синхронізації — це автоматична ініціалізація моделей та перевірка умов закінчення їх роботи. Обов'язковою умовою для запуску конкретної моделі є забезпечення її вхідними даними в потрібному форматі та необхідної точності. У базі моделей повинні бути визначені ознаки того, що модель закінчила свою роботу. Якщо під час роботи моделі виникає помилка, її потрібно зазначити і визначити ознаки виникнення помилки.

Існують два способи організації запуску моделей: запуск моделі в певний момент часу та запуск моделі за вимогою

**Запуск моделі в певний момент часу.** У цьому випадку модель запускається автоматично з деякою регулярністю (наприклад, один раз на добу). При цьому вважається, що дані для моделювання сформовані і містяться у папці для вхідних даних. Такий підхід дозволяє спланувати роботу моделей, ефективно використовуючи машинний час (наприклад, завдяки запуску ресурсомістких операцій у час найменшої активності користувачів). Недолік — можливий запуск нової моделі в той час, коли ще не закінчився час

роботи попередньої. Регулярний запуску моделі потребує регулярного оновлення вхідних даних, що не завжди можливо.

В UNIX-системах для запуску програм у певні моменти часу використовуються скрипти cron (cron — це програма, яка дозволяє запускати інші програми з певною регулярністю). У Windows для регулярного запуску програм застосовуються засоби сторонніх розробників або вбудований планувальник.

**Запуск моделі за вимогою.** У цьому випадку програма запускає модель безпосередньо за вимогою користувача, або коли виконуються необхідні умови ініціалізації моделі (у папці з вхідними даними з'являються файли). Така організація запуску моделей дозволяє обійтися без «холостих» запусків, якщо вхідні дані надходять до програми нерегулярно. Але у випадку багатокористувацької системи можливий одночасний запуск декількох ресурсномістких завдань одночасно, що сповільнює роботу всіх запущених моделей.

Для запуску складних комплексних моделей можна застосовувати спеціальні програми — скрипти або сценарії, які реалізують послідовності операцій для виконання на комп'ютері.

Структурна схема бази моделей, показана на рис 3, не містить додаткових блоків, що вирішують функції з організації моделювання. Тому запропоновано детальну схему бази моделей, до складу якої включено додаткові блоки, що забезпечують ініціалізацію, синхронізацію, верифікацію та введення форматів даних. Цю схему зображено на рис. 4.

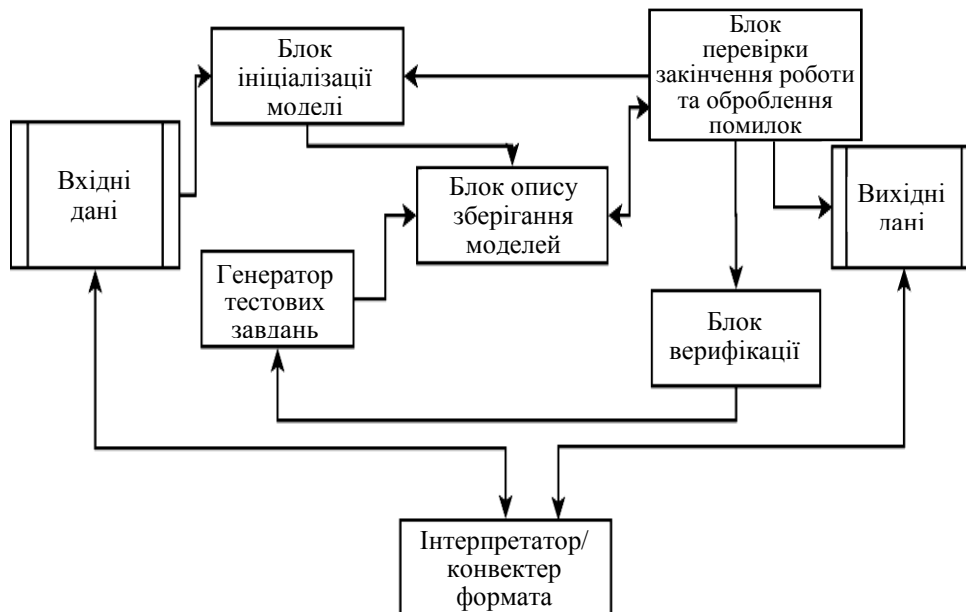


Рис. 4. Детальна схема бази моделей

Призначення блоків бази моделей, показаних на цьому рис. 4:

- 1) запуск (блок ініціалізації) та закінчення роботи моделі (блок перевірки закінчення роботи та оброблення помилок);

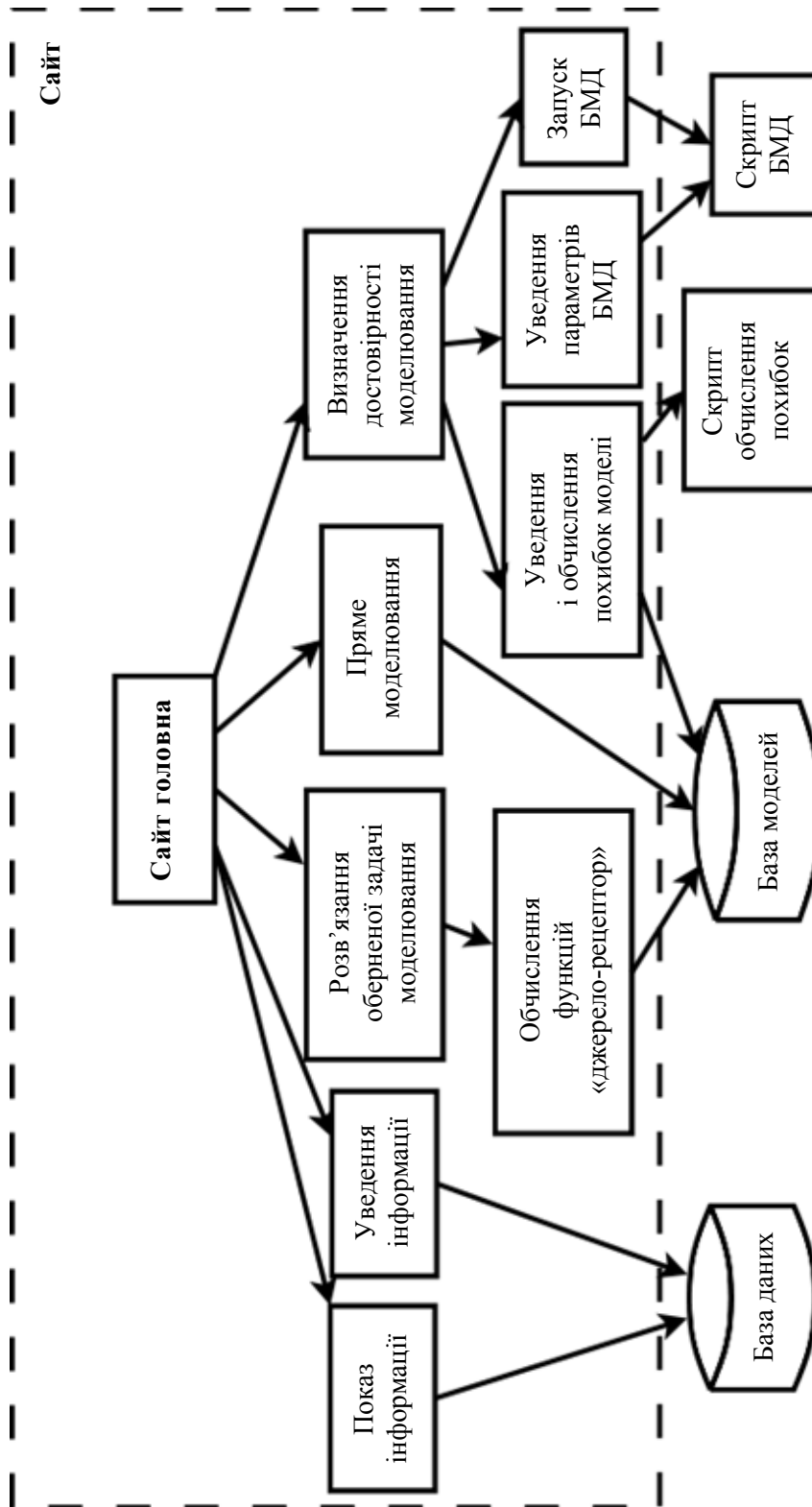


Рис. 5. Структура сайту — байєсова мережа довіри (БМД)

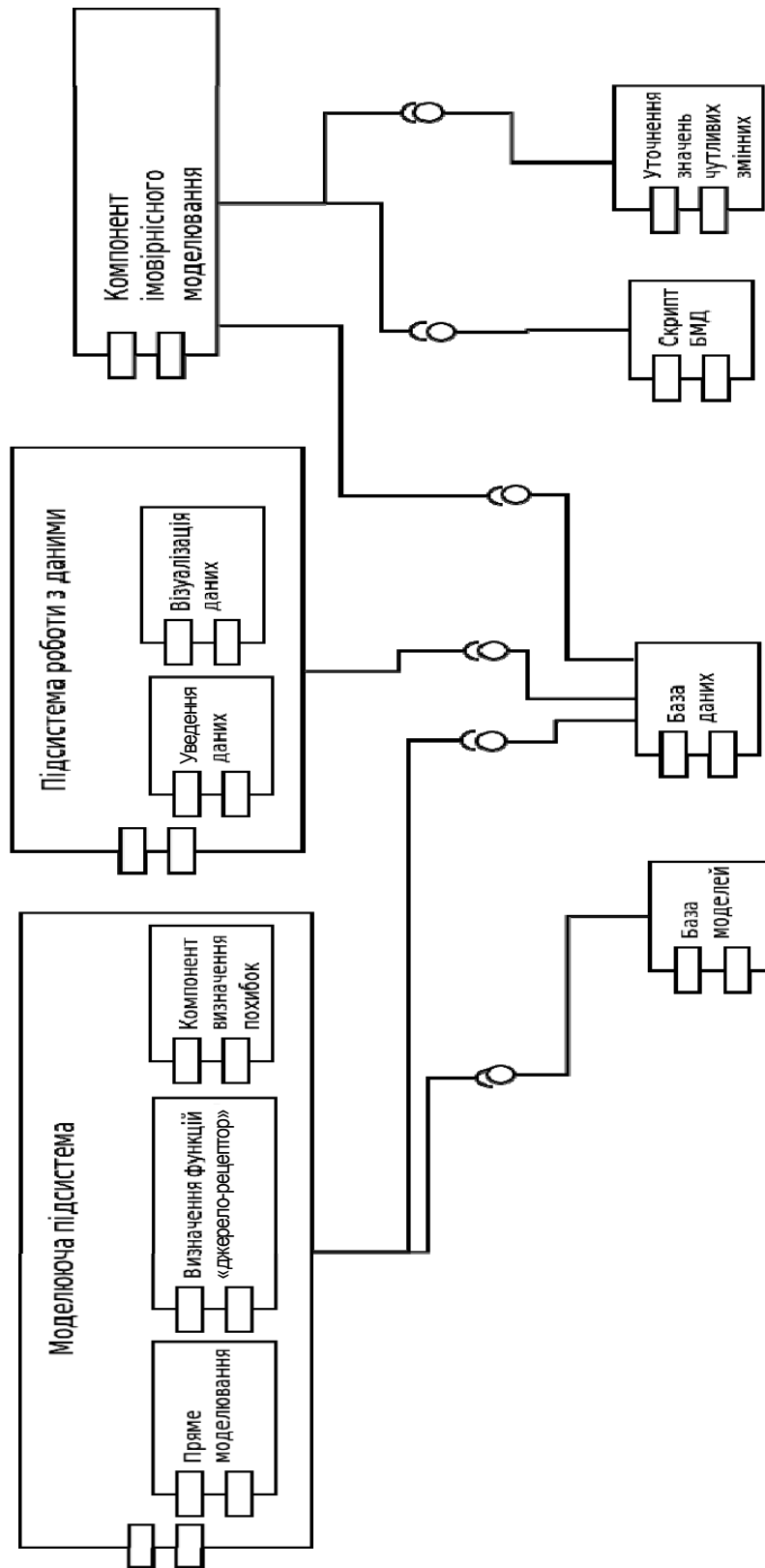


Рис. 6. Діаграма компонентів: БМД — байсова мережа довіри

- 2) ідентифікація виникнення помилок та програма роботи з помилками (блок перевірки закінчення роботи та оброблення помилок);
- 3) переведення форматів, використовуваних під час роботи з моделями (інтерпретатор/конвертер форматів);
- 4) створення тестових завдань для верифікації моделей (генератор тестових завдань);
- 5) верифікація моделей (блок верифікації);
- 6) опис та зберігання моделей (блок опису і зберігання моделей).

Спроектвану систему реалізовано у вигляді веб-сайту і підключених програм, що виконують необхідні функції.

Створена система складається з двох основних частин: інтерфейсу та програм-обробників. Загальний вигляд структури вікон програми і зв'язки з програмами-обробниками показано на рис. 5.

Можна також побудувати діаграму компонентів для основних підсистем (рис. 6). Компоненти дозволяють бачити, які частини системи за що відповідають і як вони пов'язані між собою.

## ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто процес проектування інформаційної системи оцінювання стану атмосферного повітря. Обрано методологію розроблення. Побудовано діаграми потоків даних. Розглянуто структури системи в цілому та окремих її частин.

Таким чином, за допомогою запропонованої структури інформаційної системи може бути реалізована ефективна стратегія оцінювання стану повітря, яка поєднує моніторинг, інвентаризацію викидів, моделювання розсіювання забруднювальних речовин в атмосфері та яка дозволяє працювати з неточними вхідними даними.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Cai Y.P.* An optimization-model-based interactive decision support system for regional energy management systems planning under uncertainty / Y.P. Cai, G.H. Huang, Q.G. Lin et al. // *Expert Systems with Applications*. — 2009. — 36. — P. 3470–3482.
2. *Carnevale C.* A multi-objective nonlinear optimization approach to designing effective air quality control policies / C. Carnevale, E. Pisoni, M. Volta // *Automatica*. — 2008. — 44. — P.1632–1641.
3. *Makowski Marek.* Multi-objective Decision Support Including Sensitivity Analysis International Institute for Applied Systems Analysis / Marek Makowski // *Pollution Prevention and Abatement Handbook*. — Austria, 2011. — P. 21–22.
4. *Xuebin L.* Study of multi-objective optimization and multi-attribute decision-making for economic and environmental power dispatch / L. Xuebin // *Electric Power Systems Research*. — 2009. — 79. — P. 789–795.
5. *Ситник В.Ф.* Системи підтримки прийняття рішень: навч. посіб. / В.Ф. Ситник. — К.: КНЕУ, 2004. — 614 с.
6. *Фаулер М.* UML. Основи / М. Фаулер. — 3-е изд.; пер. с англ. — СПб: Символ-Плюс, 2004. — 192 с.

Надійшла 04.04.2019

## ІГРОВІ СТРАТЕГІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ. I. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ

П.О. КРАВЕЦЬ

**Анотація.** Розроблено математичну модель стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічних системах в умовах невизначеності. Суть гри полягає у вирівнюванні чистих стратегій гравців для досягнення консенсусного або мажоритарного колективного рішення. Виконано параметризацію ігрової моделі для відокремлення авторитарної, анархічної та демократичної ієрархічних структур систем прийняття рішень. Розроблено марковський рекурентний метод розв'язування стохастичної гри на основі стохастичної апроксимації умови доповняльної нежорсткості.

**Ключові слова:** прийняття рішень, ієрархічна система, умови невизначеності, стохастична гра, математична модель.

### ВСТУП

Ієрархічна структура прийняття рішень використовується у багатьох розподілених системах, наприклад, біологічних, інформаційних, штучного інтелекту, економічних, соціальних, у військовому та державному управлінні. Популярність ієрархічної організації обумовлена необхідністю декомпозиції процесу прийняття рішень у зв'язку з інтегральною складністю таких систем — великою розмірністю, наявністю численних горизонтальних та вертикальних зв'язків між елементами, пріоритетністю у прийнятті рішень окремими підсистемами, відсутністю адекватної моделі системи, наявністю декількох синергетичних або конкурентних цілей розвитку підсистем, гетерогенністю складових елементів, неповнотою інформаційного опису об'єктів тощо [1–7].

Ієрархічні системи складаються з активних елементів, інакше — агентів [8, 9], здатних приймати автономні рішення та функціонально пов'язаних між собою за відношенням старшинства. У таких системах виникає потреба у прийнятті скоординованих колективних рішень для досягнення поставлених цілей або для виведення системи на потрібний режим функціонування.

Прийняття скоординованих колективних рішень в ієрархічних системах є актуальною науково-практичною проблемою [10–13]. Загалом її

розв'язування спрямоване на оптимізацію техніко-економічних показників функціонування системи: підвищення точності та оперативності прийнятих рішень; синхронізацію керувальних впливів між підсистемами з різною інерційністю вироблення та опрацювання рішень; забезпечення стійкості рішень до впливу зовнішніх факторів; підвищення надійності роботи системи; зменшення витрат часу та ресурсів на організацію керування ієрархічною системою [10].

В ієрархічних системах рішення приймаються здебільшого в умовах цільової, функціональної, комбінаторної або стохастичної невизначеності [2, 14]. У зв'язку з цим виникає потреба у розробленні адаптивних методів прийняття рішень, здатних у процесі самонавчання хоча б частково компенсувати існуючу невизначеність та сформулювати стратегії поведінки з очікуваним оптимальним результатом.

Процес ієрархічного прийняття рішень спрямований на досягнення спільної колективної мети усієї системи і окремих, можливо конкурентних, цілей її підсистем. Прийняття збалансованих колективних рішень вивчається теорією ігор [15], а в умовах невизначеності — теорією стохастичних ігор [16–19].

Об'єктом цього дослідження є процеси ігрового прийняття рішень в умовах невизначеності. Предметом дослідження є ігрова модель прийняття рішень в ієрархічно організованих системах. Метою роботи є розв'язування стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічній системі. Наукова новизна роботи полягає у розробленні математичної моделі та застосуванні адаптивного методу розв'язування стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічній системі в умовах невизначеності. Практична цінність виконаного дослідження визначається можливістю застосування отриманих результатів для побудови ефективних організаційних, інформаційних та кібернетичних систем з ієрархічною структурою.

## ПРОБЛЕМА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ

Функції прийняття рішень в ієрархічних системах розподілені між агентами різних рівнів. Агент середнього рівня, опрацьовуючи рішення агента вищого рівня, виробляє власне рішення і доводить його до відома агентів нижчого рівня, які перебувають у його прямому підпорядкуванні.

В ієрархічній системі наявні вертикальні (між різними рівнями підпорядкування) та горизонтальні (на одному рівні ієрархії) зв'язки між підсистемами. Дії вищих та нижчих рівнів ієрархічної структури є взаємозалежними. Рішення підсистем вищого рівня домінує над діями підсистем нижчого рівня. У межах наданих повноважень рішення окремих агентів середніх рівнів ієрархічної системи є автономними в управлінні підлеглими агентами. Як правило, агенти вищого рівня вирішують стратегічні, а підпорядковані їм агенти — тактичні завдання, що сприяє підвищенню точності та оперативності прийняття рішень [1].

Успішність колективного вироблення рішень в ієрархічних системах забезпечується координацією дій усіх учасників прийняття рішень [9–12]. Координація — це зведення дій агентів до певної відповідності для досягнення узгодженої, упорядкованої роботи всіх ланок системи прийняття рішень. У вузькому розумінні, прийнятому у цій роботі, координація полягає



у вирівнюванні чистих стратегій гравців ієрархічної системи у ході проведення динамічної стохастичної гри. Тобто колективне рішення буде вважатися сформованим, якщо його обрали всі (консенсусне рішення) або більша частина учасників системи прийняття рішень (мажоритарне рішення).

Координація може бути централізованою або децентралізованою. У системах з централізованою координацією функції прийняття рішень концентруються на найвищому рівні ієрархії, а у системах з децентралізованою координацією — делегуються на нижчі рівні ієрархії. Ряд дослідників активних розподілених систем вважають, що для ефективного прийняття рішень необхідний баланс між централізованою і децентралізованою координацією, але зі зростанням структурної та функціональної складності розподіленої системи щодо оперативності, надійності та економічної ефективності розв'язування задачі доцільнішими будуть методи децентралізованої координації агентів [12, 13].

Координація необхідна для узгодження індивідуальних цілей і варіантів поведінки агентів, які забезпечують досягнення оптимальних колективних рішень. Колективні рішення є скоординованими, якщо вони задовольняють вимоги вигідності, стійкості та справедливості для всіх учасників прийняття рішень. *Вигідність* колективного рішення полягає в тому, що кожен агент покращує або не погіршує значення своєї функції корисності, а система в цілому покращує якість розв'язування загального завдання. Можливо, діючи самостійно або в інших умовах, агент досягнув би кращих для себе результатів, але система накладає обмеження на значення його виграшу на користь усіх учасників прийняття рішень. Певний компроміс між агентами забезпечує виграш колективу в цілому. *Стійкість* колективного рішення полягає в тому, що відхилення стратегії поведінки одного або групи агентів від оптимального колективного рішення не зможе підвищити значення їх функцій корисності. *Справедливість* колективного рішення полягає у тому, що кожен агент отримує свою частку виграшу, обумовлену значенням його платіжної функції.

На практиці найбільш поширені критерії рівноваги за Нешем, Слейтером, Джофріоном, Байєсом, корельованої рівноваги, оптимальності за Парето.

Методологічні засади колективного прийняття рішень в ієрархічних системах закладені в теорії керування, теорії автоматів, теорії оптимального планування, дослідження операцій, теорії активних систем [20], теорії вибору варіантів рішень [21, 22], теорії ігор [23–29], теорії мультиагентних систем [8, 9, 11], інформаційній теорії ієрархічних систем [5–7].

Основним методом досліджень ієрархічних систем є теоретико-ігрове моделювання [2, 23, 24], яке дозволяє передбачити поведінку агентів та обрати способи управління, які переводять систему в оптимальні стани згідно з обраними критеріями функціонування.

Ігри з прийняття рішень в ієрархічних системах є підкласом ігор на мережах [25], серед яких можна виокремити такі: безкоаліційні або коаліційні; некооперативні та кооперативні; антагоністичні та неантагоністичні; з нульовою сумою та довільною сумою; ігри з природою та багатьох осіб; дискретні та неперервні; одноетапні та повторювальні; нерефлексивні та рефлексивні; з повною та неповною інформованістю гравців; детерміновані або

стохастичні; з постійною або змінною структурою; з фіксованими (програмними) або динамічними стратегіями поведінки гравців; з наявною або відсутньою інформованістю гравців про обрані стратегії та результати ходів гри; з неперервним або дискретним часом; з обмеженим або безмежним часом; з повною або локальною залежністю платіжних функцій від стратегій гравців; з інтегральною у часі або миттєвою залежністю функцій вигравів від стратегій гравців; зі скалярними або векторними (або інтервальними) платежами; з наявністю або відсутністю обмежень на дії окремих гравців чи підмножин гравців; із синхронним (одночасним) або асинхронним вибором стратегій; ігри в нормальній формі та ігри з правом першого ходу.

Теорія ігор у нормальній формі оформилась у самостійну математичну дисципліну в першій половині ХХ ст. після виходу фундаментальних праць Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна. Вивчення ієрархічних ігор з правом першого ходу започатковано у працях Ю.Б. Гермейєра та його послідовників.

На відміну від гри у нормальній формі, яка характеризується одночасністю вибору дій усіма гравцями та незалежністю вибору одного гравця від вибору інших, в ієрархічних іграх виділяють центрального гравця, який робить перший хід, та гравців, які вибирають свої дії на основі відомого їм рішення центру.

Розв'язком гри є ситуація рівноваги, від якої не вигідно відмовлятися ні центру, ні агентам нижчих рівнів. Колективний розв'язок ієрархічної гри з правом першого ходу описується рівновагою за Штакельбергом [23, 28], яка реалізовується, якщо агент вибирає дію, максимізуючи свій вигреш за відомої йому на момент прийняття рішення дії центру, а центр, знаючи про таку поведінку агента, вибором власної дії максимізує свій вигреш, вважаючи заданою реакцію агента на свої дії. Максимізуючи свій вигреш, центр сподівається на доброзичливість агента, тобто на те, що агент з множини рівнозначних для нього дій вибере сприятливу для центру дію. У літературних джерелах з цієї проблеми в основному подаються результати дослідження детермінованих ієрархічних ігор в умовах повної інформації. Для таких ігор характерне використання максимального гарантованого результату як основної концепції розв'язування гри [23, 24].

У реальних умовах процес прийняття рішень в ієрархічних системах містить елементи невизначеностей, викликаних нечітко сформульованими цілями, семантичною неоднозначністю мовних повідомлень, спотвореннями передавання потоків інформації між елементами системи, комбінаторною складністю системи, внутрішньою стохастичністю, пов'язаною із незалежним вибором агентами можливих варіантів дій, неконтрольованими зовнішніми впливами. Невизначеність прийняття рішень в ієрархічній системі може бути зумовлена тим, що проблема прийняття рішень на верхньому рівні менш структурована та формалізована; підсистемі вищого рівня можуть бути не повністю відомі цілі та обмеження підсистем нижчих рівнів; керівники та підрозділи нижчих рівнів, як правило, ознайомлені тільки зі своїм функціональним завданням і не завжди знають про загальні цілі системи; можуть бути спотворення та втрата інформації у разі її передавання між рівнями ієрархії; невідповідність періодів планування рішень – періоди прийняття рішень для агентів верхнього рівня більші, ніж для агентів нижчих рівнів; невідповідність періодів імплементації рішень – керовані підсистеми є більш

інерційними щодо реалізації рішень порівняно з підсистемами верхніх рівнів; наявність непередбачених, наприклад, ресурсних обмежень на процеси функціонування підсистем; зростання кількості рівнів ієрархії та кількості варіантів можливих рішень призводить до зростання ентропії ієрархічної системи; агенти верхнього рівня ієрархії мають у підпорядкуванні більші підсистеми з великою кількістю станів функціонування, перехід у які не можна спрогнозувати апіорі [1, 14, 24].

Для ігрового розв'язування задачі прийняття рішень в умовах параметричної невизначеності необхідно використати адаптивні стратегії, які компенсують невизначеність платежів їх стохастичною ідентифікацією у ході гри за рахунок самонавчання агентів [22]. Стохастичні ігри були винайдені Л. С. Шеплі на початку 50-х років ХХ ст. Ігрові задачі адаптивного вибору варіантів рішень започатковано у працях В. І. Варшавського, М. Л. Цетліна з теорії колективної поведінки автоматів у випадкових середовищах. Стохастичні ігри (ігри з природою, двох та багатьох осіб) у змішаних стратегіях на основі методу стохастичної апроксимації, проекції градієнта та регуляризації вивчено у працях Я.З. Ципкіна, А.В. Назіна, А.С. Позняка. Різноманітні математичні моделі стохастичних систем на основі методів стохастичної оптимізації та рекурентного оцінювання запропоновано і розвинуто у працях наукової школи академіка НАНУ В. С. Королюка.

У фахових літературних джерелах з цієї проблеми в основному досліджуються повнозв'язні стохастичні ігри [16, 22]. Ігри з локальними зв'язками між гравцями – ігри на неповнозв'язних графах, деревах, актуальні для моделювання процесів прийняття рішень в умовах невизначеності в організаційних та ергатичних (людино-машинних) системах потребують різностороннього та поглибленого вивчення.

## ПОСТАНОВКА ІГРОВОЇ ЗАДАЧІ

Ідеалізовану структуру ієрархічної системи прийняття рішень можна зобразити у вигляді дерева, вузли якого позначають агентів прийняття рішень, а орієнтовані зв'язки між ними — залежність від стратегій рішень сусідніх агентів. Будемо вважати, що всі рішення вищого рівня є рекомендаційними і не обмежують свободу вибору агентів нижчого рівня. Завдяки цьому поточні рішення агентів нижчого рівня можуть відрізнятися від рішень агентів вищого рівня. Агент з найвищим рангом (корінь дерева) приймає рішення на основі власних стратегій та стратегій агентів безпосереднього нижчого рівня. Рішення агентів середнього рівня залежать від власних стратегій та стратегій агентів вищого і нижчого рівнів. Формування рішень агентами найнижчого рівня (листя дерева) визначається власними стратегіями та стратегіями агентів безпосереднього вищого рівня.

Нехай  $D$  — організована у вигляді дерева множина гравців ( $|D| \geq 2$  — кількість гравців), які здійснюють незалежний вибір варіантів рішень з множини  $U^i = \{u^i(1), u^i(2), \dots, u^i(N_i)\}$  чистих стратегій  $\forall i \in D$  у дискретні моменти часу  $n = 1, 2, \dots$ .

Після завершення вибору варіантів рішень  $u_n^i = u^i \in U^i$  усіма гравцями кожен з них отримує комплексний штраф за недотримання рекомендаційних

рішень. Штраф гравця середнього рівня визначається недотриманням керівного рішення свого безпосереднього начальника та невиконанням його власного рішення підлеглими гравцями:

$$\xi_n^i(u_n^{D_i}) = |D_i|^{-1} \left( \lambda |u_n^i - u_n^k| + (1-\lambda) \sum_{j \in D_i \setminus \{k\}} |u_n^i - u_n^j| \right) + \mu_n \quad \forall i \in D, \quad (1)$$

де  $D_i \subset D$  — множина сусідніх гравців, стратегії яких визначають втрати  $i$ -го гравця;  $u_n^{D_i} \in U^{D_i} = \times_{j \in D_i} U^j$  — колективна стратегія множини гравців

$D_i$ ;  $u_n^i \in R^1$  — числовий еквівалент варіанта рішення;  $k$  — гравець вищого рівня (керівник);  $i$  — гравець середнього рівня;  $j$  — гравець нижчого рівня;  $\lambda \in [0,1]$  — ваговий коефіцієнт (для кореневого гравця  $\lambda = 0$ , а для гравців найнижчого рівня  $\lambda = 1$ );  $\mu_n \sim Normal(0, d)$  — нормально-розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією  $d \geq 0$  або значення білого гауссівського шуму, який моделює вплив завад на канали зв'язку між ігровими агентами.

Зроблено припущення, що випадкові програші  $\{\xi_n^i\}$  гравців є незалежними  $\forall u_n \in U, \forall i \in D, n = 1, 2, \dots$ , мають постійне математичне сподівання  $E\{\xi_n^i(u^{D_i})\} = v(u^{D_i}) = \text{const}$  та обмежений другий момент  $\sup_n E\{[\xi_n^i(u^{D_i})]^2\} = \sigma^2(u^{D_i}) < \infty$ . Стохастичні характеристики випадкових програмів не відомі гравцям априорі.

Середні програші гравців після  $n$  кроків гри набудуть значення:

$$\Xi_n^i(\{u_n^{D_i}\}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi_t^i \quad \forall i \in D. \quad (2)$$

Метою ієрархічної системи є вироблення узгодженого колективного рішення, яке мінімізує функції середніх програмів гравців (2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Xi_n^i} \rightarrow \min_{\{u_n^i\}} \forall i \in D. \quad (3)$$

Отже, ігрова задача вибору варіантів рішень полягає у тому, що на основі спостереження поточних програмів  $\{\xi_n^i\}$  у моменти часу  $n = 1, 2, \dots$  гравці повинні навчитися вибирати чисті стратегії  $\{u_n^i\}$  так, щоб забезпечити виконання системи цілей (3).

Залежно від методу формування послідовностей стратегій  $\{u_n^i\} \forall i \in D$  розв'язки ігрової задачі повинні задовольняти хоча б одну з умов колективної оптимальності, наприклад, Неша, Парето або іншу [27, 28].

## ВИДИ ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Параметр  $\lambda \in [0,1]$  у виразі (1) визначає переважання одноосібного чи групового способу вироблення рішення. Залежно від цього визначимо такі різновиди ієрархічних систем прийняття рішень:

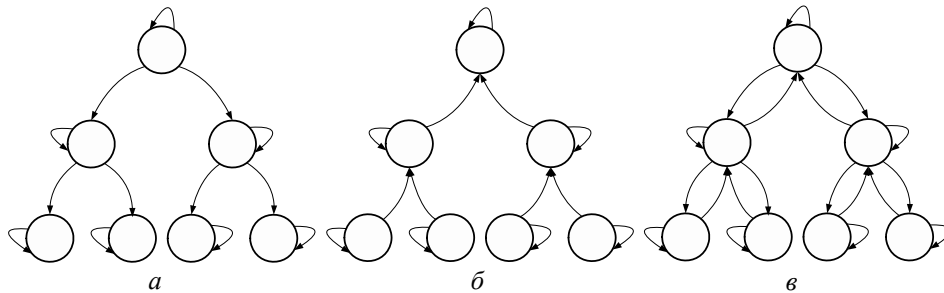
$\lambda = 1$  — автократична система;

$\lambda = 0$  — анархічна система;

$0 < \lambda < 1$  — демократична система.

Слід зазначити, що прийняті в цій роботі назви ієрархічних систем є умовними і повною мірою не відображають їх соціально-політичне або інше відоме трактування.

Приклади деревоподібних структур відповідних ієрархічних систем зображено на рисунку. Вузли мультиграфів позначають гравців, а орієнтовані дуги — вплив стратегій на формування втрат (програвшів) гравців.



Структури ієрархічних систем прийняття рішень: *a* — автократичної; *b* — анархічної; *v* — демократичної

В автократичній системі прийняття рішень втрати гравців середнього та найнижчого рівнів визначаються лише власними стратегіями та стратегіями гравців вищого рівня (рисунок, *a*). Втрати кореневого гравця визначаються тільки власними стратегіями або додатково стратегіями сусідніх гравців (в автократичних системах з колегіальним центром).

Структура прийняття рішень в автократичній системі є вертикально-ієрархічною. Потік інформації спрямований згори вниз. Рішення приймає керівник найвищого рівня. Можливість прийняття рішень на нижчих рівнях є обмеженою. Прийняті на верхніх рівнях ієрархії рішення надходять на нижчі рівні як директиви, які не підлягають обговоренню і обов'язкові до виконання.

Системи з авторитарним управлінням ефективні у надзвичайних та кризових ситуаціях. Позитивними аспектами в організації автократичної системи є оперативність прийняття рішень, висока виконавча дисципліна та висока мобільність. Негативний аспект — низька ініціатива низових ланок.

В анархічній системі прийняття рішень втрати гравців найвищого та середнього рівнів визначаються стратегіями гравців нижчого рівня та власними стратегіями (рисунок, *b*). Втрати гравців найнижчого рівня визначаються лише власними стратегіями, або додатково стратегіями інших гравців найнижчого рівня (в анархічних системах з узгодженням рішень).

Ідеально анархічна організація заперечує наявність ієрархії. В анархічній спільноті в основному наявні горизонтальні зв'язки. Рішення приймається шляхом широкого обговорення завдань на найнижчому рівні. Вертикальні зв'язки можуть формуватися делегуванням мінімальних повноважень на вищий рівень для узгодження рішення між окремими самоорганізованими спільнотами. У таких анархічних системах потік інформації спрямований знизу вгору.

Процес вироблення рішення в анархічній системі може займати тривалий час. Така система може бути дієвою у разі виокремлення у ній окремих спільнот, здатних до самоорганізації та самоконтролю.

У демократичній системі прийняття рішень утрати гравців середнього рівня визначаються власними стратегіями та стратегіями гравців як вищого рівня, так і нижчого (рисунок, в). Утрати кореневого гравця визначаються власними стратегіями та стратегіями гравців нижчого рівня. Утрати гравців найнижчого рівня визначаються власними стратегіями та стратегіями гравців вищого рівня.

Демократична система ґрунтується на колегіальному прийнятті рішень керівниками всіх рівнів з можливим урахуванням думок підлеглих делегуванням (у разі потреби) їм частини повноважень та залученням вузьких спеціалістів для вироблення рішення. Потіки інформації спрямовані в обох напрямках — згори вниз та знизу вгору. Від вищого до нижчих рівнів спрямовано потік керівних рішень. Зустрічний потік інформації породжений делегуванням представницьких повноважень низових рівнів до вищих рівнів ієрархії.

Демократична організація системи стимулює підлеглих до прийняття самостійних рішень, але може призвести до низької виконавчої дисципліни та високої мобільності у прийнятті рішень в екстремальних умовах.

Виділимо такі види демократичних систем, параметризованих коефіцієнтом  $\lambda \in (0,1)$ , з комбінованими властивостями анархічних та автократичних систем прийняття рішень:

$0,5 < \lambda < 1$  — автократично-центрична демократична система (демократія, жорстка демократія);

$0 < \lambda < 0,5$  — анархічно-центрична демократична система (ліберальна, м'яка демократія);

$\lambda = 0,5$  — нейтральна демократична система (збалансована, чиста демократія).

В автократично-центричних системах переважають процеси прийняття рішень на вищих рівнях ієрархії. Керівник найвищого рівня приймає самостійні рішення, ураховуючи думку керівників низових підрозділів. У таких системах переважає потік інформації згори вниз.

В анархічно-центричних системах основні процеси прийняття рішень здійснюються на нижчих рівнях ієрархії. Керівник найвищого рівня уникає прийняття самостійних рішень, перекладає прийняття рішень та відповідальність за них на керівників низових підрозділів. У таких системах переважає потік інформації знизу вгору. Часто такий стиль керівництва дезорієнтує роботу всієї системи. У ліберальній системі можуть самоорганізуватись групи ініціативних працівників «за інтересами», рішення яких доводяться до відома керівництва.

За значенням коефіцієнта  $\lambda$  система *нейтральної демократії* перебуває посередині між автократичною та анархічною системами. На прийняття рішень працівниками середньої ланки чиниться збалансований вплив згори від керівника та знизу від співробітників нижчої ланки.

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ

Необхідні для розв'язування сформульованої ігрової задачі послідовності варіантів рішень  $\{u_n^i\}$  отримуємо за допомогою динамічних векторів змішаних стратегій  $p_n^i \forall i \in D$ , елементи яких є умовними ймовірностями вибору чистих стратегій:

$$p_n^i(j) = P\{u_n^i = u^i(j) | u_t^i, \xi_t^i (t=1,2,\dots,n-1)\}, j=1..N_i,$$

де  $\{u_t^i (t=1,2,\dots,n-1)\}$  — передісторія стратегій, вибраних гравцем з номером  $i$ ;  $\{\xi_t^i (t=1,2,\dots,n-1)\}$  — передісторія отриманих за це програшів.

Змішані стратегії  $p_n^i \in S^{N_i}$  гравців набувають значень на одиничних симплексах:

$$S^{N_i} = \left\{ p | p \in R_+^{N_i}, \sum_{j=1}^{N_i} p(j) = 1 \right\},$$

де  $R_+^{N_i}$  — простір невід'ємних дійсних чисел, що має  $N_i$  вимірів.

Поточні варіанти рішень  $u_n^i \forall i \in D$  будемо вибирати випадково на основі дискретного розподілу чистих стратегій гравців з імовірностями  $p_n^i(u_n^i)$ :

$$u_n^i = \left\{ u^i(j) | j = \arg \min_j \sum_{k=1}^{N_i} p_n^i(k) > \omega (j=1..N_i) \right\}, \quad (4)$$

де  $\omega \in [0,1]$  — випадкова величина з рівномірним розподілом.

Побудову методу розв'язування стохастичної гри виконаємо на основі детермінованої матричної гри з матрицями програшів  $[v(u^{D_i})]$ . Платіжна функція детермінованої матричної гри є полілінійною функцією середніх програшів:

$$V^i(p^{D_i}) = \sum_{u^{D_i} \in U^{D_i}} v^i(u^{D_i}) \prod_{j \in D_i; u^j \in u^{D_i}} p^j(u^j).$$

Відомо, що розв'язки гри за Нешем у змішаних стратегіях задовольняють умову доповняльної нежорсткості [29]:

$$\nabla_{p^i} V^i(p^{D_i}) - e^{N_i} V^i(p^{D_i}) = 0 \quad \forall i \in D,$$

де  $p^{D_i} \in S^{D_i} = \prod_{j \in D_i} S^{N_j}$  — задані на опуклих симплексах  $S^{D_i}$  комбіновані

змішані стратегії гравців з локальних множин  $D_i$ ;  $\nabla_{p^i} V^i(p^{D_i})$  — градієнт полілінійної функції середніх програшів.

Щоб додатково врахувати розв'язки за Нешем у чистих стратегіях, виконаємо покомпонентне зважування умови доповняльної нежорсткості елементами векторів змішаних стратегій:

$$\text{diag}(p^i)(\nabla_{p^i} V^i(p^{D_i}) - e^{N_i} V^i(p^{D_i})) = 0 \quad \forall i \in D, \quad (5)$$

де  $\text{diag}(p^i)$  — квадратна діагональна матриця порядку  $N_i$ , побудована з елементів вектора  $p^i$ .

Пошук розв'язків ігрової задачі в умовах невизначеності будемо виконувати у класі рекурентних марковських методів [22]:

$$p_{n+1}^i = \pi_{n+1}^{N_i} \{p_n^i - \gamma_n R_n(u_n^i, p_n^i, x_n^i)\} \in S^{N_i} \quad \forall i \in D, \quad (6)$$

де  $\pi_{n+1}^{N_i}$  — перетворення, яке забезпечує належність вектора  $p_{n+1}^i$  до одиничного симплексу  $S^{N_i}$ ;  $\gamma_n > 0$  — довжина кроку методу;  $R_n() \in R^{N_i}$  — вектор руху методу.

Вектор руху ігрового методу визначимо так, щоб у середньому він задовольняв модифіковану умову доповняльної нежорсткості (5):

$$M\{R_n \mid p_n^i = p^i\} = \text{diag}(p^i)[\nabla_{p^i} V^i - e^{N_i} V^i] = E\{\xi_n^i [e(u_n^i) - p_n^i] \mid p_n^i = p^i\}, \quad (7)$$

де  $p^i \in S^{N_i}$ ;  $E\{\}$  — функція математичного сподівання;  $e^{N_i} = (1_j \mid j = 1..N_i)$  — вектор, всі компоненти якого дорівнюють 1;  $e(u_n^i)$  — одиничний вектор-індикатор вибору чистої стратегії  $u_n^i \in U^i$ .

Ураховуючи вирази (6) та (7), методом стохастичної апроксимації [30] отримуємо таке рекурентне перетворення векторів змішаних стратегій у часі:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \{p_n^i - \gamma_n \xi_n^i [e(u_n^i) - p_n^i]\}, \quad (8)$$

де  $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$  — проектор на одиничний  $\varepsilon$ -симплекс  $S_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \subseteq S^{N_i}$ ;  $\gamma_n > 0$  — монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює величину кроку методу;  $\varepsilon_n > 0$  — монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює швидкість розширення  $\varepsilon$ -симплексу;  $\xi_n^i \in R^1$  — поточний про-граш гравця.

Оператор проектування на одиничний  $\varepsilon_n$ -симплекс використано для покращення статистичних характеристик зібраних даних про середовище прийняття рішень, а параметр  $\varepsilon_n$  — як додатковий елемент керування збіжністю рекурентного методу. Цей оператор визначається такими умовами:

$$\|p^i - \pi_{\varepsilon}^{N_i}(q)\| \leq \|p - q\| \quad \forall p \in S_{\varepsilon}^{N_i} \quad \forall q \in R^{N_i},$$

де  $\pi_{\varepsilon}^{N_i}(q) \in S_{\varepsilon}^{N_i}$ . Проектор  $\pi_{\varepsilon}^{N_i}(q)$  переводить точку  $q \in R^{N_i}$  у найближчу до неї точку  $\varepsilon$ -симплексу  $S_{\varepsilon}^{N_i}$  [22].

Стохастична гра розпочинається з ненавчених векторів змішаних стратегій зі значеннями елементів  $p_0^i(j) = 1/N_i$ , де  $j = 1..N_i$ . У наступні момен-



ти часу динаміка векторів змішаних стратегій визначається марковським рекурентним методом (8).

Збіжність змішаних стратегій (8) до оптимальних за Нешем значень (з імовірністю 1 та у середньоквадратичному) визначається з фундаментальних умов стохастичної апроксимації [22, 30], які можуть бути уточнені експериментальним дослідженням.

За умови незалежності випадкових виграшів  $\{\xi_n^i\}$ , незалежності вибору чистих стратегій  $\{u_n^i\} \forall i \in D$  та виконання умов  $\gamma_n > 0$ ,  $\gamma_{n+1} < \gamma_n$ ,  $\sum_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \infty$ ,  $\varepsilon_n \in (0, \min_{i \in D} N_i^{-1})$ ,  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$  метод (8) забезпечує виконання умови доповняльної нежорсткості (5) у знакододатному середовищі  $v_{\min}^i > 0 \forall i \in D$  з імовірністю 1, якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} (|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| + \gamma_n^2) < \infty$ , та у середньоквадратичному, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} (|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| \gamma_n^{-1} + \gamma_n) = 0$ . Результати отримано на основі рекурентного оцінювання згори похибки виконання умови доповняльної нежорсткості, усередненої за передісторією подій на момент часу  $n$  [17].

Порядок зменшення параметрів  $\gamma_n$  та  $\varepsilon_n$  впливатиме на швидкість збіжності стохастичної гри. Ці параметри можуть бути обчислені так:

$$\gamma_n = \gamma n^{-\alpha}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon n^{-\beta},$$

де  $\gamma > 0$ ;  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ;  $\beta > 0$ .

Стохастична гра складається з таких повторюваних кроків. У моменти часу  $n = 1, 2, \dots$  кожен гравець  $i \in D$  на основі власної змішаної стратегії  $p_n^i$  вибирає чисту стратегію  $u_n^i$  (4), за що до моменту часу  $n + 1$  отримує поточний програш  $\xi_n^i$  (1), після чого обчислює змішану стратегію  $p_{n+1}^i$  згідно з методом (8). Динамічна перебудова змішаних стратегій на основі опрацювання поточних програшів за обмежувальної дії умов стохастичної апроксимації забезпечує адаптивний вибір чистих стратегій, який з плином часу зумовить отримання рівноважних за Нешем розв'язків.

## ВИСНОВКИ

У роботі сформульовано актуальне науково-прикладне завдання координації рішень в ієрархічних системах та отримано такі результати:

1. Виконано аналіз проблеми прийняття рішень в ієрархічних системах в умовах невизначеності, що дозволило запропонувати стохастичні ігрові стратегії для її розв'язування.

2. Запроваджено коефіцієнт залежності платіжних функцій гравців від впливу елементів вищого та нижчого рівнів ієрархічної системи, що дало змогу класифікувати ієрархічні системи з метою вивчення балансу одноосібного та групового впливу гравців у процесі вироблення варіантів рішень.

3. Розроблено математичну модель та запропоновано метод розв'язування стохастичної гри, які забезпечують узгоджене прийняття рішень в ієрархічних системах за рахунок вирівнювання стратегій гравців на основі збирання поточної інформації та її адаптивного опрацювання.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Шарапов О.Д.* Економічна кібернетика: навч. посіб. / О.Д. Шарапов, В.Д. Дербенцев, Д.С. Семьонов. — К.: КНЕУ, 2004. — 231 с.
2. *Теорія і практика прийняття управлінських рішень* / А.С. Крупник, К.О. Линьов, Є.М. Нужний, О.М. Рудик. — К.: Видавничий дім «Простір», 2007. — 119 с.
3. *Дубовой В.М.* Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами: моногр. / В.М. Дубовой, О.О. Ковалюк. — Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2008. — 185 с.
4. *Бідюк П.І.* Проектування комп'ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень: навч. посіб. / П.І. Бідюк, Л.О. Коршевнік. — К.: ННК «ПСА» НТУУ «КПІ», 2010. — 340 с.
5. *Панкратова Н.Д.* Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: навч. посіб. / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська. — К.: ІВЦ Вид-во «Політехніка», 2010. — 371 с.
6. *Hierarchies in Distributed Decision Making* / Christoph Schneeweiss. — Springer, 2013. — 341 p.
7. *Krupa T.* Hierarchical Decision-Making Problems / T. Krupa, T. Ostrowska // Modeling and Solutions. Foundations and Management. The Journal of Warsaw University of Technology. — 2016. — Vol. 8, Issue 1. — P. 311–324. — DOI 10:1515/fman-2016-0024.
8. *Evolutionary Multi-Agent Systems: From Inspirations to Applications* / A. Byrski, M. Kisiel-Dorohinicki. — Springer. — 2017. — 224 p.
9. *Zheng Y.* Consensus of Hybrid Multi-Agent Systems / Y. Zheng, J. Ma, L. Wang // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. — 2018. — Vol. 29, Issue 4. — P. 1359–1365. — DOI: 10.1109/TNNLS. 2017.2651402.
10. *Катренко А.В.* Механізми координації у складних ієрархічних системах / А.В. Катренко, І.В. Савка / Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2008. — № 631. — С. 156 – 166.
11. *Sun Z.* Cooperative Coordination and Formation Control for Multi-agent Systems / Z. Sun. — Springer. — 2018. — 179 p.
12. *Veetil V.P.* Coordination in Centralized and Decentralized Systems / V. P. Veetil // International Journal of Microsimulation. — 2017. — N 10 (2). — P. 86–102.
13. *Романюк С.А.* Децентралізація: теорія та практика застосування: моногр. / С.А. Романюк. — К., 2018. — 216 с.
14. *Decision Making Under Uncertainty: Theory and Application* / M.J. Kochenderfer. — Massachusetts Institute of Technology: The MIT Press, 2015. — 323 p.
15. *Harrington J.E.* Games, Strategies, and Decision Making / J.E. Harrington, Jr. — Worth Publishers, 2014. — 540 p.
16. *Neyman A.* Stochastic Games and Applications / A. Neyman, S. Sorin. — Springer Science & Business Media, 2012. — 473 p.
17. *Кравець П.О.* Ігрова модель самоорганізації мультиагентних систем / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2015. — № 829. — С. 161–176.
18. *Кравець П.О.* Ігрова модель прийняття рішень в ієрархічних системах / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2017. — № 872. — С. 111–120.

19. *Кравець П.О.* Ігрова модель системи з авторитарним прийняттям рішень / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2018. — № 901. — С. 61–67.
20. *Бурков В.Н.* Теория активных систем: состояние и перспективы / В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. — М.: Синтег, 1999. — 128 с.
21. *Айзерман М.А.* Выбор вариантов: основы теории / М.А. Айзерман, В.Ф. Алескеров. — М.: Наука, 1990. — 240 с.
22. *Назин А.В.* Адаптивный выбор вариантов / А.В. Назин, А.С. Позняк. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
23. *Гермейер Ю.Б.* Игры с противоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
24. *Губко М.В.* Теория игр в управлении организационными системами / М.В. Губко, Д.А. Новиков. — М.: Синтег, 2002. — 148 с.
25. *Новиков Д.А.* Игры и сети / Д.А. Новиков // Математическая теория игр и ее приложения. — Т. 2, Вып. 1. — 2010. — С. 107–124.
26. *Tadelis S.* Game Theory: An Introduction / S. Tadelis. — Princeton University Press, 2013. — 416 p.
27. *Petrosjan L.A.* Game Theory and Application / L.A. Petrosjan, V.V. Mazalov. — New York: Nova Science Publishers, 2007. — 227 p.
28. *Ungureanu V.* Pareto-Nash-Stackelberg Game and Control Theory: Intelligent Paradigms and Applications / V. Ungureanu. — Springer, 2018. — 343 p.
29. *Neogy S.K.* Mathematical Programming and Game Theory / S.K. Neogy, R.B. Vapat, D. Dubey. — Springer, 2018. — 226 p.
30. *Kushner H.* Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications / H. Kushner, G. George Yin. — Springer Science & Business Media, 2013. — 417 p.

*Надійшла 15.04.2019*

## МЕТОДОЛОГІЯ ПОБУДОВИ ОСНОВНИХ МЕТРИК *Q*-АНАЛІЗУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

В.І. ПОЛУЦИГАНОВА, С.А. СМІРНОВ

**Анотація.** Дослідження складних систем потребує застосування різноманітних методів, які повинні надавати корисну інформацію для забезпечення ефективного управління. Використання *Q*-аналізу дає змогу поглибитись у структуру системи та зрозуміти складний взаємозв'язок між її компонентами. У ході дослідження введено такі поняття, як структурне дерево, локальні карти та процедура наслідування, які дозволяють краще усвідомити сенс метрик системи, отриманих за допомогою *Q*-аналізу. На цій основі розроблено алгоритми для визначення основних метрик і застосовано до банківської системи України станом на 2016 р. Запропоновано інтерпретацію отриманих результатів та описано їх практичну значущість.

**Ключові слова:** система, структура, складність, *Q*-аналіз.

### ВСТУП

Дослідження зв'язності та складності соціально-економічної системи необхідно особі, яка приймає рішення, для вирішення завдань управління системою — вибору ефективних способів та агентів управління, оцінювання умов, потрібних для реалізації управління, забезпечення трансформацій та збереження цілосності системи. Слабозв'язана система допускає ефективне селективне управління підсистемами. Це може мати як позитивні, так і негативні наслідки у разі недотримання принципу системності.

Різні концепції зв'язності відображають єдину тенденцію — виявлення істотних, функціонально-значущих зв'язків у системі, порушення або зникнення яких повністю або частково змінюють можливості досягнення цілей, виконання її місії, а також можливості функціонування.

У роботі для аналізу структури системи, її зв'язків як внутрішніх, так і з зовнішнім середовищем пропонується використовувати поняття *q*-зв'язності [1]. Система є зв'язною, якщо можливий обмін ресурсами між будь-якими двома її підсистемами (передбачається, якщо *i*-а підсистема впливає на *i* – *y* підсистему, то і *j*-а підсистема впливає на *i* – *y*).

Методика аналізу *q*-зв'язності дозволяє оцінити структуру системи більш глибоко, ніж на основі традиційного підходів теорії графів, оскільки при цьому встановлюється наявність та структура цілої ієрархії зв'язків між її підсистемами. На підставі нових можливостей пропонуються формалізовані правила обґрунтування вибору цільових і керувальних агентів, визначення та умови структурної стійкості системи. Системам ставляться у відповідність спеціальні симплексійні комплекси, які визначаються завданням базових симплексів, та структури їх зв'язків. Аналіз *q*-зв'язності системи

також дозволяє запропонувати й обґрунтувати процедури її декомпозиції і агрегування, виявляти підсистеми, які найбільше впливають на процеси в системі й обирати окремих агентів, яких раціональніше використовувати як впливові [2].

Симплексійний комплекс утворює багатозв'язну складну структуру у багатовимірному просторі, саме ця структура є предметом дослідження Q-аналізу

Розглянемо дві множини  $(X)$  та  $(Y)$ . Задамо бінарне відношення  $(\lambda)$  між цими двома множинами елементів як підмножину декартового добутку  $(X) \times (Y) : \lambda \subset (X) \times (Y)$ . Нехай  $(Y) = \{(Y_1), (Y_2), \dots, (Y_n)\}$ ,  $(X) = \{(X_1), (X_2), \dots, (X_n)\}$  і множина  $(Y)$  пов'язана відношенням  $(\lambda)$  із множиною  $(X)$ . Пара  $((Y_i), (X_j)) \in (\lambda)$  та елемент множини  $(Y_i)$  перебуває у відношенні  $(\lambda)$  до  $(X_k)$ , де  $(\lambda_{ij}) = 1$  у разі виконання певного критерію і  $(\lambda_{ij}) = 0$  у разі невиконання.

Таким чином, відношення між множинами елементів системи подається за допомогою матриці інцидентності  $(\delta) : (\delta) = (\lambda_{ij})$ , де

$$(\lambda_{ik}) = \{1, \text{ якщо } ((Y_i), (X_j)) \in (\lambda_{ik}); \\ 0, \text{ якщо } ((Y_i), (X_j)) \notin (\lambda_{ik}) \}.$$

Відношення  $(\lambda)$  може породжувати симплексійний комплекс, що позначається через  $(K_Y)((X); (\lambda))$ . Симплексійний комплекс складається із множини вершин  $(X)$  та множини симплексів  $(Y)$ , що утворені з підмножини вершин, у яких кожна з них пов'язана з кожною відповідно до заданого бінарного відношення  $(\lambda)$ . Крім того,  $n$ -симплекс складається з  $n+1$  вершин і його розмірність на одиницю менша за кількість вершин. Симплексійний комплекс  $(K_Y)((X); (\lambda))$  утворений множиною симплексів  $(Y)$ , зв'язаних спільними гранями, тобто через спільні симплекси меншої розмірності.

Із поняттям зв'язності тісно переплітається поняття складності системи.

Складність системи також створює проблеми аналізу довгих причинно-наслідкових шляхів і циклів, а також складності управління. Складність моделі також відображає тип невизначеності, який не піддається обробленню імовірнісними методами.

Розглянемо поняття ланцюга зв'язку, який відображає той факт, що два симплекси можуть і не мати спільної грані, але можуть бути зв'язані за допомогою послідовності проміжних симплексів. Поняття  $q$ -зв'язку можна визначити таким чином.

Вважається, що задана пара симплексів  $(\sigma_p), (\sigma_r) \in (K)$  зв'язана у ланцюг, коли існує скінченна послідовність симплексів  $(\sigma_{a1}), (\sigma_{a2}), \dots, (\sigma_{ah})$  така, що  $(\sigma_{a1})$  — грань симплексу  $(\sigma_p)$ ;  $(\sigma_{a2})$  — грань симплексу  $(\sigma_r)$ ;  $(\sigma_{a1})$  та  $(\sigma_{ah})$  — з'єднанні спільною гранню, наприклад  $(\sigma_{bi})$ , для  $(b_{ii}) = 1, \dots, (h-1)$ .

Будемо вважати, що цей ланцюг зв'язку є  $q$ -зв'язком між його кінцями, якщо  $q$  є найменшим із цілих чисел  $\{(a_1), (b_1), (b_2), \dots, (b_{h1}), (a_h)\}$ . Таким чином, відповідний ланцюг є класом еквівалентності бінарного відношення  $q$ -зв'язності між симплексами комплексу.

Зокрема, якщо два симплекси мають  $(q)+1$  спільні вершини (спільні  $q$ -вимірні симплекси), то вони є  $q$ -зв'язними. Алгоритм знаходження значень  $(q)$  для спільних граней усіх пар симплексів у  $(K)$  та алгоритм отримання значень  $(Q_q)$  використовує матрицю інцидентності  $(\delta)$ , що визначає  $(K)$  [3].

Вивчення структурно складних систем потребує дослідження як на глобальному рівні з позицій структури як єдиного цілого, так і на локальних рівнях з позицій окремих підсистем, їх зв'язків та елементів. Різні концепції складності і зв'язності систем відображають єдину тенденцію — виявлення істотних, функціонально-значущих зв'язків системи, порушення або виникнення яких змінює істотно або частково можливості досягнення поставлених перед системою цілей, можливості виконання її місії або просто функціональні можливості. Для вирішення завдань аналізу зв'язності систем корисно застосовувати апарат алгебричної (комбінаторної) топології, що дозволяє аналізувати структуру системи як складний багатовимірний геометричний об'єкт — симплексійний комплекс, та використовувати інструмент симплексійного аналізу зв'язності [1].

Як відомо, у симплексійному аналізі система розглядається у вигляді відношень елементів множин — набору вершин  $(V)$ , і заданої сім'ї непорожніх підмножин множини цих вершин-симплексів. Структура системи є образом для геометричного і алгебричного її подання як симплексійного комплексу  $(K)$ , утвореного множиною вершин і відповідних їм симплексів. Для їх побудови може бути використана структура системи, заданої у вигляді когнітивної карти. Тобто будь-які відношення в системі подаються таким чином, що набір елементів, пов'язаних з конкретним елементом, трактується як симплекс, геометрична розмірність якого визначається кількістю дуг, що з'єднують вершини в симплексі через змінну. Симплекси можуть визначатися як по рядках  $(X)$ , так і по стовпцях  $(Y)$  матриці інцидентності графу, тому відповідно можуть бути побудовані два комплекси. Таким чином, симплексійний комплекс формується шляхом розбиття деякого простору, заданого, наприклад, графом  $G$  на підмножини, що перетинаються. Оскільки симплексійний комплекс — це сім'я симплексів, з'єднаних за допомогою загальних граней (зокрема, загальною вершиною — точкою), то характеристикою зв'язності може слугувати розмірність перетину, підсимплексу, що належить обом симплексам. Комплекс існує як ціле, тому для глобалізації аналізу зв'язності використовується поняття «ланцюг зв'язку»  $q$ -зв'язності (ланцюг зв'язку відображає можливість того, що два симплекси, безпосередньо не маючи загальної частини, можуть бути зв'язані за допомогою послідовності проміжних симплексів, що мають перетин). На основі можливостей симплексійного аналізу пропонуються формалізовані правила обґрунтування вибору цільових і керувальних вершин, визначення стійкості систем, які характеризуються тими чи іншими симплексійними комплексами, та умови структурної стійкості систем [4].

Відзначимо, що використання симплексного аналізу можливе за мінімальною апіорною інформацією про досліджувані об'єкти і явища [5].

## ПЕРЕВАГИ ТА ОБМЕЖЕННЯ $Q$ -АНАЛІЗУ

$Q$ -аналіз є математичною мовою, а не статистичною технікою, і не пов'язаний з теорією ймовірностей. Це дає  $Q$ -аналізу потужну описову перевагу для вирішення практичних завдань, для яких статистичні методи є недоречними або їх немає взагалі. У будь-якому випадку  $Q$ -аналіз не включає статистичного оброблення, але Аткін [6] окреслив обставини, за яких мову теорії ймовірності можна застосувати.

$Q$ -аналіз покладається на однозначне визначення наборів симплексів і використання відношень між ними. Це дозволяє цій мові бути досить «дружною» до вихідних даних. Недостатня увага до понять, таких як теорія, гіпотеза чи модель у  $Q$ -аналізі, обумовлює важливість коректного формування даних.

Одне із цікавих застосувань  $Q$ -аналізу знайдено у багатокритеріальних задачах прийняття рішень; відповідний метод називається багатокритеріальним  $Q$ -аналізом [7]. У відповідних працях також обговорюються переваги та обмеження  $Q$ -аналізу, а також пропозиції щодо його інших перспективних застосувань.

Можливі такі недоліки існуючої версії  $Q$ -аналізу:

1. Отримуються лише якісні показники та метрики відношень, на відміну від статистичного аналізу, але не вимагаються однотипні реплікації наборів даних, як у статистичному аналізі.

2. Математична теорія  $Q$ -аналізу не є простою, однак глибоке розуміння цієї теорії не дає суттєвих переваг для її застосування та правильної інтерпретації результатів.

3. Існує багато показників, які можуть бути використані, тому мають бути прийнятні метрики для подальшого порівняння результатів.

4. Прикладна інтерпретація результатів не завжди проста.

Основні переваги використання  $Q$ -аналізу:

1. Простий для застосування метод потребує лише арифметичних типів обчислень.

2. Гнучкий та масштабований, тобто не виникає проблем у разі зміни розмірності  $q$ -рівнів або визначень предметних асоціацій.

3. Забезпечує визначення як прямих, так і опосередкованих показників (наприклад, таких як рівні  $q$ -зв'язків, ексцентриситет, класи еквівалентності відношень зв'язків, елементи структурного вектора).

4. Може бути використаний у методах багатокритеріального прийняття рішень, а також для вирішення багатьох інших проблем, пов'язаних з динамічним аналізом структури зв'язків.

## ПРОБЛЕМАТИКА

Існуюча методологія використання  $Q$ -аналізу орієнтована на розрахунки вручну, тобто обчислення без використання комп'ютерів. Це зумовлено тим,

що більшість задач, для яких застосовувався цей метод, мали досить малий розмір — елементів та зв'язків не багато. Але сучасні системи, що досліджуються, мають тисячі та десятки тисяч елементів і ще більше зв'язків. Тому подібні обчислення стають проблематичними, а матриці інцидентності візуально неосяжними. Застосовувати метод  $Q$ -аналізу без автоматизації майже нереально і не має сенсу, оскільки обчислювати доведеться роками. У праці [8] наведено деякі обчислення метрик для аналізу, які можуть бути автоматизовані, їх доповнення, а також визначено нові алгоритми для застосування  $Q$ -аналізу для великих (понад 1000 елементів) систем.

## ПОБУДОВА СИМПЛЕКСІЙНОГО КОМПЛЕКСУ СКЛАДНОЇ СИСТЕМИ

Сьогодні не підлягає сумніву, що будь-яка система може в тому чи іншому вигляді описуватися за допомогою елементів та зв'язків між ними. Але якщо елементи мають відношення високих порядків, наприклад, три елементи мають не тільки взаємозв'язок між собою попарно, але є неподільним елементом системи, тоді такий зв'язок асоціюється з площиною трикутника. Такі типи відношень важко описати за допомогою теорії графів (приспосованої суто до бінарних відношень), тому доцільно використовувати симплексійні комплекси.

Алгоритми знаходження значень  $q$ -зв'язності для спільних граней усіх пар симплексів у комплексі та обчислення кількості класів еквівалентності ( $Q_q$ ) використовує матрицю інцидентності ( $\Delta$ ), що визначає комплекс ( $K$ ).

Очевидно, що якщо множини ( $Y$ ) і ( $X$ ) мають ( $m$ ) і ( $n$ ) елементів відповідно, то матриця ( $\Delta$ ) є матрицею розміром  $(m) \times (n)$ , що складається з нулів та одиниць. Добуток матриць  $(\Delta)(\Delta^T)$  формує число, яке стоїть на місці  $(i, j)$  і є скалярним добутком рядків  $(i)$  та  $(j)$  у матриці ( $\Delta$ ). Воно дорівнює числу одиниць, що стоять на одних і тих самих місцях у рядках  $(i)$  та  $(j)$  матриці ( $\Delta$ ) і формують їх перетин, і відповідає значенню  $(q+1)$ , де  $(q)$  — розмірність спільної грані симплексів  $(\sigma_p), (\sigma_r)$ , заданих рядками  $(i)$  та  $(j)$ .

Таким чином, суть запропонованого алгоритму така. Для знаходження  $q$ -спільних граней усіх пар  $Y$ -симплексів у  $(K_Y)((X);(\lambda))$  необхідно обчислити:

- матрицю  $(\Delta)(\Delta^T)$  розміром  $(m) \times (m)$ ;
- різницю  $(\Delta)(\Delta^T) - (\Omega)$ , де  $(\Omega)$  — матриця, що складається з одиниць.

Цілі числа на діагоналі отриманої матриці є розмірностями симплексів ( $Y$ ).

Поняття  $q$ -зв'язності симплексів є відношенням еквівалентності. Тому задача аналізу глобальної структури зв'язності комплексу ( $K$ ) зводиться до дослідження класів еквівалентності щодо  $q$ -зв'язності. Для кожного значення зв'язності  $(q) = 0, 1, \dots, \dim(K)$  можна знайти відповідну кількість класів еквівалентності ( $Q_q$ ).



Опишемо знаходження конкретних симплексів у кожному класі еквівалентності. Для цього будуються матриці  $(A^k)$   $q$ -зв'язків  $(k) = \overline{0, n}$ , де  $(n)$  — кількість класів еквівалентності. Алгоритм виглядає так: для всіх  $(k)$ :

$$(A^k) = \{(a_{ij}) = 1, \text{ якщо } (\Delta_{ij}) > (k); \text{ інакше } - (a_{ij}) = 0\}.$$

Алгоритм знаходження симплексів для кожної матриці  $(A^k)$ :

- 1) обираємо  $(a_{11}^k)$ , знаходимо всі недіагональні елементи рядка 1;
- 2) додаємо їх до симплексу з позначкою рівня зв'язку;
- 3) переходимо до тих рядків, для яких номер збігається з  $(j)$  першого рядка;
- 4) для кожного рядка, якщо існують такі ненульові елементи, для яких  $(j) > (i)$ , то додаємо їх до симплексу і переходимо до рядків п.2;
- 5) після проходження всієї матриці видаляємо стовпці та рядки тих елементів, які були додані до поточного симплексу;
- 6) продовжуємо алгоритм спочатку, поки матриця не виродиться;
- 7) усі ітерації повторюємо для кожної матриці  $(A^k)$ .

## ПОБУДОВА СТРУКТУРНОГО ВЕКТОРА

Якщо комплекс  $(K)$  має розмірність  $n$ , для кожного значення  $(q) = 0, 1, \dots, n$  можна визначити кількість різних класів еквівалентності  $q$ -зв'язності  $(Q_q)$  і побудувати структурний вектор зв'язності комплексу  $(Q) = ((Q_n), (Q_{n-1}), \dots, (Q_1), (Q_0))$ , де  $(Q_n) = (Q_{\dim(K)})$ .

Вище визначалися симплекси, що утворюють ланцюги для кожного рівня  $q$ -зв'язку. Щоб визначити структурний вектор, потрібно підрахувати кількість ланцюгів симплексів на кожному рівні  $q$ -зв'язності. Для цього необхідно побудувати транзитивне замикання для відношення безпосереднього прилягання симплексів.

Транзитивним замиканням відношення  $(R)$  називається бінарне відношення  $(R')$  таке, що  $(x)(R')(y)$  тоді і тільки тоді, коли існує такий ланцюжок елементів з  $(X)$ :

- $(z_0) = (x), (z_1), (z_2), \dots, (z_n) = (y)$ , що між сусідами в цьому ланцюжку виконано відношення  $(R)$ :
- $(z_0)(R)(z_1), (z_1)(R)(z_2), \dots, (z_{n-1})(R)(z_n)$ .

Для обчислення транзитивного замикання можна використати алгоритм Уоршалла [9]. Виходом алгоритму є матриця транзитивного замикання вихідних матриць, з яких можна визначити ланцюги симплексів на кожному рівні  $q$ -зв'язку. Псевдокод алгоритму такий.

Вхід: відношення, задане матрицею  $(R)$ .

Вихід: транзитивне замикання відношення, задане матрицею  $(T)$ .

```

S := R
for i from 1 to n do
  for j from 1 to n do
    for k from 1 to n do
      T[j, k] := S[j, k] V S[j, i] & S[i, k]
    end for
  end for
end for
S := T
end for

```

Підраховувавши кількість ланцюгів, отримуємо структурний вектор комплексу як характеристику структури системи.

### ПОШУК НАЩАДКІВ

Поняття «нащадки» та «наслідування» вводимо для того, щоб відзначити механізм розпаду класів еквівалентності, який є головним для формування ланцюгів вищої зв'язності. Оскільки  $(q+1)$ -зв'язок є частковим випадком  $q$ -зв'язку, між відповідними класами еквівалентності виникає відношення наслідування. Чим більша кількість нащадків ланцюга, тим більше значення відповідного числа у структурному векторі. Його значення є сумою чисел усіх нащадків усіх ланцюгів на одиницю меншої зв'язності.

Для побудови таблиці нащадків на кожному рівні використовуємо матриці  $q$ -зв'язку. Починаючи з рівня  $(k) = 1$  побудовані на кожній ітерації ланцюги є нащадками того ланцюга, який їх породив. Після цієї процедури підраховуємо кількість ланцюгів на кожному рівні зв'язності.

Формальне подання процедури:

1. Для всіх  $(i) = \overline{0, (m)}$ , де  $(m)$  — розмірність матриці зв'язку і для всіх  $(k) = \overline{0, (n)}$ , де  $(n)$  — розмірність структурного вектора.
2. Вибираємо перший елемент матриці  $(t_{ii})$  і знаходимо симплексійний ланцюг, у який він входить.
3. Відмічаємо лічильником  $(j) = \overline{0, (d)}$ , де  $(d)$  — значення структурного вектора на кожному рівні, кожний елемент ланцюга.
4. Операцію проводимо для всіх ланцюгів симплексійного комплексу.
5. Переходимо до матриці  $(k) = (k) + 1$ .
6. Переносимо відмітки з попередньої матриці.
7. Починаємо алгоритм з п. 2.

Наприкінці маємо матрицю  $(B^k)$ , елементами якої є вектори. Кожен елемент позначає симплекс, до якого належить елемент. Видаливши всі повторювальні вектори та підраховувавши кількість елементів у них, визначаємо кількість нащадків кожного ланцюга симплексійного комплексу. Отриманий

вектор, що складається з векторів маркування, дає змогу побудувати структурне дерево симплексійного комплексу.

## ПОБУДОВА СТРУКТУРНОГО ДЕРЕВА

Вважається, що результатом  $Q$ -аналізу є отримання структурного вектора зв'язності. Він надає інформацію про те, наскільки цілісною чи фрагментованою є система на тому чи іншому рівні зв'язності, проте ніяк не ілюструє повну картину структури системи на кожному такому рівні.

Одним зі зручних інструментів для візуалізації структури є її подання у вигляді дерева. Для зручності називатимемо таке дерево  $Q$ -деревом. Структурне дерево визначається з ланцюгів симплексів на кожному рівні  $q$ -зв'язності (вершини) і відповідає структурі наслідування між ними (дуги). Побудуємо алгоритм його формування. Діагональні елементи  $(a_{ii})$  відображають розмірність  $i$ -го симплексу. Повну кількість симплексів, які входять до комплексу, позначимо як  $(n)$ .

1. Формуємо корінь дерева, який означає зв'язність симплексійного комплексу на рівні  $(q) = -1$  і відповідає комплексу в цілому.

2. Будуємо вузли-нащадки  $(q_1), \dots, (q_m)$  для рівня зв'язності  $(q) = 0$ . Число  $m$  відповідає кількості незв'язних компонент на даному рівні зв'язності:

а) формуємо вузол-нащадок  $(q_1)$ , аналізуючи симплекси, які входять до цього вузла. Автоматично до нього входить симплекс  $(\sigma_p)$ , де  $(p) = \min_i \{ (a_{ii}) \geq (q) \}$ . Далі розглядаємо всі інші симплекси, розмірність яких не менше ніж  $q(q)$ :  $(\sigma_{p+1}), (\sigma_{p+2}), \dots, (\sigma_{p+t})$ , де  $(t) \leq (n) - (p)$ . Якщо розглянутий симплекс зв'язаний із симплексом  $(\sigma_p)$  (або з будь-яким іншим, що вже ввійшли до складу вузла  $(q_1)$ ) на даному рівні зв'язності  $(q)$  (тобто  $(a_p) + (j) \geq (q)$ ), то включаємо симплекс  $(\sigma_{p+j})$  до вузла  $(q_1)$ ;

б) якщо серед симплексів, розмірність яких не менша ніж  $q$ , залишились такі, що не ввійшли до складу вузла-нащадка  $(q_1)$ , формуємо вузол-нащадок  $(q_2)$ , записуючи до нього один із симплексів з тих, що залишились (позначимо як  $(\sigma_k)$ ), і присьдуючи до нього інші симплекси, які зв'язані з  $(\sigma_k)$  на рівні зв'язності  $(q) = 0$

в) продовжуємо виділяти вузли-нащадки  $q_1$ , доки не включимо до складу різних вузлів усі симплекси, які мають розмірність не меншу за  $(q) + 1$ ;

г) якщо вузол  $(q_1)$  складається лише з одного симплексу розмірності  $(q)$ , то вважаємо даний вузол листовим елементом дерева.

3. Продовжуємо аналогічно будувати вузли-нащадки  $(q_1), \dots, (q_m)$  для рівнів зв'язності  $(q) \geq 0$ , виконуючи пункти а) і б) із кроку 2. Кожен вузол-нащадок формуємо винятково із симплексів, які входили до складу батьківського вузла.

4. Закінчуємо алгоритм, коли кожний вузол-нащадок набув статусу листового елемента дерева.

Зауважимо, що кількість вузлів на кожному рівні зв'язності дорівнює відповідній компоненті структурного вектора зв'язності.

Отже, побудувавши  $Q$ -дерево, можемо бачити не тільки те, на скільки окремих частин ділиться система на кожному рівні зв'язності, а й те, на які саме компоненти розділяються ланцюги на наступному рівні та на якому рівні зв'язності розглядуваний симплекс перестає бути помітним для спостерігача.

## ПОБУДОВА ЛОКАЛЬНИХ КАРТ

Структурне дерево містить значно більше інформації ніж структурний вектор, але інформація про характер «склеювання» нащадків у ланцюзі, що породжує їх, усе ще не знайшла відображення. Саме для цього і пропонуються локальні карти.

Нехай маємо вхідні дані про систему, подані у формі симетричної матриці ( $A$ ), елементи якої вказують на зв'язки безпосереднього прилягання між парами симплексів. Якщо елемент  $(a_{ij}) = (c), (c) > 0$ , то це означає, що пара симплексів  $(\sigma_i)$  і  $(\sigma_j)$  має  $(c)+1$  спільних вершин, тобто зв'язана  $c$ -вимірним симплексом. Отже, можна записати, що її розмірність прилягання  $(q) = (c)$ . Якщо елемент  $(a_{ij}) = 0$ , то пара симплексів  $(\sigma_i)$  і  $(\sigma_j)$  має одну спільну вершину і є 0-прилеглою. Якщо елемент  $(a_{ij}) = -1$ , то пара симплексів  $(\sigma_i)$  і  $(\sigma_j)$  не має прилягання взагалі. Діагональні елементи  $(a_{ii})$  відображають розмірність  $i$ -го симплексу (розмірність самозв'язності).

Побудова локальних карт зв'язків для кожного рівня зв'язності  $(q)$  дає змогу наочно бачити та досліджувати, які саме симплекси є суміжними (прилеглими) на конкретному розглядуваному рівні  $(q)$ . Локальна карта надає інформацію як про суміжність симплексів, так і про зв'язність — пара симплексів є зв'язною, якщо між відповідними вершинами графу існує шлях.

Будуємо локальні карти, або  $Q$ -графи, використовуючи такий алгоритм:

1. Будуємо локальну карту для рівня зв'язності  $(q) = (k)$ . Формуємо вершини  $Q$ -графу з усіх симплексів, розмірність яких не менша ніж  $(k)$ .

2. Формуємо ребра  $Q$ -графу. Послідовно аналізуємо кожну пару симплексів, які ввійшли до складу вершин графу, і якщо для пари симплексів  $(\sigma_i)$  і  $(\sigma_j)$  елемент матриці вхідних даних  $(a_{ij}) > (k)$ , то два симплекси  $(\sigma_i)$  і  $(\sigma_j)$  зв'язані ребром.

3. Проаналізувавши всі можливі пари, переходимо до наступного рівня зв'язності  $(q)$ , тобто повертаємось до п.1, беручи значення  $(q) = (k) + 1$ .

Побудувавши локальні карти для всіх наявних рівнів зв'язності, закінчуємо алгоритм.

Подання суміжності/прилягання симплексів у вигляді локальних карт дає змогу візуально побачити структуру зв'язків компонент системи, чи є вони суміжними, просто зв'язаними, чи незалежними. Крім того, локальні карти показують, як саме та на скільки окремих компонентів розпалася структура системи на розглядуваному рівні зв'язності  $(q)$ .

## ПРИКЛАД РОБОТИ Q-АНАЛІЗУ НА ОСНОВІ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ

Натепер на території України функціонує велика кількість банків. Кожний з них є акціонерною установою, тому має перелік власників. Повний список власників перевищує 1000 фізичних та юридичних осіб, тому за такими да-

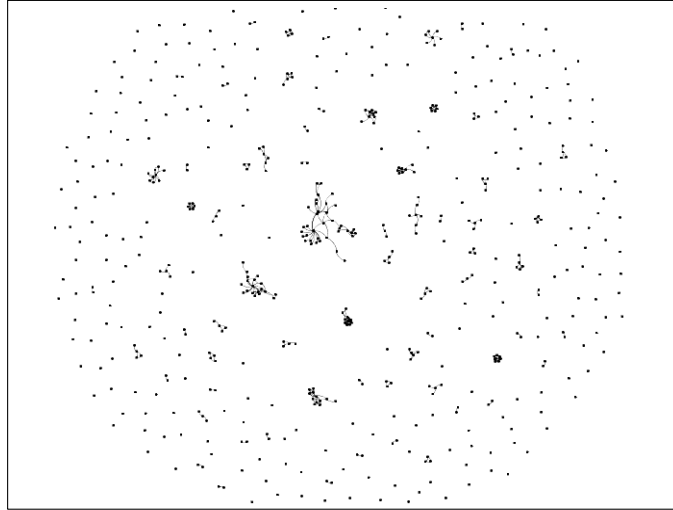


Рис. 1. Сиплексійний комплекс для структури взаємозв'язків банків та юридичних осіб

ними важко оцінити як пов'язані між собою співвласники та чи існують такі власники, які є акціонерами одразу декількох банків. Протягом дослідження [10] виявлено зв'язки між акціонерами та банками, а також взаємозв'язки між власниками. Дослідження виконувалось у двох напрямках: взаємозв'язок банків та юридичних осіб; зв'язок банків та всіх власників, тобто фізичних та юридичних осіб.

## ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК БАНКІВ ТА ЮРИДИЧНИХ ОСІБ

Для випадку такого взаємозв'язку побудований симплеціальний комплекс виглядає як показано на рис. 1. Оскільки структура система досить розрізнена, комплекс виглядає як набір під графів, при цьому кожний з них має розмірність  $(n) \geq (l)$  і зв'язність  $(q) \geq 0$ .

У ході  $q$ -аналізу визначено структурний вектор, значення структурного вектора в табл. 1. Рядок  $(q)$  відповідає рівню зв'язку, а  $(N)$  — кількості ланцюгів на кожному з них.

Таблиця 1. Значення структурного вектора для системи «банки–юридичні особи»

$q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$N$	464	204	134	99	84	75	67	63	57	54	48	43	39	38	36	36	34	34	33	33	30
$q$	22	23	24	25	26	27	28	29	30												
$N$	20	16	14	14	10	6	5	5	1												

Зі значень структурного вектора видно, що більшість складових мають просту структуру і не мають складних зв'язків, але приблизно третина з них

мають зв'язки високих порядків, що, у свою чергу, є індикатором того, що деякі юридичні особи є співвласниками декількох банків, а тому можуть впливати на банківську систему в цілому.

Наведемо значення цікавої метрики — показника, що вказує наскільки симплекси «міцно вбудовані» в комплекс на основі відношення власної розмірності до розмірності зв'язків (рис. 2). Позначимо через ( $\hat{q}$ ) власну розмірність симплексу, а через ( $\tilde{q}$ ) — максимальну розмірність зв'язку з іншими симплексами. На діаграмі зображено «заселеність» того чи іншого рівня співвідношення.

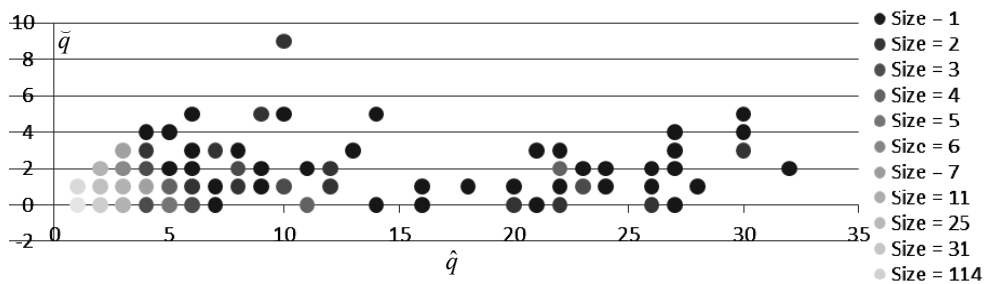


Рис. 2. Співвідношення власної розмірності симплексу до розмірності зв'язку в симплексійному комплексі для системи «банки–юридичні особи»

Із діаграми видно, що найбільше в комплексі не зв'язаних симплексів з  $q$ -зв'язністю, що дорівнює 1. Але є симплекси з власною великою розмірністю та потужною зв'язністю з іншими симплексами, а це означає, що деякі установи мають мало не монопольний вплив у певній підструктурі банківської системи, що, у свою чергу, може негативно впливати на економіку в цілому.

### ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК БАНКІВ ТА ВСІХ АКЦІОНЕРІВ

Для цього випадку симплексійний комплекс, зображений на рис. 3, схожий на комплекс на рис. 1, але його структура менш розріджена, тому поодиноких симплексів малої розмірності набагато менше.

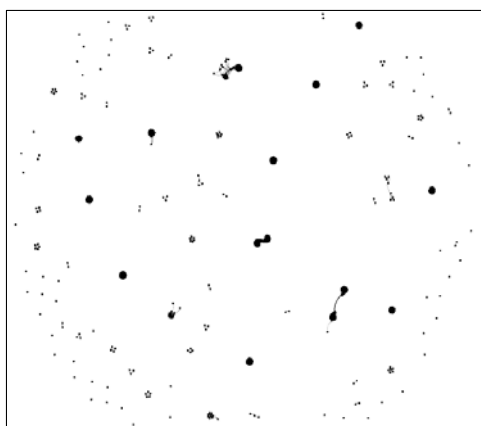


Рис. 3. Симплексійний комплекс для системи «банки–власники»

Визначені значення структурного вектора наведено в табл. 2.

**Таблиця 2.** Значення структурного вектора для системи «банки – власники»

$q$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$N$	195	48	20	6	4	1	1	1	1

На відміну від першого випадку видно, що структура всіх акціонерів банків дуже спрощена, що і має бути в такій галузі, як банківська система. Більшість симплексів мають розмірність ( $q$ ) = 0, а отже, не впливають один на одного.

Аналогічний зв'язок між власною розмірністю та розмірністю зв'язків показано на рис. 4.

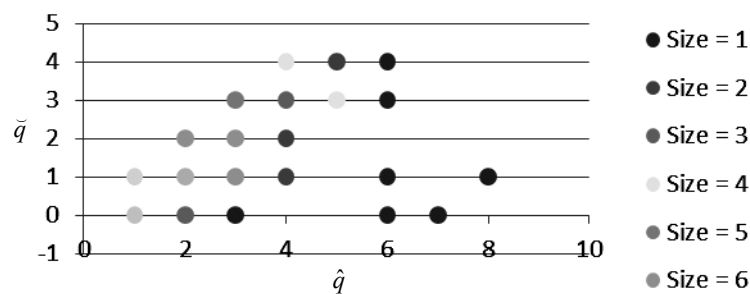


Рис. 4. Співвідношення власної розмірності симплексу до розмірності зв'язку у симплексійному комплексі для системи «банки–власники»

Із діаграми видно, що найбільше в комплексі не зв'язаних симплексів з  $q$ -зв'язністю, що дорівнює 1. Кількість елементів з великою власною розмірністю та потужною розмірністю взаємозв'язків набагато менша ніж в першому випадку. Це означає, що система «банки–акціонери» є слабозв'язною, що в цілому є позитивним явищем.

## ВИСНОВКИ

Методи  $Q$ -аналізу дозволяють дослідити структуру складної системи та визначити зв'язки високих порядків, які складно відобразити та побачити безпосередньо за допомогою теорії графів. На основі результатів  $q$ -аналізу виникає можливість ставити завдання з боку керувальних органів щодо планування ресурсного забезпечення підсистем, підкріплення або послаблення тих чи інших зв'язків у складній системі для покращення її функціонування.

У ході роботи визначено основні поняття, які відображають структуру багатовимірних зв'язків між підсистемами складної системи — суміжність, зв'язність, наслідування, структурне дерево та локальні карти відповідного симплексійного комплексу. Установлено зв'язки та залежності між ними, що визначає концептуальну базу методології побудови алгоритмічного забезпечення основних задач  $Q$ -аналізу.

На цій основі розроблено методики, що дозволяють аналізувати не лише загальну структуру самої системи, а й характер зв'язків між її підсистемами. До переваг слід віднести можливість їх використання для систем будь-якого масштабу, тобто які мають велику кількість підсистем, а їх взає-

мозв'язки багатокomпонентні та неочевидні з першого погляду. Використання даних алгоритмів дозволяє автоматизувати процес визначення ланцюгів симплексів, структурного вектора, пошуку структурного дерева, локальних карт та інших структурних характеристик системи.

Розроблені алгоритми застосовано до банківської системи України. У результаті дослідження відзначено задовільну структуру системи. Утім існують підсистеми зі складною структурою зв'язків із системою, що дає підґрунтя для їх подальшої більш глибокої перевірки на наявність монополістичних схем та порушень.

Підкреслено важливість та перспективність використання методів  $Q$ -аналізу та алгоритмів обчислення відповідних метрик, розроблених на їх основі, для структурного аналізу складних систем.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Atkin R.H.* Combinatorial Connectivities in Social Systems. An Application of Simplicial Complex Structures to the Study of Large Organisations, Interdisciplinary Systems Research / R.H. Atkin. — 1997.
2. *Берёза О.А.* Симплициальный анализ когнитивных карт социально-экономических систем / О.А. Берёза // Информационные технологии в управлении. — 2011. — № 11. — С. 151–161.
3. *R. Beaumont J.* An introduction to  $Q$ -analysis / R. Beaumont J., C. Gatrell A. — 1982. — 134 p.
4. *Maletic S.V.* Simplicial complexes and complex networks: the influence of higher-order (sub)structures on network properties: дис... доктора техн. наук / S.V. Maletic. — Beograd, 2013. — 65 с.
5. *Avdeeva Z.* Cognitive Approach in Simulation and Control / Z. Avdeeva, S. Kovriga // Plenary papers, Milestone reports & Selected survey papers. 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 2008. — P. 160–167.
6. *Atkin R.H.* Mathematical structure in human affairs / R.H. Atkin. — London: Heinemann Educational Books, 1973. — 143 с.
7. *Duckstein L.*  $Q$ -analysis for modeling and decision making / L. Duckstein, S.A. Nobe // European Journal of Operational Research. — 1997. — N 103(3). — P. 411–425.
8. *Медведенко В.І.* Використання алгоритмів  $q$ -аналізу на прикладі банківської системи / В.І. Медведенко, С.А. Смирнов. — К.: ВПІ ВПК «Політехніка», 2018. — № 156. — С. 33–36.
9. *Floyd–Warshall algorithm* // Wikipedia. — Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm) – 20.04.2018.
10. *Медведенко В.І.* Використання  $q$ -аналізу для дослідження зв'язків у банківських системах / В.І. Медведенко, С.А. Смирнов. — Київ: ВПІ ВПК «Політехніка», 2017. — № 15. — С. 44–46.

Надійшла 20.09.2019



УДК 62.50  
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.08

**МЕТОД АВТОМАТИЗАЦІЇ УПРАВЛЕННЯ  
В КОГНИТИВНИХ КАРТАХ НА ОСНОВЕ СИНТЕЗА  
ПРИРАЩЕНИЙ ВЕСОВИХ КОЕФФІЦІЕНТОВ  
І КООРДИНАТ ВЕРШИН**

**В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МИЛЯВСКИЙ**

**Анотація.** Рассмотрено решение проблемы автоматизации управления импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем путем синтеза закона управления на основе варьирования координат вершин когнитивных карт и весовых коэффициентов при формировании управляющих воздействий в замкнутой системе управления. В качестве примера рассмотрено применение разработанных алгоритмов для управления качеством подготовки персонала IT компании, модель которой представлена в виде когнитивной карты.

**Ключевые слова:** когнитивная карта, замкнутая система управления, импульсный процесс, квадратичный критерий оптимальности.

**ВВЕДЕНИЕ**

Когнитивная карта (КК) представляет собой взвешенный ориентированный граф, вершины которого отображают концепты (координаты) сложных систем, а ребра (дуги) графа с весовыми коэффициентами описывают причинно-следственные взаимосвязи между вершинами.

В процессе функционирования сложной системы под влиянием различных возмущений координаты КК изменяются во времени. Каждая вершина КК  $R_i$  принимает значение  $Y_i(k)$  в дискретные моменты времени  $k = 0, 1, 2, \dots$ . На следующем периоде дискретизации координата  $Y_i(k+1)$  определяется в зависимости от величины  $Y_i(k)$  и приращений других вершин  $R_j$ , связанных ребрами с  $R_i$  в момент времени  $k$ . Изменение координаты вершины  $R_j$  в момент времени  $k$ , которое задается разностью  $P_j(k) = Y_j(k) - Y_j(k-1), k > 1$ , согласно работы [1] называется импульсом. Процесс распространения импульсов по вершинам КК определяется уравнением

$$Y_i(k+1) = Y_i(k) + \sum_{j=1}^n a_{ij} P_j(k), i = 1, \dots, n,$$

где  $a_{ij}$  — весовой коэффициент ребра ориентированного графа, которое соединяет  $j$ -ю вершину с  $i$ -й. Тогда правило импульсного изменения значений координат вершин КК формулируется в виде разностного уравнения первого порядка в приращениях переменных:

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta Y_j(k), \quad (1)$$

где первая разность  $\Delta Y_i(k) = Y_i(k) - Y_i(k-1), i = 1, 2, \dots, n$ .

В векторной форме выражение (2) записывается следующим образом:

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k),$$

где  $A(n \times n)$  — транспонированная весовая матрица смежности КК.

В работах [2, 3] выполнена разработка методов по автоматизации управления импульсными процессами в КК сложных систем путем формирования внешнего вектора управления на основе варьирования ресурсами координат вершин КК в замкнутых системах управления с использованием известных методов теории автоматического управления для синтеза дискретных регуляторов. Для этого было составлено уравнение вынужденного движения импульсного процесса в КК системы для  $i$ -й координаты

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta Y_j(k) + b_i \Delta u_i(k), i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где  $\Delta u_i(k) = u_i(k) - u_i(k-1)$  — первая разность управляющего воздействия, которое реализуется путем изменения имеющихся в наличии ресурсов координат вершин. При этом коэффициент  $b_i$  может равняться единице или нулю, а именно,  $b_i = 1$ , когда на  $i$ -ю вершину КК запланировано формирование управляющего воздействия посредством изменения ресурсов координаты  $Y_i$ . В векторной форме записи уравнение (2) имеет вид

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{u}(k),$$

где матрица управления  $B(n \times p)$  составляется из единиц и нулей;  $\Delta \bar{u}(k)$  — вектор приращений управляющих воздействий.

В работе [4] рассмотрен новый принцип синтеза управления импульсным процессом в КК в замкнутой системе управления на основе варьирования весовыми коэффициентами  $a_{ij}$  КК при реализации управляющих воздействий  $\Delta u_i(k)$ . Это возможно реализовать тогда, когда можно изменять степень влияния  $\Delta a_{ij}(k)$  одной вершины КК на другую вершину на  $k$ -м периоде дискретизации. При этом лицо, принимающее решение, может реализовывать варьирование некоторых весов КК путем изменения коэффициентов передачи административных, политических, образовательных, информационных, научных, финансовых взаимодействий между координатами сложной системы, представленных вершинами КК. Таким образом, величина приращения управляющего воздействия при импульсном процессе в работе [4] формируется не за счет изменения ресурсов  $\Delta Y_j(k)$ , а на основе изменения степени влияния  $\Delta a_{ij}(k)$  координаты  $\Delta Y_j(k)$  на координату

$\Delta Y_i(k+1)$ . Для этого было сформировано уравнение вынужденного движения импульсного процесса для отдельной координаты  $Y_i$  КК:

$$Y_i(k+1) = Y_i(k) + (1 - q^{-1}) \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j(k) + \Delta a_{i\mu_l}(k) Y_\mu(k) + \xi_i(k), \quad i=1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $Y_\mu(k)$  —  $\mu$ -я координата КК, которая может воздействовать на  $Y_i(k+1)$  через варьируемый коэффициент  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$ , где  $l$  — порядковый номер приращения  $\Delta a_{i\mu_l}(k) = a_{i\mu_l}(k) - a_{i\mu_l}(k-1)$  в векторе  $\Delta \bar{a}(k)$ ;  $\xi_i(k)$  — неконтролируемое случайное возмущение с  $E\xi_i(k) = 0$ ;  $q^{-1}$  — оператор обратного сдвига на один период дискретизации.

Динамика вынужденного движения импульсного процесса КК (3) в работе [4] представлена в векторно-матричной форме:

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + L(k)\Delta \bar{a}(k) + \bar{\xi}(k).$$

Матрица  $L(k)$  составляется из измеряемых координат  $Y_\mu(k)$  КК, которые через дуги с варьируемыми весовыми коэффициентами  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$  воздействуют на координаты  $Y_i(k+1)$  ( $i=1, \dots, n$ ). При этом предполагается, что приращение весового коэффициента  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$  будет использоваться в качестве управляющего воздействия.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При условии, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta Y_i(k) = 0$  для стабилизации координат вершин КК  $Y_i$  на заданных уровнях  $G_i$  на каждом периоде дискретизации необходимо формировать управляющие воздействия, которые по синтезированному закону управления воздействуют непосредственно на вершины КК. Однако на практике при управлении импульсными процессами в КК возникает сложность, вызванная малыми ресурсами вершин КК или малыми интервалами весовых коэффициентов  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$ , которыми можно варьировать при реализации управляющих воздействий. Как правило, таких вершин или весовых коэффициентов, доступных для варьирования, очень мало, что приводит к большой разнице между размерностью  $n$  вектора выходных управляемых координат  $Y_i$  и размерностью вектора управляющих воздействий  $u_i$ . Поэтому возникла задача объединения двух подходов, которая заключается в формировании внешнего вектора управления путем одновременного варьирования ресурсов координат вершин КК и весовых коэффициентов в замкнутой системе управления. Это позволит увеличить общее количество управляющих воздействий в КК и улучшить качество управления.

При объединении двух подходов к управлению (2) и (3) общая математическая модель управляемого импульсного процесса КК в векторно-матричной форме в полных координатах вершин представлена в виде

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + (B \quad L(k)) \begin{pmatrix} \Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{a}(k) \end{pmatrix} + \bar{\xi}(k). \quad (4)$$

Сформулируем правила формирования векторов приращений  $\Delta\bar{u}(k)$  и  $\Delta\bar{a}(k)$ , а также матриц  $B$  и  $L(k)$  в модели (4).

1. На каждую вершину КК  $Y_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) можно воздействовать только одним управляющим воздействием путем варьирования ресурсов  $\Delta u_i$  данной вершины или посредством варьирования весового коэффициента  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$ . Вследствие этого гарантируется автономность системы управления.

2. Вектор приращений весовых коэффициентов  $\Delta\bar{a}(k)$  размерности  $m$  при  $m < n$  содержит только ненулевых элементы  $\Delta a_{i\mu_l}(k) \neq 0$ , где  $\mu$  — номер вершины КК, которая через дугу с коэффициентом  $a_{i\mu}$  воздействует на  $i$ -ю вершину  $Y_i$ , а  $l=1, 2, \dots, m$  — порядковый номер данного коэффициента в векторе  $\Delta\bar{a}(k)$ .

Если весовой коэффициент  $a_{i\mu}$  для дуги КК, входящей в вершину  $Y_i$ , нельзя варьировать, то приращение  $\Delta a_{i\mu_l}(k) = 0$  и в векторе  $\Delta\bar{a}(k)$  не учитывается.

3. Матрица  $B$  формируется проектировщиком системы управления импульсным процессом КК. Эта матрица предназначена для организации масштабирования и коммутирования синтезированного управляющего воздействия  $\Delta u_i$ ,  $i=1, \dots, p$ . Размерность матрицы  $B$  равна  $n \times p$ , где  $n$  — размерность КК, а  $p$  — размерность вектора  $\Delta\bar{u}(k)$ . Элементами  $B$  являются единицы или нули. Элемент  $b_{i\mu} = 1$ , если на  $i$ -ю вершину КК воздействует  $\mu$ -е управляющее воздействие. Таким образом, в каждой строке матрицы  $B$  только один элемент может быть равным единице, а остальные элементы будут равны нулю.

4. Матрица  $L(k)$  размерности  $n \times m$  в каждой  $i$ -й строке содержит только один элемент, равный измеряемой координате  $Y_{i\mu}(k)$ , которая размещена в  $l$ -й строке, где  $l$  — порядковый номер приращения  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$  в векторе  $\Delta\bar{a}(k)$ , а  $\mu$  — номер вершины КК, которая через приращение весового коэффициента  $\Delta a_{i\mu_l}(k)$  управляет вершиной  $Y_i$  КК.

5. Все элементы в  $i$ -й строке матрицы  $L(k)$  равны нулю, если в  $i$ -ю вершину  $Y_i$  не входит дуга КК с варьлируемым весовым коэффициентом, т.е.  $\Delta a_{i\mu} = 0$ .

Таким образом, общее количество управлений в КК может быть таким:  $p + m \leq n$ .

## СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОГО РЕГУЛЯТОРА

Синтез комбинированного вектора оптимального управления  $\begin{pmatrix} \Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{a}(k) \end{pmatrix}$  реализуется на основе минимизации следующего квадратичного критерия оптимальности

$$J(k+1) = E \left\{ (\bar{Y}(k+1) - \bar{G})^T (\bar{Y}(k+1) - \bar{G}) + \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix} \right\},$$

где  $\bar{G}$  — вектор задающих воздействий для стабилизации координат вершин КК на заданных уровнях;  $R_1 (p \times p)$ ,  $R_2 (m \times m)$  — весовые диагональные положительно определенные матрицы;  $E$  — оператор математического ожидания. С учетом уравнения (4) выполним минимизацию этого критерия

относительно комбинированного вектора управления  $\begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix}$ :

$$\frac{\partial J(k+1)}{\partial \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix}} = 2 \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix} \left\{ (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + (B \quad L(k)) \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix} + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \right\} +$$

$$+ 2 \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix} = 0,$$

откуда получим закон комбинированного оптимального управления:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{pmatrix} = - \left( \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix} (B \quad L(k)) + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \{ (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \}. \quad (5)$$

На основе уравнений (4), (5) можно составить уравнение динамики замкнутой системы управления импульсным процессом КК:

$$\bar{Y}(k+1) = \left\{ I - (B \quad L(k)) \left[ \begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix} \right\} \times$$

$$\times (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + (B \quad L(k)) \times$$

$$\times \left[ \begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix} \bar{G} +$$

$$+ \left\{ I - (B \quad L(k)) \left[ \begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix} \right\} \bar{\xi}(k). \quad (6)$$

Устойчивость замкнутой системы управления (6) определяется собственными значениями изменяющегося во времени нелинейного матричного выражения

$$I - (B \quad L(k)) \left[ \begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

**Утверждение.** Обратная матрица

$$\left[ \begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

в выражении (7) является диагональной и положительно определенной.

В основе доказательства этого утверждения лежит то обстоятельство, что матрица  $\begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix}$  является диагональной, так как на основе правил формирования матриц  $B$  и  $L(k)$  получим, что  $B^T L(k) = 0$ ,  $L^T(k) B = 0$ . Таким образом, приведенная обратная матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} B^T B + R_1 & 0 \\ 0 & L^T(k) L(k) + R_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

В работе [4] приведено доказательство, что произведение матриц  $L^T(k) L(k)$  представляет собой диагональную матрицу (размерности  $m \times m$ ) с элементами  $Y_{\mu_l}^2(k)$  в  $l$ -й строке и  $l$ -м столбце. Произведение матриц  $B^T B$  также представляет собой диагональную матрицу (размерности  $p \times p$ ) с элементами  $b_{ii} = 1$ . В результате при диагональных и положительно определенных весовых матрицах  $R_1, R_2$  получим, что в работе (14) обратные матрицы  $(B^T B + R_1)^{-1}$  и  $(L^T(k) L(k) + R_2)^{-1}$  будут диагональными с элементами соответственно  $\frac{1}{1 + R_{ii}}$  и  $\frac{1}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $l = 1, \dots, m$ .

**Следствие 1.** Произведение матриц

$$(B \ L(k)) \left[ \begin{pmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{pmatrix}$$

в выражении (7) будет в общем случае диагональной матрицей размерности  $n \times n$ :

$$\begin{pmatrix} B(B^T B + R_1)^{-1} B^T & 0 \\ 0 & L(k)(L^T(k) L(k) + R_2)^{-1} L^T(k) \end{pmatrix}$$

с положительными элементами на главной диагонали  $\frac{1}{1 + R_{ii}} > 0$  и  $\frac{1}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}} > 0$ .

**Следствие 2.** Собственные значения диагональной матрицы (7), т.е. матрицы

$$I - \begin{pmatrix} B(B^T B + R_1)^{-1} B^T & 0 \\ 0 & L(k)(L^T(k)L(k) + R_2)^{-1} L^T(k) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

будут по модулю меньше единицы (на основе следствия 1).

Таким образом, характеристический матричный полином (8) замкнутой системы управления (6) будет иметь корни внутри круга единичного радиуса, вследствие чего замкнутая система (8) будет устойчивой.

### ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫМ ПРОЦЕССОМ В КОГНИТИВНОЙ КАРТЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛОМ ИТ КОМПАНИИ

Когнитивная карта системы управления импульсным процессом показана на рис. 1.

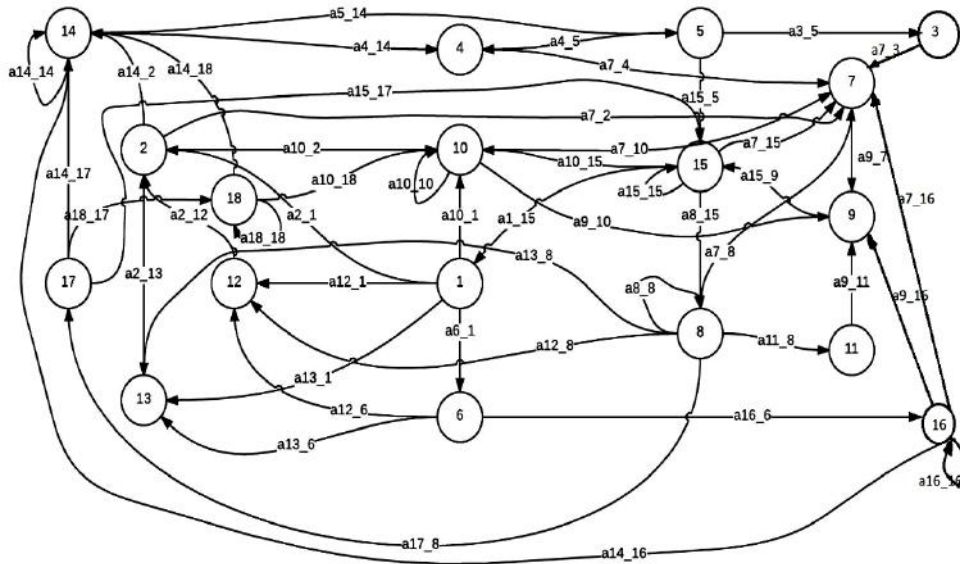


Рис. 1. Когнитивная карта системы управления персоналом ИТ компании

Выделим в КК вершины  $Y_i$ , которыми можно управлять непосредственно через изменения ресурсов  $\Delta \bar{u}(k)$  ( $p = 5$ ):

- $Y_1$  — управление карьерой и кадровым резервом;
- $Y_2$  — переаттестация персонала;
- $Y_5$  — уровень контроля;
- $Y_6$  — планирование процесса обучения персонала;
- $Y_{13}$  — переподготовка кадров со сменой основной специальности.

Выделим также вершины, которыми можно управлять посредством варьирования весовых коэффициентов  $\Delta \bar{a}(k)$  ( $m = 8$ ):

- $Y_3$  — управление премией за досрочное выполнение работы — с помощью коэффициента  $\Delta a_{3,5}$ ;

$Y_4$  — управление премией за освоение новых учений — с помощью коэффициента  $\Delta a_{4,5}$ ;

$Y_7$  — средняя заработная плата — с помощью коэффициента  $\Delta a_{7,8}$ ;

$Y_{10}$  — перспективы карьерного роста — с помощью коэффициента  $\Delta a_{10,1}$ ;

$Y_{11}$  — уровень финансирования физкультуры и спорта — с помощью коэффициента  $\Delta a_{11,8}$ ;

$Y_{12}$  — повышение квалификации персонала без смены основной специальности — с помощью коэффициента  $\Delta a_{12,6}$ ;

$Y_{14}$  — уровень профессиональных умений и навыков персонала — с помощью коэффициента  $\Delta a_{14,2}$ ;

$Y_{16}$  — обучение вспомогательного персонала — с помощью коэффициента  $\Delta a_{16,6}$ .

Неуправляемыми вершинами являются:

$Y_8$  — финансы компании на одного сотрудника;

$Y_9$  — удовлетворенность работой;

$Y_{15}$  — уровень инновационной продукции;

$Y_{17}$  — затраты на научно-технические работы;

$Y_{18}$  — эффективность работы аспирантуры.

Ребра между вершинами КК установлены на основе причинно-следственных связей, а весовые коэффициенты для каждого ребра определены экспертами согласно уровню влияния одной вершины КК на другую. При этом матрица смежности КК, приведенной на рис. 1, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$



Вектор управления путем варьирования ресурсами координат вершин будет иметь вид

$$\Delta \bar{u} = (\Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta u_5 \quad \Delta u_6 \quad \Delta u_{13})^T.$$

Тогда матрица управления  $B$  будет формироваться проектировщиком системы следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

В результате произведение матриц  $B^T B$  будет единичной матрицей  $5 \times 5$ . Второй вектор управления на основе приращений весовых коэффициентов  $\Delta \bar{a}$  будет иметь вид

$$\Delta \bar{a} = (\Delta a_{3,5} \quad \Delta a_{4,5} \quad \Delta a_{7,8} \quad \Delta a_{10,1} \quad \Delta a_{11,8} \quad \Delta a_{12,6} \quad \Delta a_{14,2} \quad \Delta a_{16,6})^T.$$

Тогда матрица управления  $L(k)$  размерности  $18 \times 8$  составляется следующим образом:

$$L(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_5(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_5(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_8(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1(k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6(k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате произведение матриц  $L^T(k)L(k)$  будет диагональной матрицей  $8 \times 8$ :

$$L^T(k)L(k) = \begin{pmatrix} Y_5^2(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_5^2(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_8^2(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1^2(k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8^2(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6^2(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2^2(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6^2(k) \end{pmatrix}.$$

Пусть начальные значения координат вершин КК, которые измеряются по 10-бальной шкале, находятся на среднем уровне 5. Предположим, что необходимо перевести вершины  $Y_7, Y_{10}, Y_{14}$  на более высокий уровень 7. Применив закон управления (5), получим динамику управления импульсным процессом, представленную на рис. 2.

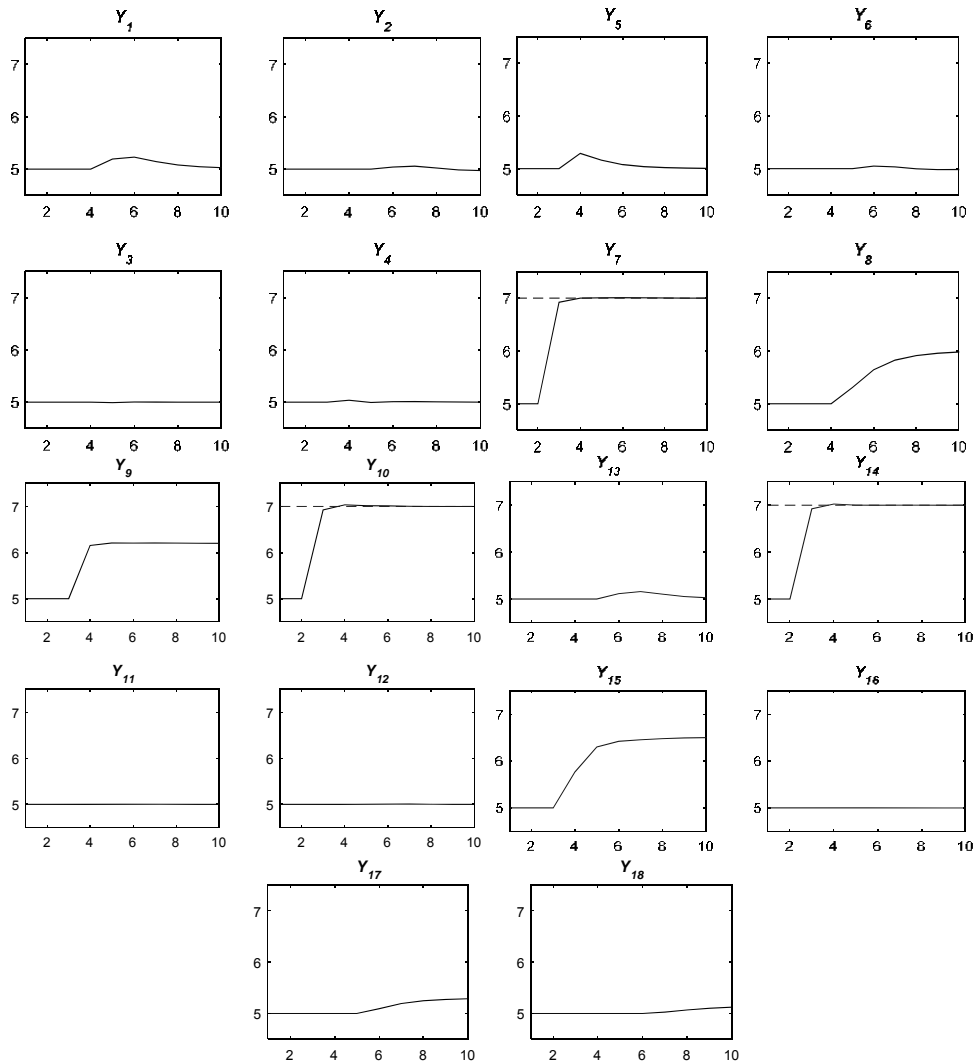


Рис. 2. Управляемый импульсный процесс при перестройке координат вершин КК  $Y_7, Y_{10}, Y_{14}$  на новые уровни

## **ВЫВОДЫ**

В данной работе решена проблема автоматизации управления импульсными процессами в КК сложных систем на основе синтеза линейно-квадратичного регулятора, формирующего управляющие воздействия в замкнутой системе управления путем варьирования координат вершин КК и весовых коэффициентов. В работе проведено исследование устойчивости разработанной замкнутой системы управления.

Экспериментальные исследования проведены путем цифрового моделирования синтезированной системы управления импульсным процессом в когнитивной карте управления персоналом ИТ компании.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. *Roberts F.* Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems / F. Roberts. — Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976. — 559 p.
2. *Романенко В.Д.* Метод адаптивного управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах на основе эталонных моделей / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский, А.А. Реутов // Проблемы информатики и управления. — 2015. — № 2. — С. 35–45.
3. *Романенко В.Д.* Стабилизация импульсных процессов в когнитивных картах сложных систем на основе модальных регуляторов состояния / В.Д. Романенко, Ю.Л. Милявский // Кибернетика и вычислительная техника. — 2015. — Вып. 179. — С. 43–55.
4. *Romanenko V.* Control method in cognitive maps based on weights increments / V. Romanenko, Y. Milyavsky // Кибернетика и вычисл. техника. — 2016. — Вып. 184. — Р. 44–55.

*Поступила 20.05.2019*

## АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОСТАДИЙНЫХ FLOW-SHOP-PROBLEM

Ю.А. ЗАК

**Аннотация.** Построение многостадийных расписаний выполнения заданий на расположенных в последовательную цепочку системах машин имеет много практических приложений в календарном планировании дискретного производства. Получены оценки нижней границы критерия эффективности для оптимальной последовательности выполнения заданий и два алгоритма приближенного решения задач, обеспечивающие выполнение всех работ на всех стадиях обработки в кратчайшие сроки. Алгоритмы решения проиллюстрированы числовым примером. Приведены оценки сложности предложенных алгоритмов. Алгоритмы решения задачи могут быть использованы в календарном планировании мелко- и среднесерийного дискретного производства.

**Ключевые слова:** многостадийные расписания, Flow-Shop-Problem, оптимальные последовательности, нижняя граница времени выполнения заданий, приближенное решение, эвристический алгоритм.

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Технологический процесс предусматривает выполнение заданий и изготовление изделий на  $S$  последовательных стадиях обработки. На этих стадиях все изделия обрабатываются на каждой стоящей в последовательной цепочке системе машин и как на первой стадии обработки, так и на каждой  $S$ -й,  $s = 1, \dots, S$  в одной и той же последовательности. Каждая стадия обработки включает  $m_s$  машин,  $s = 1, \dots, S$ . Количество машин на каждой стадии обработки может быть различным. Более сложной постановкой задачи может быть ситуация, когда допускаются отличные друг от друга последовательности обработки изделий на каждой стадии изготовления.

Необходимо определить оптимальную последовательность обработки изделий, а также время начала и время завершения обработки группы, состоящей из  $n$  ( $i = 1, \dots, n$ ) изделий, одинаковую на всех машинах  $S$  стадий обработки, обеспечивающих выполнение всего комплекса работ в кратчайшие сроки. Задача построения расписания на одной стадии обработки широко известна в литературе [1–4, 6, 7] и относится к классу Flow-Shop-Problem. Все перемещения обрабатываемых изделий, связанные с окончанием ее на одной машине и началом выполнения на другой, следуют только в одном направлении.

Обобщенная задача Джонсона (Flow-Shop-Problem) формулируется следующим образом [2, 3, 6, 7]:

— на некоторой последовательности, состоящей из  $m$ ,  $k = 1, \dots, m$  рабочих станций (машин), необходимо выполнить  $n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , заданий (обработку  $n$  изделий);

— каждое из заданий состоит из некоторой упорядоченной последовательности выполнения  $m$  работ (операций) на различных рабочих станциях (машинах). Никакая машина не может выполнять более одной операции одновременно;

— длительности выполнения каждой из этих операций  $t_{ij}$  известны и не зависят от последовательности выполнения остальных операций на этой или других машинах;

— никакая из этих операций не допускает прерываний в процессе ее выполнения;

— каждое из заданий выполняется в строго заданной и одинаковой для всех заданий последовательности  $M = (k = 1, \dots, m)$ ,  $K = (k = 1, \dots, m)$ ;

— каждая из операций назначается только на одну определенную машину;

— последовательность прохождения рабочих станций является заданной и одинаковой для всех заданий.

Необходимо определить последовательность выполнения заданий, обеспечивающую минимальное время выполнения всех работ.

Одностадийные расписания Flow-Shop-Problem относятся к классу NP-полных задач экспоненциальной сложности. Рассматриваемые в литературе многочисленные эвристические методы и правила предпочтения [1–3, 6–10] позволяют зачастую, как показывают вычислительные эксперименты, получить хорошие приближения к оптимальному решению задачи. Правила последовательного улучшения последовательности выполнения заданий путем обмена местами двух индексов [2, 3] имеют либо локальный, либо статистический характер и поэтому не могут рассматриваться как методы локального спуска в зону глобального минимума. Создание гибридных методов, которые на основе хороших эвристик позволяют осуществить попадание в зону глобального минимума, а затем методами локальных перестановок местами заданий осуществить спуск в точку локального минимума этой области. Никакая из предложенных в литературе эвристик не гарантирует попадания в область глобального минимума. Сравнительно небольшой объем вычислений эвристических алгоритмов и методов локальных вариаций обеспечивают их широкое применение в практических приложениях и в условиях большой размерности. Эффективные точные и приближенные методы решения Flow-Shop-Problem в условиях ограничений на сроки и частичные порядки выполнения заданий рассмотрены в работах [6, 7, 10] и в работах автора [2, 3]. Несмотря на большое количество приложений в календарном планировании производства, задачам многостадийного построения расписаний в этих условиях не уделялось достаточного внимания в литературе. Сформулированная задача относится к классу NP-полных проблем. В данной работе рассматриваются приближенные методы решения сформулированной проблемы, которые могут найти практическое применение в календарном планировании мелко- и среднесерийного дискретного производства

## ОЦЕНКА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ДЛИНЫ РАСПИСАНИЯ FLOW-SHOP-PROBLEM

Рассмотрим вначале оценку минимальной длины расписания Flow-Shop-Problem. Ясно, что общая продолжительность расписания не может быть меньше длительности выполнения каждого из заданий:

$$F^0 = F \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^m t_{ik}.$$

Остальные задания при этом должны быть выполнены либо перед, либо после выполнения этого задания. Следовательно, дополнительные затраты времени равны

$$q_i = \sum_{l=1}^n \min\{(t_{l,i}, t_{l,m}) \mid i \neq l\}, \quad l=1, \dots, n.$$

Нижняя граница вычисляется по формуле

$$F^1 = \max_{1 \leq i \leq n} [q_i + \sum_{k=1}^m t_{ik}].$$

Нижняя граница длины оптимального расписания может быть вычислена из следующих соображений.

Для начала работы каждой  $k$ -й машины необходимо, чтобы все операции  $l=1, \dots, k-1$ , предшествующие этой  $k$ -й операции, были уже выполнены. Для этого в  $i$ -м задании требуется времени не менее чем

$\beta_1(i, k) = \sum_{l=1}^{k-1} t_{il}$  даже в том случае, если в этом задании ни одна из машин не

теряет времени на простой после выполнения предыдущей операции. Суммарное время выполнения всех операций на  $k$ -й машине равно  $\sum_{i=1}^n t_{ik}$ . После

выполнения операций всех заданий на  $k$ -й машине требуется дополнительное время работы машин,  $l=k+1, \dots, m$ :  $\beta_2(i, k) = \sum_{l=k+1}^m t_{il}$ . Это время необходимо для завершения выполнения  $i$ -го задания. Следовательно, оценка

времени выполнения расписания из условия занятости рабочих систем определяется следующим образом:

$$F^2 = \max_{1 \leq k \leq m} \left\{ \sum_l t_{il} + \min_{1 \leq i \leq n} \beta_1(i, k) + \min_{1 \leq i \leq n} \beta_2(i, k) \right\}.$$

Таким образом значение нижней границы критерия оптимальности определяется выражением

$$\varphi(F) = \max(F^1, F^2). \quad (1)$$

Выражение нижней границы длины расписания в виде (1) известно и широко применяется в литературе для получения точных и приближенных оценок решений этой задачи [2, 3].

Flow-Shop-Problem для двух машин решена Джонсоном еще в 1950 г. [5]. Точное решение задачи получено с помощью алгоритма, сложность которого равна  $O(n \log n)$ . Алгоритм упорядочивает по возрастанию все задания, для которых  $t_{i1} \leq t_{i2}$ , по возрастанию значений  $t_{i1}$ , а задания, для которых  $t_{i1} > t_{i2}$ , — и по убыванию времени выполнения задания. В первую очередь выполняются задания из первой подпоследовательности, а затем из второй. Эти подходы в практических приложениях используются в алгоритмах получения приближенных решений задачи.

### ВРЕМЯ НАЧАЛА И ВРЕМЯ ЗАВЕРШЕНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ НА ВСЕХ МАШИНАХ КАЖДОЙ СТАДИИ ОБРАБОТКИ

Пусть  $\tilde{I} = \{i = 1, \dots, n\}$  — множество всех изделий, подлежащих обработке;  $m_s, s = 1, \dots, S$  — соответственно количество машин на каждой стадии обработки. Обозначим:

$x_{ik}(s), \theta_{ik}(s)$  — соответственно время начала и время завершения обработки  $i$ -го изделия на  $s$ -й стадии обработки на  $k$ -й машине,  $k = 1, \dots, m_s$ ;

$t_{ik}(s)$  — время продолжительности обработки  $i$ -го изделия на  $k$ -й машине на  $s$ -й стадии обработки;

$T_i(s)$  — время завершения изготовления  $i$ -го изделия на  $s$ -й стадии обработки;

$\bar{T}_i$  — время завершения изготовления  $i$ -го изделия на последней  $S$ -й стадии обработки;

$\Phi$  — время завершения выполнения всех заданий на всех стадиях обработки;

$\tilde{I}^1, \tilde{I}^2$  — подмножество изделий, для которых в процессе выполнения алгоритма определено и не определено место в последовательности многостадийной обработки  $\tilde{I}^1 \cup \tilde{I}^2 = \tilde{I}, \tilde{I}^1 \cap \tilde{I}^2 = \emptyset$ .

Пусть на некотором шаге вычислительного процесса определены подмножества изделий  $\tilde{I}^1, \tilde{I}^2$ , а также последовательность многостадийной обработки подмножества изделий  $\tilde{I}^1 — \tilde{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_p\}$ . Время начала и время завершения обработки всех изделий на каждой из машин всех стадий обработки определяются по формулам:

$$x_{u_1,1}(1) = 1, \theta_{u_1,1}(1) = t_{u_1,1}(1); \quad (2)$$

$$x_{u_k,1}(1) = \theta_{u_{k-1},1}(1) + 1, \theta_{u_k,1}(1) = x_{u_k,1}(1) + t_{u_k,1}(1) - 1, k = 2, \dots, m. \quad (3)$$

$$x_{u_1,1}(s) = \theta_{u_1,m}(s-1) + 1, \theta_{u_1,1}(s) = x_{u_1,1}(s) + t_{u_1,1}(s) - 1, s = 1, \dots, S; \quad (4)$$

$$x_{u_j,1}(s) = \max[\theta_{u_j,1}(s-1), \theta_{u_{j-1},1}(s)] + 1,$$

$$\theta_{u_j,1}(s) = x_{u_j,1}(s) + t_{u_j,1}(s) - 1, \quad s = 2, \dots, S; \quad (5)$$

$$x_{u_j,k}(s) = \max[\theta_{u_{j-1},k}(s); \theta_{u_j,k-1}(s)] + 1,$$

$$\theta_{u_j,k}(s) = x_{u_j,k}(s) + t_{u_j,k}(s) - 1, \quad j = 1, \dots, P, \quad s = 2, \dots, S. \quad (6)$$

$$\bar{T}_i = \bar{T}_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, S; \quad \Phi = \bar{T}_n(S).$$

### ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ

**Алгоритм 1.** Приближенное решение может быть получено в соответствии с алгоритмом, аналогичным алгоритму Джонсона [5] построения расписаний для двух машин.

Определим  $Q = \lfloor \frac{S}{2} \rfloor$ ,  $G = Q + 1$ , а также  $M = \sum_{s=1}^S m_s$ ,  $M_1 = \lfloor 0,5 \cdot \sum_{s=1}^S m_s \rfloor$  и  $M_2 = M_1 + 1$ . Здесь  $\lfloor \cdot \rfloor$  — целая часть частного от деления двух чисел,  $M_2, M_1$  — суммарные количества машин на различных (первой и второй) стадиях обработки.

Вычислим:

$$R_1^1(i) = \sum_{s=1}^Q \sum_{k=1}^{m_s} t_{ik}, \quad R_2^1(i) = \sum_{s=1}^G \sum_{k=1}^{m_s} t_{ik}, \quad R_1^2(i) = \sum_{s=Q+1}^S \sum_{k=1}^{m_s} t_{ik};$$

$$R_2^2(i) = \sum_{s=G+1}^S \sum_{k=1}^{m_s} t_{ik}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (7)$$

$$P_1^1(i) = \sum_{k=1}^{M_1} t_{ik}, \quad P_2^1(i) = \sum_{k=M_2}^M t_{ik}, \quad P_1^2(i) = \sum_{k=1}^{M_2} t_{ik}, \quad P_2^2(i) = \sum_{k=M_2+1}^{M_2} t_{ik}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим четыре подмножества выполняемых заданий:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1^1 &= \{i \in \tilde{I} \mid R_1^1(i) \leq R_2^1(i)\}, \quad \tilde{J}_2^1 = \{i \in \tilde{I} \mid R_1^1(i) > R_2^1(i)\}, \\ \tilde{J}_1^2 &= \{i \in \tilde{I} \mid R_1^2(i) \leq R_2^2(i)\}, \quad \tilde{J}_2^2 = \{i \in \tilde{I} \mid R_1^2(i) > R_2^2(i)\}; \\ \tilde{J}_1^3 &= \{i \in \tilde{I} \mid P_1^1(i) \leq P_2^1(i)\}, \quad \tilde{J}_2^3 = \{i \in \tilde{I} \mid P_1^1(i) > P_2^1(i)\}, \\ \tilde{J}_1^4 &= \{i \in \tilde{I} \mid P_1^2(i) \leq P_2^2(i)\}, \quad \tilde{J}_2^4 = \{i \in \tilde{I} \mid P_1^2(i) > P_2^2(i)\}. \\ \tilde{J}_1^3 &= \{i \in \tilde{I} \mid P_1^1(i) \leq P_2^1(i)\}, \quad \tilde{J}_2^3 = \{i \in \tilde{I} \mid P_1^1(i) > P_2^1(i)\}, \\ \tilde{J}_2^4 &= \{i \in \tilde{I} \mid P_1^2(i) > P_2^2(i)\}. \end{aligned}$$

Для простоты изложения обозначим  $w_j, v_j, p_j, r_j, c_j, u_j, \rho_j, \mu_j$  — индексы заданий, входящих в подмножества  $\tilde{J}_1^1, \tilde{J}_2^1, \tilde{J}_1^2, \tilde{J}_2^2, \tilde{J}_1^3, \tilde{J}_2^3, \tilde{J}_1^4, \tilde{J}_2^4$ .



Упорядочим подмножества заданий  $\tilde{J}_1^1$  и  $\tilde{J}_1^2$ , а также  $\tilde{J}_1^3, \tilde{J}_1^4 \dots$  по возрастанию соответственно значений  $R_1^1(i)$  и  $R_1^2(i)$  и  $P_1^2(i)$  и  $P_2^2(i)$  в последовательности

$$\tilde{W}_1^1 = \{w_1, w_2, \dots, w_l, \dots, w_{L_1} \mid w_l \in \tilde{J}_1^1; w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_l \leq \dots \leq w_{L_1}\};$$

$$\tilde{W}_1^2 = \{v_1, v_2, \dots, v_l, \dots, v_{L_2} \mid v_l \in \tilde{J}_1^2; v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_l \leq \dots \leq v_{L_2}\};$$

$$\tilde{W}_1^3 = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l, \dots, \rho_{L_3} \mid \rho_l \in \tilde{J}_1^3; \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_l \leq \dots \leq \rho_{L_3}\};$$

$$\tilde{W}_1^4 = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l, \dots, \mu_{L_4} \mid \mu_j \in \tilde{J}_1^4; \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_l \leq \dots \leq \mu_{L_4}\},$$

а подмножества заданий  $\tilde{J}_2^1$  и  $\tilde{J}_2^2$ , а также  $\tilde{J}_1^3$  и  $\tilde{J}_1^4$  по убыванию соответственно значений  $R_1^2(i)$  и  $R_2^2(i)$ , а также  $P_2^1(i)$  и  $P_2^2(i)$  в последовательности

$$\tilde{W}_2^1 = \{p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_{L_5} \mid p_j \in \tilde{J}_1^2; p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_j \geq \dots \geq p_{L_5}\};$$

$$\tilde{W}_2^2 = \{r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_{L_6} \mid r_j \in \tilde{J}_2^2; r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_j \geq \dots \geq r_{L_6}\};$$

$$\tilde{W}_2^3 = \{c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_{L_7} \mid c_j \in \tilde{J}_1^3; c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_j \geq \dots \geq c_{L_7}\};$$

$$\tilde{W}_2^4 = \{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_{L_8} \mid u_j \in \tilde{J}_1^4; u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_j \geq \dots \geq u_{L_8}\}.$$

Здесь  $L_1, L_2, \dots, L_8$  — количества заданий в соответствующих подмножествах.

Построим 8 расписаний выполнения заданий. В каждом из этих расписаний вначале расположены задания подмножеств  $\tilde{J}_1^d$ ,  $d = 1, 2, 3, 4$  в порядке, расположенном в последовательности  $\tilde{W}_1^d$ , а затем подмножества заданий  $\tilde{J}_1^d$  в порядке, расположенном в последовательности  $\tilde{W}_2^d$ ,  $d = 1, 2, 3, 4$ . Для каждого из этих расписаний выполним расчет времени начала и времени завершения выполнения всех заданий на каждой машине и на всех стадиях разработки по формулам (2)–(6). Определим для каждого из этих расписаний время завершения выполнения всех работ и обозначим их:  $\bar{T}_g = \theta_{u_{L_g}, m_s}(S)$ ,  $g = 1, \dots, 8$ . В качестве решения задачи выбираем расписание с наименьшим значением критерия оптимальности.

Для получения грубых приближенных решений может использоваться только одна из последовательностей  $\tilde{U}^r = \{\tilde{W}_1^r, \tilde{W}_2^r\}$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ . Предложенный алгоритм является алгоритмом полиномиальной сложности с объемом вычислений того же порядка, что и алгоритм Джонсона  $O(n \log n)$ .

**Алгоритм 2.** В начале вычислительного процесса, когда  $l = 0$ , положим  $\tilde{I}^1(l = 0) = \emptyset$ ,  $\tilde{I}^2(l = 0) = \tilde{I}$ .

Вычислим  $H^0(i) = \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^{m_s} t_{ik}(s)$ . Определим последовательность выполнения заданий  $\tilde{U}^0 = \{u \in \tilde{I} \mid H^0(u_1) \leq H^0(u_2) \leq \dots \leq H^0(u_n)\}$ .

На первое место в расписании выполнения заданий поставим задание с индексом  $u_1$  —  $\tilde{Z}(l=1) = \{u_1\}$ . Здесь  $\tilde{Z}(l)$  — строящаяся последовательность выполнения заданий.

Вычислим время начала и время завершения выполнения этого задания на всех машинах и на всех стадиях обработки деталей по формулам (2)–(4). Определяем  $\tilde{I}^1(l=1) = \{u_1\}$ ,  $\tilde{I}^2(l=1) = \{\tilde{I} / u_1\}$ .

На следующих шагах алгоритма  $l=1, 2, \dots, (n-1)$  выполняются следующие вычисления.

1. Для каждого задания из подмножества  $i \in \tilde{I}^2(l)$  рассчитываем по формулам (5), (6) время начала и время завершения выполнения каждого из заданий, поставив их на первое место после стоящего последним в подпоследовательности  $\tilde{Z}(l-1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{l-1}\}$ , т.е. зная значения  $x_{v_{l-1},k}(s)$ ,  $\theta_{v_{l-1},k}(s)$ ,  $k=1, 2, \dots, m_s$ ,  $s=1, 2, \dots, S$  рассчитываем

$$x_{i,1}(1) = \theta_{v_{l-1},1}(1) + 1; \quad \theta_{i,1}(1) = x_{i,1}(1) + t_{i,1}(1) - 1;$$

$$x_{i,1}(1) = \max[\theta_{i,k-1}(1), x_{v_{l-1},k}(1)] + 1; \quad x_{i,1}(s) = \max[\theta_{v_{l-1},1}(s), \theta_{i,m_{s-1}}(s-1)] + 1;$$

$$\theta_{i,k}(s) = x_{i,k}(s) + t_{i,k}(s) - 1; \quad k=1, 2, \dots, m_s; \quad s=1, 2, \dots, S.$$

2. Определяем

$$F_i(l) = \theta_{i,m_s}(S), \quad i \in \tilde{I}^2(l); \quad F_\sigma(l) = \min_{i \in \tilde{I}^2(l)} F_i(l).$$

Устанавливаем задание с индексом  $i = \sigma$  на последнее место в строящейся последовательности  $\tilde{Z}(l) = \{v_1, v_1, \dots, v_{l-1}, v_l = \sigma\}$ . Определяем

$$\tilde{I}^1(l) = \{\tilde{I}^1(l-1) \cup \sigma\}, \quad \tilde{I}^2(l) = \{\tilde{I}^2(l-1) / \sigma\}.$$

Если  $\tilde{I}^1(l) = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\tilde{I}^2(l) = \emptyset$ , то получено решение задачи и значение  $F_\sigma(l)$  — время выполнения расписания, т.е. значение критерия оптимальности. В противном случае переходим к выполнению оценки нижней границы длины расписания Flow-Shop-Problem.

Предложенный алгоритм также является алгоритмом полиномиальной сложности с объемом вычислений  $O([n \cdot \log n]^2)$ . Алгоритм 2 требует существенно большего объема вычислений, чем алгоритм 1, но, как правило, обеспечивает более точное решение задачи.

## НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ДЛИНЫ МНОГОСТАДИЙНОГО РАСПИСАНИЯ

Время выполнения многостадийного расписания не может быть меньше максимального значения нижней границы времени выполнения всех работ

на какой-либо одной стадии обработки изделий. Это значение должно быть увеличено как минимум на сумму времени выполнения на всех машинах одного задания на стадиях, предшествующих этой  $s$ -й  $l=1,2,\dots,s-1$ , т.е. на

величину  $D(s) = \sum_{l=1}^{s-1} \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{m_l} t_{ik}(l)$ , а также на сумму времени выполнения за-

даний на последней машине каждого из заданий на стадиях обработки

$q = (s+1), (s+2), \dots, S$ , т.е. величины  $C(s) = \sum_{q=(s+1)}^S \min_{1 \leq i \leq n} t_{i,m_q}(q)$ .

Следовательно, нижняя граница длины многостадийного расписания равна  $\varphi(\Phi_1) = \max_{1 \leq s \leq S} \{\Phi_1(s) + D(s) + C(s)\}$ .

### ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Значения времени выполнения заданий на всех машинах на трех стадиях обработки приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Значения времени выполнения заданий на всех машинах трехстадийной обработки

Номер задания	Время выполнения заданий													
	Первая стадия обработки					Вторая стадия обработки				Третья стадия обработки				
	1	2	3	4	$\sum_{i=1}^n t_{ik}$	1	2	3	$\sum_{i=1}^n t_{ik}$	1	2	3	4	$\sum_{i=1}^n t_{ik}$
1	2	10	5	6	23	10	8	9	27	6	8	9	5	28
2	4	5	6	3	18	4	6	7	17	10	3	2	9	24
3	7	8	1	4	20	8	5	12	25	7	7	8	5	27
4	5	6	3	7	21	3	2	6	11	4	9	8	7	28
5	2	6	8	5	21	9	10	3	22	5	10	9	3	27
$\sum_{i=1}^n t_{ik}$	20	35	23	28		34	31	37		32	37	36	29	

Нижние границы времени завершения выполнения всех заданий на каждой стадии обработки, рассчитанные по формулам (1)–(3), соответственно равны (42, 42, 52). Нижняя граница трехстадийного расписания составляет 81.

Найдем решение задачи в соответствии с алгоритмом 1, используя только одну последовательность  $\tilde{U}^1 = \{\tilde{W}_1^1, \tilde{W}_2^1\}$ ,  $M = 3$ ,  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 2$ . Вычисляем:  $R_1^1(i) = (23, 18, 20, 21, 21)$   $R_2^1(i) = (55, 41, 52, 39, 49)$ . Так как  $R_1^1(i) < R_2^1(i)$ , то  $\tilde{U} = \{2, 3, 4, 5, 1\}$ . Время завершения выполнения заданий на всех машинах трехстадийной обработки приведены в табл. 2. Время завершения выполнения расписания для этой последовательности равно  $\Phi = \bar{T}_1 = 108$ .

**Таблица 2.** Последовательность выполнения заданий, полученная с использованием алгоритма 1

Номер задания	Время выполнения заданий на различных машинах											
	Первая стадия обработки				Вторая стадия обработки				Третья стадия обработки			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	4	9	15	18	22	28	35	41	49	58	64	
3	11	19	20	24	32	37	49	56	63	71	76	
4	16	25	28	31	35	39	55	60	69	77	84	
5	18	31	39	44	53	63	66	71	81	90	93	
1	20	41	46	52	63	71	80	86	94	103	<b>108</b>	

Найдем решение задачи алгоритмом 2. На 0-м шаге алгоритма значения времени завершения выполнения заданий равны  $H^0(i) = (78, 59, 72, 60, 70)$ . Выбираем задание с минимальным временем завершения, т.е. задание 2, и устанавливаем его на первое место в строящейся последовательности  $H^l(i)$ ,  $i \in \tilde{I}^2(l)$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , табл. 3, в которой жирными цифрами выделены минимальные значения. Выбранные минимальные по времени завершения выполнения задания на каждом шаге алгоритма включены в строящуюся последовательность выполнения заданий. Значения времени завершения выполнения заданий на всех машинах трехстадийной обработки приведены в табл. 4.

**Таблица 3.** Значения времени завершения выполнения заданий

Номер шагов	Расчетные значения $H^l(i)$			
	1	3	4	5
1	93	84	<b>73</b>	77
2	91	<b>80</b>		83
3	100			<b>92</b>
4	<b>107</b>			

Поскольку значение критерия оптимальности, полученное с использованием алгоритма 2 меньше, чем соответствующее значение, полученное по алгоритму 1, то это расписание со значением критерия эффективности  $\Phi = 107$  принимается как решение задачи.

**Таблица 4.** Последовательность выполнения заданий, полученная с использованием алгоритма 2

Номер заданий	Время завершения выполнения заданий на различных машинах											
	Первая стадия обработки				Вторая стадия обработки				Третья стадия обработки			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	4	9	15	18	22	28	35	45	48	50	59	
4	9	15	18	25	28	30	41	49	58	66	73	
3	16	24	25	29	37	42	54	61	67	75	80	
5	18	30	38	43	52	62	65	70	80	89	92	
1	20	40	45	51	62	70	79	86	93	102	<b>107</b>	

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одностадийные и многостадийные задачи Flow-Shop-Problem широко применяются для решения задач оперативно-календарного планирования в машиностроении, приборостроении, электронной, деревообрабатывающей, легкой и других отраслях промышленности. Поскольку точное решение таких задач может быть получено только с помощью алгоритмов экспоненциальной сложности и требует больших объемов вычислений, построение эффективных приближенных методов решения этих задач может найти широкое практическое применение в системах управления производством.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Конвей Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. — М.: Физматгиз, Наука. 1975. — 359 с.
2. Зак Ю.А. Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок / Ю.А. Зак. — М.: URSS, 2012. — 394 с.
3. Зак Ю.А. Решение обобщенной задачи Джонсона с ограничениями на сроки выполнения заданий и времена работы машин. Ч.1. Точные методы решения / Ю.А. Зак // Проблемы управления. — 2010 — № 3. — С. 17–25. Ч. 2. Приближенные методы // Проблемы управления. — № 4. — 2010. — С. 12–19.
4. Згуровский М.З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами / М.З. Згуровский, А.А. Павлов. — К.: Наук. думка, 2010. — 573 с.
5. Johnson S.M. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included / S.M. Johnson // Naval research logistics quarterly. — 1954. — **1(1)**. P. 61–68.
6. Brucker P. Scheduling Algorithms / P. Brucker. — Berlin, Heidelberg und New York: Springer-Verlag, 1998.
7. Domschke W. Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte / W. Domschke, A. Scholl, S. Voß. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 456 p.
8. Ho J.C. A new heuristic for the  $n$ -job,  $M$ -machine problem / J.C. Ho, Y.-L. Chang // European Journal of Operational Research. — 1991. — **52**. — P. 194–202.
9. Ogbu F.A. The application of the simulated annealing algorithm to the solution of the  $n/m/C_{\max}$  flow-shop problem / F.A. Ogbu, D.K. Smith // Computer & Operations Research. — 1990. — **17**. — P. 243–253.
10. Hundal T.S. An extension of Palmer's heuristic for the flow-shop scheduling problem / T.S. Hundal, J. Rajgopal // International Journal of Production Research. — 1988. — **26**. — P. 1119–1124.

Поступила 11.04.2019

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ПІД ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ

**В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК, О.В. ГАВРИЛЕНКО, М.К. СУКАЧ**

**Анотація.** На основі математичного моделювання досліджено напружений стан ортотропного електропружного простору зі сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання узагальненого на випадок ортотропного п'єзоелектричного матеріалу методу еквівалентного включення Ешелбі та інтегрального подання функції Гріна для ортотропного електропружного простору. Тестування алгоритму розв'язання задачі на частинному випадку (для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сфероїдальною порожниною) підтверджує його ефективність. Проведено числові дослідження напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі з порожниною під внутрішнім тиском, виявлено характерні закономірності розподілу напружень.

**Ключові слова:** математичне моделювання, ортотропний п'єзоелектричний матеріал, зв'язана система рівнянь електропружності, сфероїдальна порожнина, внутрішній тиск, напружений стан.

### ВСТУП

Дослідження напружено-деформованого стану двовимірних та тривимірних анізотропних пружних тіл з порожнинами і включеннями проводилось у працях [1–6]. Останнім часом значно зріс інтерес до досліджень зв'язаних полів у електропружних тілах, про що свідчить суттєве збільшення публікацій у цій галузі. Знаходженню електричного і напруженого станів п'єзоелектричних тіл з концентраторами напружень присвячено праці [7–14]. Для форми порожнини чи включення у вигляді сфероїда (еліпсоїда обертання), розміщеного в електропружному трансверсально-ізотропному просторі, точний розв'язок задачі отримано тільки для випадку орієнтації осі обертання концентратора напружень уздовж осі симетрії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу [8, 12–14]. Для ортотропного електропружного матеріалу, що містить тріщину кругової чи еліптичної форми, яка розташована в одній з площин симетрії матеріалу, за деяких типів навантажень аналітично-числовий розв'язок задачі отримано у працях [15, 16] відповідно, а для шаруватого ортотропного електропружного матеріалу за згину — у [17].

У роботі вперше розглянуто задачу про ортотропний п'єзоелектричний простір, що містить сфероїдальну порожнину під сталим внутрішнім тиском  $P_0$ . Також припускається, що нормальна складова вектора електричної ін-

дукції  $D_n$  на поверхні порожнини дорівнює нулю. Це відповідає випадку відсутності електричних впливів на поверхні порожнини, на якій немає електродного покриття. Вважається, що зовнішні силові та електричні навантаження у п'єзоелектричному матеріалі відсутні.

Для розв'язання задачі на основі математичного моделювання використано підхід, що базується на методі еквівалентного включення Ешелбі, узагальненому на випадок ортотропного електропружного матеріалу. Під час виконання розрахунків поверхневі інтеграли, отримані під час розв'язання задачі, обчислюються за квадратурними формулами Гауса. Алгоритм розв'язання задачі апробовано на частинному випадку — для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу зі сфероїдальною порожниною, вісь обертання якої збігається з віссю симетрії матеріалу (задача має точний розв'язок). Порівняння результатів дослідження у частинних випадках з даними інших авторів підтвердило ефективність використаного підходу.

Досліджено розподіл напружень в ортотропному електропружному просторі зі сфероїдальною порожниною (під внутрішнім тиском) за різних геометричних параметрів порожнини.

## ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай ортотропний електропружний простір містить сфероїдальну порожнину (з півосями  $a_1 = a_2, a_3$ ), що перебуває під внутрішнім тиском  $P_0$ . Вважаємо, що півосі порожнини орієнтовані вздовж осей симетрії ортотропного електропружного матеріалу. Процес деформування електропружного матеріалу для зв'язаних силових і електричних полів описується такою системою рівнянь.

Повна система статичних рівнянь електропружності набуває такого вигляду:

*рівняння рівноваги за відсутності об'ємних сил*

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

*рівняння вимушеної електростатики*

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

*співвідношення Коші*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

*рівняння стану*

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$ ,  $\Psi$  — компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (індукції), напруженості електричного поля і електричний потенціал відповідно. Система рівнянь (1)–(3) є повною системою зв'язаних рівнянь електропружності. Уведено такі позначення тензорів:  $C_{ijmn}$ ,  $e_{imn}$ ,  $k_{ij}$  — пружні модулі, п'єзомодулі, діелектричні проникності. Перший з цих тензорів вимірюється за сталого електричного поля, а два

останніх — за сталої деформації. Для п'єзоелектричних тіл, які є ортотропними за пружними та електричними властивостями, пружні властивості описуються дев'ятьма незалежними сталими  $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ , п'єзомодулі — п'ятьма величинами  $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{31}, e_{33}$ , діелектричні проникності — трьома незалежними сталими  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$ . Компоненти записаних тензорів пов'язані з відповідними незалежними сталими таким чином:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \quad (4) \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; e_{223} = e_{232} = e_{24}; e_{311} = e_{31}; e_{322} = e_{32}; e_{333} = e_{33}; k_{11}; k_{22}; k_{33}. \end{aligned}$$

Не наведені компоненти трьох тензорів у формулах (4) набувають нульових значень.

Для опису електропружного стану використаємо більш уніфіковані позначення [11]. У результаті отримаємо:

*пружні переміщення і електричний потенціал*

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi, & M = 4; \end{cases} \quad (5)$$

*пружні деформації та напруженості електричного поля*

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi_{,n}, & M = 4; \end{cases} \quad (6)$$

*напруження та електричні переміщення*

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3, \\ D_i, & J = 4; \end{cases} \quad (7)$$

*електропружні модулі*

$$E_{iJMn}^{(\alpha)} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3, \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4, \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3, \\ -k_{in}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (8)$$

За допомогою формул (5)–(8) рівняння стану (3) можна записати у вигляді

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn} Z_{Mn}, \quad (9)$$

де ліва частина рівнянь (9) базується на позначеннях (7).

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Сама схема розгляду задачі на основі методу Ешелбі є такою. Спочатку розглядається тривісний розтяг  $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = P_0$  (за відсутності вектора



електричної індукції основного поля) в ортотропному п'єзоелектричному просторі зі сфероїдальною порожниною. Електропружні властивості включення покладаються близькими нульовим значенням (моделюється порожнина). Далі за допомогою узагальненого методу еквівалентного включення Ешелбі обчислюється силове і електричне поля, що є суперпозицією основного поля (тривісного розтягу) та збуреного стану (викликаного наявністю порожнини). Після цього із суперпозиції станів (основного і збуреного) вилучається тривісний розтяг  $\sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = P_0$  (основний напружений стан). У результаті отримуємо лише збурений стан, який повністю відповідає випадку навантаження порожнини внутрішнім тиском  $P_0$  в електропружному просторі.

Електричний і напружений стани в електропружному просторі подамо суперпозицією основного поля і збурення, викликаного наявністю порожнини. Для пошуку збуреного стану скористаємось методом еквівалентного включення Ешелбі, узагальненого на випадок електропружності [11]. Рівняння еквівалентності в області включення (неоднорідності) мають такий вигляд:

$$E_{iJKl}^1 (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl}) = E_{iJKl} (Z_{Kl}^0 + Z_{Kl} - Z_{Kl}^*) \quad (\bar{x} \in \Omega), \quad (10)$$

де  $E_{iJKl}^1$ ,  $E_{iJKl}$  — електропружні модулі неоднорідності та матриці відповідно (для випадку порожнини  $E_{iJKl}^1$  спрямуємо до близьких нулю значень);  $Z_{Mn}^*$  — значення «вільних» деформацій (за термінологією Ешелбі) і напруженості електричного поля, які визначаються з умов еквівалентності включення. Значення  $Z_{Kl}^0$  (деформації і значення електричної індукції основного поля) отримуємо зі співвідношень  $\Sigma_{iJ}^0 = E_{iJKl} Z_{Kl}^0$ . Аналогічно пружному випадку маємо

$$Z_{Mn} = S_{MnAb} Z_{Ab}^*, \quad (11)$$

де  $S_{MnAb}$  — п'єзоелектричний аналог тензора Ешелбі, який залежить від геометричної форми включення і електропружних властивостей п'єзоелектричного простору. Скориставшись Фур'є-образом функції Гріна для нескінченного електропружного матеріалу, подамо його у вигляді

$$S_{MnAb} = \frac{E_{iJAb}}{4\pi} \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{mJin}(\bar{z}) + I_{nJin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & m = M = 1, 2, 3; \\ \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [I_{4Jin}(\bar{z})] d\theta d\eta_3, & M = 4, \end{cases} \quad (12)$$

де  $z_i = \eta_i / a_i$ ;  $\eta_1 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \cos \theta$ ;  $\eta_2 = \sqrt{1 - \eta_3^2} \sin \theta$ . Крім того, маємо  $I_{MJin} = z_i z_n K_{MJ}^{-1}(\bar{z})$ , де  $K_{MJ}^{-1}$  — обернена до такої матриці:  $K_{MJ} = z_i z_n E_{iMJn}$ .

За допомогою співвідношень (10)–(12) для знаходження невідомих значень  $Z_{kl}^*$  отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь. Коефіцієнти цієї системи залежать від подвійних інтегралів типу (12), які не мають особливостей в області інтегрування.

Для знаходження розподілу напружень в електропружному просторі з еліпсоїдальним включенням необхідно спочатку за формулами (12) обчислити аналог тензора Ешелбі  $S_{MnAb}$ , а потім з рівнянь еквівалентності (10) визначити значення  $Z_{kl}^*$ . У цій роботі компоненти  $S_{MnAb}$  обчислювались за квадратурними формулами Гауса. Після знаходження невідомих значень  $Z_{kl}^*$  визначалися електричний і напружений стани всередині м'якого включення. Для обчислення значень напружень і характеристик електричного поля у точках п'єзоелектричного простору, що межують із поверхнею включення, використовувались формули стрибка напружень і електричної індукції при переході через межу включення [11]:

$$[\Sigma_{ij}] = \Sigma_{ij}^{out} - \Sigma_{ij}^{in} = E_{ijkl} \{ -E_{pQmn} Z_{mn}^* n_p n_l K_{QK}^{-1}(\bar{n}) + Z_{kl}^* \},$$

де  $n_i$  — компоненти нормалі до поверхні включення.

## АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Спочатку для тестування алгоритму розв'язання задачі розглянемо випадок сфероїдальної порожнини, що міститься в трансверсально-ізотропному електропружному просторі. Припускаємо, що вісь обертання сфероїда збігається з с віссю симетрії п'єзоелектричного матеріалу  $Oz$ . Нехай основний електричний і напружений стани у нескінченному електропружному просторі мають вигляд

$$\sigma_x = \sigma_x^0; \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

$$\Psi^{(0)} = 0; D_x^{(0)} = D_y^{(0)} = 0; D_z^{(0)} = d_{31} \sigma_x^0,$$

де  $d_{31}$  — п'єзоелектрична стала [7]. Розглянемо п'єзокерамічні матеріали РХЕ-5 і ЦТС-19, властивості яких наведено у праці [7]. Після обчислень для стиснутих сфероїдальних порожнин маємо результати, що узгоджуються з даними праці [13] (отримані криві накладаються на лінії рис. 1, 2 із праці [13]). Для діапазону співвідношень півосей сфероїда  $c/a = 0,2 \div 0,9$  у розрахунках використовувались квадратурні формули Гауса по 48 вузлах (по кожній зі змінних), а для діапазону відношень  $c/a = 0,1 \div 0,2$  — по 96 вузлах. Знайдені в результаті обчислень значення напружень узгоджуються з даними праці [13]. Так, концентрація напружень  $\sigma_x / \sigma_x^0$  за заданого основного поля (14) і відношення півосей сфероїда  $c/a = 0,5$  для п'єзокерамічного матеріалу ЦТС-19 на поверхні порожнини досягає значень 1,418 (1,42 у [13]) у вершині на осі  $Oy$  і 1,887 (1,89 у [13]) у вершині на осі  $Oz$ . Отже, тестування підходу до задачі для трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного простору

тору зі сфероїдальною порожниною, що має точний розв'язок, підтверджує узгодженість результатів досліджень з даними цієї роботи.

Вивчимо напружений стан в ортотропному електропружному матеріалі  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$  [17] зі сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском  $P_0$  і за відсутності електричних впливів ( $D_z = 0$ ) на поверхні порожнини, а також без основних силових і електричних полів в ортотропному електропружному матеріалі. Відзначимо, що властивості матеріалу  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$  описуються значеннями 17 незалежних електропружних сталих, які наведено у праці [17].

Розподіл напружень  $\sigma_{zz} / P_0$  уздовж поверхні порожнини у перерізі  $XZ$  (від вершини сфероїда на осі  $0x$  до його вершини на осі  $0z$ ) за різних співвідношень півосей порожнини подано у вигляді рис. 1, на якому криві 1–5 відповідають таким співвідношенням півосей сфероїдальної порожнини:  $a/c = 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ . Видно, що зі зменшенням значення  $a/c$  (збільшенням кривизни сфероїдальної поверхні) ростуть максимальні значення напружень  $\sigma_{zz} / P_0$  (на поверхні порожнини у вершині сфероїда на осі  $0x$ ). Водночас у вершині  $C$  (на осі  $0z$ )  $\sigma_{zz} / P_0 = -1$ , що відповідає граничним умовам перебування порожнини під тиском  $P_0$ .

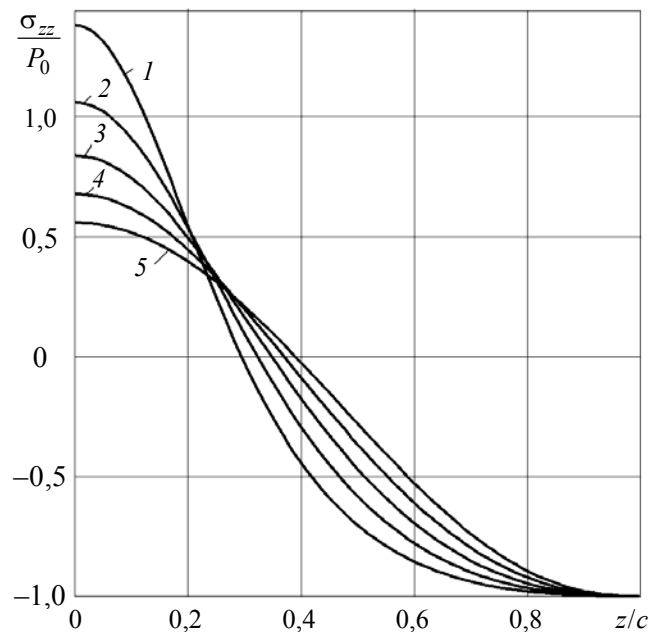


Рис. 1. Розподіл напружень  $\sigma_{zz}$  уздовж поверхні порожнини в перерізі  $XZ$  залежно від геометрії порожнини

Розподіл напружень  $\sigma_{zz} / P_0$  уздовж поверхні порожнини у перерізі  $XZ$  для трьох різних за властивостями матеріалів (якщо  $a/c = 0,5$ ) показано на рис. 2. Крива 1 відповідає електропружному матеріалу  $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ , а лінії 2, 3 — пружним ортотропним матеріалам склопластиків СТЕТ, АСТТ(б)- $\text{C}_2\text{O}$  і ПН-3 [1, 64]. Найбільші значення напружень відповідають пружному ортотропному склопластику СТЕТ, а найменші максимальні значення з дослі-

джуваних матеріалів досягаються для електропружного ортотропного матеріалу  $Ba_2NaNb_5O_{15}$ .

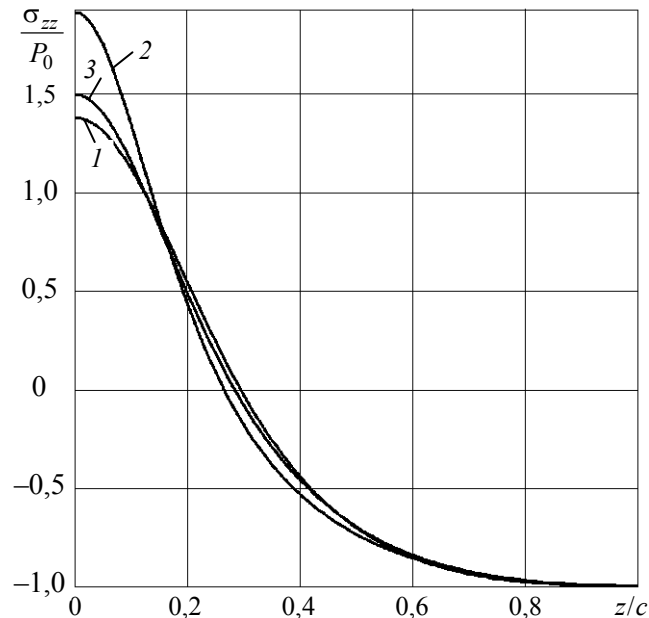


Рис. 2. Розподіл напружень  $\sigma_{zz}$  уздовж поверхні порожнини в перерізі  $XZ$  для електропружного та двох пружних ортотропних матеріалів

## ВИСНОВОК

У роботі за допомогою математичної моделі досліджено розподіл напруженого стану в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі, що містить порожнину сфероїдальної форми, яка перебуває під внутрішнім тиском. Вивчено вплив геометрії порожнини та електропружних властивостей ортотропного матеріалу на розподіл напружень уздовж поверхні сфероїдальної порожнини.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницький. — М.: Наука, 1977. — 415 с.
2. Kaloerov S.A. Thermostressed State of an Anisotropic Plate with Holes and Cracks / S.A. Kaloerov, Yu.S. Antonov // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 9. — P. 1066–1075.
3. Kirilyuk V.S. Stress State of a Transversely Isotropic Medium with Arbitrarily Orientated Spheroidal Inclusion / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 2. — P. 137–143.
4. Kirilyuk V.S. The Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Ellipsoidal Cavity / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2005. — **41**, N 3. — P. 302–308.
5. Кирилюк В.С. О напряженном состоянии трансверсально-изотропной среды с произвольно ориентированной сфероидальной полостью или дискообразной трещиной под внутренним давлением / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // Проблемы прочности. — 2005. — N 5. — С. 58–70.

6. Кирилюк В.С. О влиянии ориентации сфероидальных полостей или жестких включений в ортотропной среде на концентрацию напряжений / В.С. Кирилюк // Проблемы прочности. — 2006. — № 1. — С. 58–68.
7. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // Механика связанных полей в элементах конструкций: в 6 т.; Т. 1. — К.: Наук. думка, 1989. — 279 с.
8. Podil'chuk Yu.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems / Yu.N. Podil'chuk // Int. Appl. Mech. 2003. — **39**, N 2. — P. 132–170.
9. Kaloerov S.A. Two-Dimensional Electroelastic Problem for a Multiply Connected Piezoelectric Body / S.A. Kaloerov, A.I. Baeva, Yu.A. Glushchenko // Int. Appl. Mech. — 2003. — **39**, N 1. — P. 77–84.
10. Dai L. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
11. Dunn M.L. Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids / M.L. Dunn, M. Taya // J. Appl. Mech. 1994. — **61**, N 4. — P. 474–475.
12. Mikata Y. Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion / Y. Mikata // Int. J. Solids and Struct. 2001. — **38**, N 40–41. — P. 7045–7063.
13. Podil'chuk Yu.N. Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity / Yu.N. Podil'chuk, I.G. Myasoedova // Int. Appl. Mech. 2004. — **40**, № 11. — P. 1269–1280.
14. Chiang C.R. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material / C.R. Chiang, G.J. Weng // Int. J. Fract. 2005. — **134**, N 3–4. — P. 319–337.
15. Кирилюк В.С. Математичне моделювання і аналіз напруженого стану у ортотропному п'єзоелектричному середовищі з круговою тріщиною / В.С. Кирилюк, О.І. Левчук, О.В. Гавриленко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 3. — С. 117–126. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2017.3.11>
16. Kirilyuk V.S. Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // International Applied Mechanics. — 2017. — **53**, N 3. — P. 305–312.
17. Zhou Y.Y. Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections / Y.Y. Zhou, W.Q. Chen, C.F. Lu // Composite Structures. — 2010. — **92**, N 4. — P. 1009–1018
18. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш. — К.: Наук. думка, 2008. — 270 с.

Надійшла 14.06.2019

## СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ В ФОРМУЛЕ ТРОТТЕРА–ДАЛЕЦКОГО ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В.Г. БОНДАРЕНКО, И.С. МАРКЕВИЧ

**Аннотация.** Предложен и обоснован итерационный метод построения решения задачи Коши для параболического уравнения с нелинейным потенциалом (уравнение типа «реакция–диффузия»). Основой метода является обобщенная для нелинейного возмущения эллиптического оператора формула Троттера–Далецкого. Суть обобщения—композиция полугруппы с эллиптическим генератором и фазового потока, порожденного обыкновенным дифференциальным уравнением. Установленные при доказательстве этой формулы оценки скорости сходимости итераций подтверждены вычислительным экспериментом, выполненным для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера. Полученные результаты позволяют предположить целесообразность нетрадиционного подхода к моделированию динамических систем с распределенными параметрами. В качестве примера рассмотрена модель пространственно-временной динамики водного сообщества в терминах двухвидовой системы «хищник–жертва».

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, полугруппа операторов, теория возмущений.

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $u(t)(t \geq 0)$  — функция, принимающая значения в некотором нормированном пространстве  $X$ , удовлетворяющая эволюционному уравнению

$$\frac{du}{dt} = \Phi(u), \quad (1)$$

где оператор  $\Phi: X \rightarrow X$ . Следуя общепринятой терминологии, назовем уравнение (1) динамической системой, а функцию  $u(t)$  — характеристикой этой динамической системы. Если  $\Phi: R^N \rightarrow R^N$ , т. е.  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ , и (1) — автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(u_1, \dots, u_N), \quad (2)$$

то соответствующая динамическая система является объектом с сосредоточенными параметрами (ОСП). Если же  $X$  — функциональное пространство

$$u(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), \dots, u_N(t, \mathbf{x})),$$

где  $\mathbf{x}$  — пространственная переменная,  $\mathbf{x} \in R^d$ , и оператор  $\Phi$  содержит дифференцирование по этой переменной, то уравнение (1) описывает динамическую систему — объект с распределенными параметрами (ОРП). В ря-

де случаев математической моделью такого объекта является система полулинейных параболических уравнений (реакция–диффузия):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = L_i u_i + f_i(u), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $L_i$  — эллиптический оператор второго порядка:

$$L_i = \sum_{j,k} a_{i,jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b_{i,k}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

с гладкими коэффициентами, а матрицы  $A_i(\mathbf{x}) = \|a_{i,jk}(\mathbf{x})\|$  удовлетворяют неравенствам  $A_i(\mathbf{x}) \geq \lambda I$ ,  $\lambda > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Приведенные условия гарантируют существование фундаментального решения

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (p_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, p_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

соответствующей линейной системы

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = L_i q_i: \quad q_i(t, \mathbf{x}) = (e^{L_i t} q_i(0, \bullet))(\mathbf{x}) \equiv \int q_i(0, \mathbf{y}) p_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (4)$$

Систему (3) рассматриваем как возмущенную систему (4), где возмущением является  $f(\mathbf{u})$ . Одним из методов построения решений возмущенных эволюционных уравнений является их сведение к интегральному уравнению. Так, решение  $u(t, \mathbf{x})$  задачи Коши для одномерного полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(u), \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^d, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$Lu = \text{tr} A(x) \nabla^2 u + (b(x), \nabla u)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \varphi(\mathbf{y}) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t d\tau \int f(u(\tau, \mathbf{y})) p(t - \tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) (t - \tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

Свойства квазилинейных параболических уравнений, в частности систем (3), рассмотрены в работах [1–3].

В работе объектом изучения являются некоторые свойства решения задачи Коши (5), где функция  $f$  сохраняет постоянный знак на области значений  $u(t, \mathbf{x})$ , ограничена на этой области и удовлетворяет некоторым условиям гладкости. Тогда  $u(t, \mathbf{x})$  — классическое решение, обладающее

непрерывными производными  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ .

Введем обозначения:

1)  $r(t, a)$  — решение задачи Коши

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \quad r(0, a) = a, \quad r(t, a) = G_t a, \quad G_t \text{ — фазовый поток;}$$

2)  $q(t, \mathbf{x})$  — решение задачи Коши невозмущенного линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} = Lq, \quad q(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad q(t, \mathbf{x}) = (e^{tL}\varphi)(\mathbf{x}) \equiv \int \varphi(\mathbf{y}) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y};$$

3)  $v(t, \mathbf{x}) = r(t, q(t, \mathbf{x})) = G_t q(t, \mathbf{x})$ , композиция решений;  $v(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ .

В работах [4, 5] установлена связь между  $u(t, \mathbf{x})$ ,  $v(t, \mathbf{x})$ . В частности, обобщена для нелинейного возмущения формула, традиционно называемая формулой Троттера, которая в работе [6] приведена в виде

$$e^{T(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{T}{n}A} e^{\frac{T}{n}B} \right), \quad (6)$$

где  $A, B, A+B$  — генераторы сжимающих  $C_0$ -полугрупп  $e^{tA}, e^{tB}, e^{t(A+B)}$  в некотором банаховом пространстве,  $\left(\frac{T}{n}, \dots, \frac{kT}{n}, \dots, T\right)$  — разбиение отрезка  $[0; T]$ ,  $T > 0$ . Эта формула независимо (при различных условиях и разными методами) доказана в работах [7, 8], в связи с чем в дальнейшем (6) будем называть формулой Троттера–Далецкого.

**Цель работы** — обобщение формулы Троттера–Далецкого и исследование сходимости соответствующих итераций вычислительным экспериментом.

Предлагаемую конструкцию решения задачи Коши назовем **методом композиции**.

## МЕТОД КОМПОЗИЦИИ

Упомянутое обобщение формулы (6) доказано для нелинейного возмущения  $f$  оператора  $L$  (при некоторых условиях  $f$ ), т. е. для полулинейного уравнения (3) — для скалярного случая (5) и системы

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \Delta u_j + f_j(\mathbf{u}), \quad u_j(0, \mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^d.$$

Обозначим через  $H(t)$  нелинейную полугруппу, порожденную генератором  $L + f$ :

$$(H(t)\varphi)(\mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}).$$

Тогда

$$H(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T}{n}L} \right)^n, \quad (7)$$

где сходимость имеет место в норме пространства  $C(R^d)$ .



Для доказательства (7) строятся последовательности функций  $\left(0 \leq t \leq \frac{T}{n}\right)$ :

$$\begin{aligned} q_0(t, \mathbf{x}) &= \int \varphi(\mathbf{y}) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad v_1(t, \mathbf{x}) = r(t, q_0(t, \mathbf{x})); \\ q_1(t, \mathbf{x}) &= \int v_1\left(\frac{T}{n}, \mathbf{y}\right) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad v_2\left(t + \frac{T}{n}, \mathbf{x}\right) = r(t, q_1(t, \mathbf{x})); \\ q_k(t, \mathbf{x}) &= \int v_k\left(k \frac{T}{n}, \mathbf{y}\right) p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad v_{k+1}\left(t + k \frac{T}{n}, \mathbf{x}\right) = r(t, q_k(t, \mathbf{x})), \\ 0 \leq k &\leq n-1; \quad q_k(0, \mathbf{x}) = v_k\left(\frac{kT}{n}, \mathbf{x}\right) = v_{k+1}\left(\frac{kT}{n}, \mathbf{x}\right). \end{aligned}$$

В терминах эволюционных операторов

$$v_{k+1}\left(t + \frac{kT}{n}\right) = G_t e^{tL} v_k\left(\frac{kT}{n}\right), \quad v_n(T, \mathbf{x}) = \left( \left( G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T-L}{n}} \right)^n \varphi \right)(\mathbf{x}).$$

Далее доказывается оценка

$$(v_n(T, \mathbf{x}) - u(T, \mathbf{x}))^2 < \frac{n+1}{n^3} T^3,$$

т. е. скорость сходимости определяется неравенством

$$\left\| \left( G_{\frac{T}{n}} e^{\frac{T-L}{n}} \right)^n \varphi - H(T)\varphi \right\| < \frac{C}{n} T^{\frac{3}{2}}, \quad \|\bullet\| \text{ — норма в } C(R^d). \quad (8)$$

**Замечание.** В монографии [9, с. 307–315] нелинейная формула Троттера–Далецкого для  $A(x) = A = \text{const}$  доказана в следующей версии. Для последовательности

$$\psi_n(T, \bullet) = \left( e^{\frac{T-L}{n}} G_{\frac{T}{n}} \right)^n \varphi$$

получена оценка  $\|\psi_n(T, \bullet) - u(T, \bullet)\|_V \leq C \|\varphi\|_V n^{-\delta}$ , где  $V$  — некоторое банахово пространство; приведен ряд примеров,  $V \neq C(R^d)$ , и сходимость  $\psi_n(T, \bullet)$  требует дополнительных условий для начальной функции.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве примера для вычислительного эксперимента выберем уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера (КППФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u).$$

Решение задачи Коши  $u(t, x)$  для этого уравнения интерпретируется как нормированная ( $0 < u < 1$ ) плотность популяции на одномерном ареале и представляет собой волну, описывающую расселение популяции с начальной плотностью  $u(0, x)$  [10]. Рассмотрим временной интервал  $0 < t \leq 1$ ; тогда функцию  $u(t, x)$  достаточно исследовать в той части ареала, которой достигла волна в некотором пространственном интервале  $[-l : l]$ .

Целью проведенного вычислительного эксперимента являются сравнение решения  $u(T, x)$  задачи Коши для уравнения КППФ с функцией  $v_n(T, x)$ , определенной равенством (8), и численная интерпретация скорости сходимости итераций, соответствующая неравенству (9). Начальным условием выбрана функция  $u(0, x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$ .

Решение  $u(t, x)$  задачи Коши для уравнения КППФ получено численным методом с использованием пакета Matlab: при вычислении значений  $v_n(T, x)$  использовалась функция `rdepe` пакета Matlab. Выбрана величина параметра  $l=6$ . Результаты вычислений представлены графически на рис. 1–4.

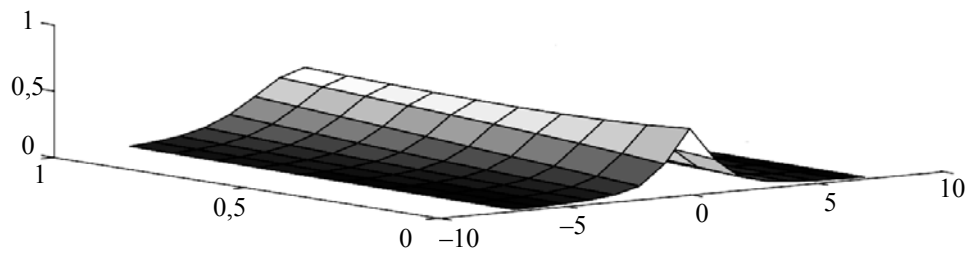


Рис. 1

Так, на рис. 1 изображена поверхность, заданная уравнением

$$u = u(t, x), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -6 \leq x \leq 6,$$

на рис. 2, 3 изображены графики разности  $|u(T, x) - v_n(T, x)|$ , т. е. отклонение композиции от решения задачи Коши.

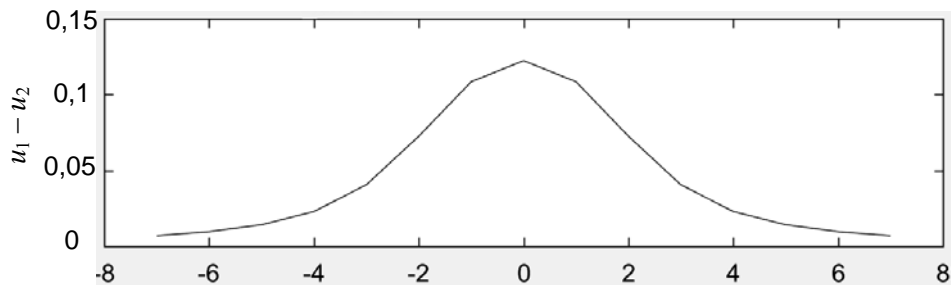


Рис. 2

На рис. 2:  $T = \frac{1}{2}$ ,  $n = 50$ ; на рис. 3:  $T = 1$ ,  $n = 100$ .

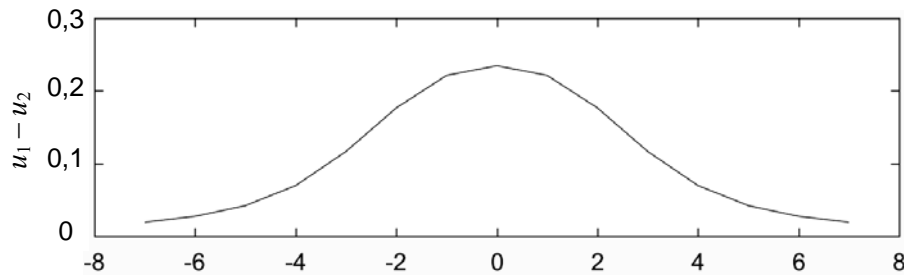


Рис. 3

Зависимость отклонения  $\delta(T) = \|u(T, x \bullet) - v_n(T, x \bullet)\| = \max_x |u(T, x) - v_n(T, x)|$  от длины  $T$  временного интервала показана на рис. 4.

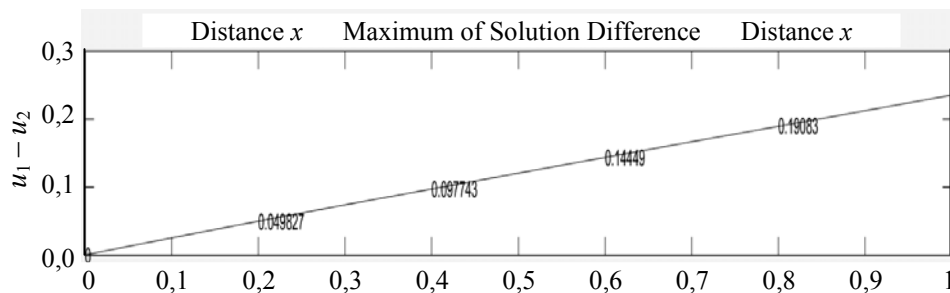


Рис. 4

Результаты вычислений подтверждают оценку (8): погрешность приближения убывает с возрастанием количества итераций и возрастает как функция временного интервала длины  $T$ .

## ОБСУЖДЕНИЕ АДЕКВАТНОСТИ ТРАДИЦИОННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть  $(u_1(t), \dots, u_N(t))$  — характеристика ОСП, удовлетворяющая уравнению (2). Примерами таких объектов, в частности, являются:

- сообщество «хищник–жертва», описываемое системой Лотки–Вольтерра

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2),$$

где  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  — плотность популяции жертвы и хищника, вид функций  $f_i$  зависит от вида особей;

- функционирование ряда технических систем, также описываемое системой (2), где  $(u_1(t), \dots, u_N(t))$  — параметры ОСП.

Если же исследуемый объект, изначально описываемый системой (2), трансформируется таким образом, что его характеристики зависят от пространственной переменной, то он переходит в класс ОРП. Примерами таких трансформаций являются расселение популяций по двумерному ареалу, или наличие «протяженности» объекта (зависимость амплитуды колебаний кры-

ла самолета от расстояния до фюзеляжа). При таком переходе математической моделью ОРП традиционно постулируется система уравнений (3) (при этом строгое обоснование, как правило, отсутствует), где функции  $f_i(\mathbf{u})$  те же, что и в равенстве (2). Иначе введение пространственной переменной учитывается диффузионным слагаемым  $Lu$ . Так, в работах [12, 13] исследована пространственно-временная динамика водного сообщества в терминах двухвидовой системы «хищник–жертва» (зоопланктон–фитопланктон). Пусть  $u_1(t, x, y)$ ,  $u_2(t, x, y)$  — плотность фитопланктона и зоопланктона соответственно. Предполагается, что данный объект описывается математической моделью в виде системы уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \Delta u_1 + u_1(1 - u_1) - \frac{u_1}{u_1 + h} u_2;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \Delta u_2 + k \frac{u_1}{u_1 + h} u_2 - m u_2,$$

полученной из соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерра добавлением оператора Лапласа. В результате численного эксперимента установлено, что решение  $(u_1, u_2)$  образует некоторую пространственную структуру. Но такому же свойству удовлетворяет векторная функция — композиция  $\mathbf{v}(t, x, y) = \mathbf{r}(t, \mathbf{q}(t, x, y))$ , определенная выше, также претендующая на роль модели. Иначе, трансформацию ОСП в ОРП предлагается моделировать не обязательно добавлением эллиптического оператора, а методом композиции фазового потока и полугруппы (возможно, разбиением временного интервала). Заметим, что для такой модели некоторые свойства решений системы (2), соответствующей ОСП, сохраняются (например, наличие предельных циклов).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Aronson D.G. Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics // D.G. Aronson, H.F. Weinberger // *Advances Mathematics*. — 1978. — V. 30. — P. 33–76.
2. Amann H. Dynamic theory of quasilinear parabolic equations. II. Reaction-diffusion systems / H. Amann // *Differential Integral Equations*. — 1990. — V.3, N 1. — P. 13–75.
3. Yagi A. Abstract parabolic evolution equations and their applications / A. Yagi. — Berlin: Springer, 2010.
4. Бондаренко В.Г. Формула Троттера–Далецкого для нелинейного возмущения / В.Г. Бондаренко // *Украинский математический журнал*. — 2018. — 70, № 12. — С. 1717–1722.
5. Бондаренко В.Г. Метод композиции для систем с распределенными параметрами / В.Г. Бондаренко // *Проблемы управления и информатики*. — 2018. — № 4. — С. 112–120.
6. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — К.: Вища шк., 1989. — 347 с.
7. Trotter T.F. Of the product of semi-groups of operators / T.F. Trotter // *Pros. Am. Math. Soc.* — V. 959, N 10. — P. 545–551.

8. *Далецкий Ю.Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / Ю.Л. Далецкий // УМН. — 1962.— Т. 17, № 5. — С. 3–115.
9. *Taylor M.E.* Partial Differential Equations III / M.E. Taylor. — New York: Springer Verlag, 1997.
10. *Свирижев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю.М. Свирижев. — М.: Наука, 1987. — 368с.
11. *Murray J.D.* Mathematical Biology / J.D. Murray. — New York: Springer-Verlag, 2002. — Vol. 1, 2.
12. *Медвинский А.Б.* Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы / А.Б. Медвинский, С.В. Петровский, И.А. Тихонова и др. // Успехи физических наук. — 2002. — Т. 172, № 1. — С. 31–66.
13. *Medvinsky A.B.* Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics / A.B. Medvinsky, S.V. Petrovskii, I.A. Tikhonova, H. Malchow // SIAM Review. — 2002. — V. 44, N 3. — P. 311–370.

*Поступила 17.07.2019*

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С НЕЧЕТКИМ АРГУМЕНТОМ: СХОДИМОСТЬ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ

И.Я. СПЕКТОРСКИЙ

**Аннотация.** Основным объектом рассмотрения являются функциональные последовательности  $f_n(A)$  с выпуклым полунепрерывным сверху нечетким числом  $A$  в качестве аргумента; предполагается сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  равномерно на каждом замкнутом интервале внутри носителя  $\text{supp } A$ . Предложены достаточные условия сходимости  $f_n(A)$  в смысле сходимости последовательности множеств уровня  $[f_n(A)]_\alpha$  по метрике Хаусдорфа  $d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha)$ : доказана сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$  для каждого значения  $0 < \alpha \leq 1$  при условии непрерывности отображений  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) и  $f(x)$  без предположения о существовании производных. Также доказана сходимость последовательности  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) по метрике пространства нечетких чисел  $\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha)$  при дополнительном условии равномерной на всем  $\text{supp } A$  сходимости последовательности  $f_n(A)$ ; в этом случае для обеспечения конечности расстояния Хаусдорфа при всех  $0 < \alpha \leq 1$  нечеткое число  $A$  предполагается нормальным.

**Ключевые слова:** нечеткое число, множество уровня, функциональная последовательность, сходимость.

### ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие числа как частный случай нечетких множеств представляют мощное средство математического моделирования в условиях неполной информации об исходных объектах [1].

Принцип обобщения, сформулированный Л.А. Заде для произвольных нечетких множеств [1–6], позволяет определить действие произвольной числовой функции конечного числа аргументов на нечеткие числа. В частности, на случай нечетких чисел можно обобщить стандартные арифметические операции «+», «·», «–» и «/».

Особый интерес в настоящее время представляют выпуклые нечеткие числа [3, 4], которые во многих случаях наиболее точно соответствуют классическому действительному числу. С другой стороны, выпуклые нечеткие числа легче анализировать благодаря простой структуре множеств уровня. Наконец, класс выпуклых нечетких чисел замкнут относительно непрерывных функций конечного числа аргументов, в частности — относительно арифметических операций «+», «–» и «·». Для нечетких чисел со-

храняются законы коммутативности и ассоциативности операций «+» и «·», однако, в общем случае, не выполняется дистрибутивность «·» относительно «+» (подробнее об алгебраических свойствах нечетких чисел см., напр., [3, 4]).

Для нечетких чисел естественным и важным является понятие расстояния и связанная с ним топология сходимости. В работах [6, 7], как и во многих других, сходимость последовательности нечетких чисел трактуется в смысле сходимости множеств уровня функций принадлежности по метрике Хаусдорфа. Анализ поточечной сходимости последовательности функций принадлежности в ряде случаев может оказаться существенно проще. Так, в работе [8] представлены достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким аргументом в смысле поточечной сходимости последовательности функций принадлежности

**Цель работы** — представить достаточные условия сходимости последовательности функций с нечетким аргументом в смысле сходимости множеств уровня функций принадлежности, не ограничиваясь случаем аналитических функций.

В работе приведены известные сведения из теории нечетких чисел, необходимые для изложения основного результата; проанализирована возможность предельного перехода по метрике Хаусдорфа для множеств уровня функций принадлежности членов последовательности отображений с нечетким аргументом; рассмотрена сходимость функциональной последовательности с нечетким аргументом в топологии расстояния между нечеткими числами.

## ПОНЯТИЕ НЕЧЕТКОГО ЧИСЛА. ВЫПУКЛЫЕ НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

Нечеткое число  $A$  является частным случаем нечеткого множества и определяется своей *функцией принадлежности*  $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . *Носителем* нечеткого числа  $A$  называют множество  $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$ . Для заданного  $\alpha \in (0, 1]$  рассматривают *множество уровня*  $[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ . Очевидно соотношение  $\text{supp } A = \bigcup_{\alpha > 0} [A]_\alpha$ . Легко понять, что совокупность

множеств уровня однозначно определяет функцию принадлежности  $\mu_A$  (а значит и нечеткое число  $A$ ), так как  $\mu_A^{-1}(\alpha_0) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) = \alpha_0\} = A_{\alpha_0} \setminus \bigcup_{\alpha > \alpha_0} [A]_\alpha$  для всех  $0 < \alpha_0 \leq 1$ .

**Замечание 1.** Представление нечеткого числа через множества уровня описывает классическая теорема о декомпозиции [3, 6].

Нечеткое число  $A$  называют *выпуклым*, если  $\mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$  для любых  $x \leq y \leq z$ . Заметим, что выпуклость нечеткого числа не означает выпуклости функции принадлежности (в смысле классического определения выпуклости функций, используемого в анализе).

**Пример 1.** На рис. 1 изображена функция принадлежности выпуклого нечеткого числа  $A$ . При этом  $\mu_A(x)$ , очевидно, невыпукла.

Нечеткое число  $A$  называют *нормальным*, если  $\max_{x \in \mathbb{R}} \mu_A(x) = 1$ . Так, нечеткое число  $A$  из предыдущего примера (рис. 1) является нормальным.

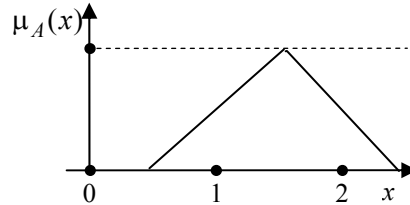


Рис. 1. Выпуклое нечеткое число с невыпуклой функцией принадлежности

Выпуклость нечеткого числа непосредственно связана с выпуклостью множеств уровня.

**Лемма 1.** Нечеткое число  $A$  является выпуклым тогда и только тогда, когда выпуклы все его множества уровня  $[A]_\alpha$  ( $\alpha \in (0; 1]$ ).

Утверждение доказано, например, в работе [8].

Важный класс представляют нечеткие числа с полунепрерывной сверху функцией принадлежности — такие нечеткие числа называют *полунепрерывными сверху*. Под непрерывностью и полунепрерывностью сверху подразумеваем непрерывность (полунепрерывность сверху) на  $\mathbb{R}$ . Полунепрерывность функции принадлежности  $\mu_A$ , определяемая условием  $(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_A(x_n) \leq \mu_A(x))$ , можно охарактеризовать в терминах множеств уровня нечеткого числа  $A$ .

**Лемма 2.** Нечеткое число  $A$  полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда все множества уровня  $[A]_\alpha$  ( $\alpha \in (0; 1]$ ) замкнуты.

Утверждение леммы (в эквивалентной формулировке) доказано в работе [9, с. 385–388], а в [10] приведено в качестве упражнения.

**Следствие.** Пусть нечеткое число  $A$  полунепрерывно сверху. Тогда компактность множества уровня  $[A]_\alpha$   $0 < \alpha \leq 1$  равносильна ограниченности  $[A]_\alpha$ . В пространстве  $\mathbb{R}^n$  компактность множества эквивалентна его ограниченности и замкнутости, однако в бесконечномерных метрических пространствах ограниченность и замкнутость являются лишь необходимыми, но не достаточными условиями компактности.

**Пример 2.** На рис. 2 изображена функция принадлежности выпуклого нечеткого числа  $A$ . Очевидно,  $\mu_A(x)$  полунепрерывна сверху, и все множества уровня нечеткого числа  $A$  замкнуты. Так, множество  $[A]_{0,4} = [1,5; \infty)$  замкнуто.

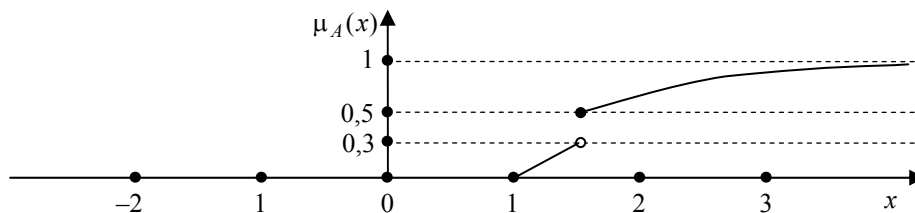


Рис. 2. Нечеткое число с полунепрерывной сверху функцией принадлежности



**Пример 3.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности  $\mu_A(x) = e^{-x^2}$ . Функция  $\mu_A(x)$  полунепрерывна сверху (и даже непрерывна), множества уровня  $[A]_\alpha$  ограничены и, в силу следствия из леммы 2, компактны при любом  $0 < \alpha \leq 1$ . Отметим, что носитель  $\text{supp } A = \mathbb{R}$  при этом неограничен.

Заметим, что при определении нечеткого числа часто требуют его выпуклость, нормальность и полунепрерывность сверху [6].

### Отображения нечетких множеств. Сохранение выпуклости

Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция с областью определения  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  (здесь и далее символы « $\subset$ » и « $\supset$ » допускают равенство множеств). В соответствии с принципом обобщения Заде [1–6] образ набора нечетких чисел  $A_1, A_2, \dots, A_n$  при отображении  $f$  определяется как нечеткое число  $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$  с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in D_f: f(x_1, \dots, x_n) = y} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)), & \text{если } \exists (x_1, \dots, x_n) \in D_f : f(x_1, \dots, x_n) = y; \\ 0, & \text{если } \forall (x_1, \dots, x_n) \in D_f : f(x_1, \dots, x_n) \neq y. \end{cases} \quad (1)$$

**Пример 4.** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x$ . Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольного нечеткого числа  $A$  получаем функцию принадлежности для нечеткого числа  $-A$ :

$$\mu_{-A}(y) = \mu_A(-y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

**Пример 5.** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольного нечеткого числа  $A$  получаем функцию принадлежности для нечеткого числа  $A^2$ :

$$\mu_{A^2}(y) = \begin{cases} \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y})), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

**Пример 6.** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$ . Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольного нечеткого числа  $A$  получаем функцию  $\mu_{\sin A}$ :

$$\mu_{\sin A}(y) = \begin{cases} \sup \{ \mu_A(\arcsin y + 2\pi k), \mu_A(\pi - y + 2\pi m) : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, |y| \leq 1; \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

**Пример 7.** Пусть  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ . Тогда, в соответствии с соотношением (1), для произвольных нечетких чисел  $A_1, A_2$  получаем функцию принадлежности для нечеткого числа  $A_1 + A_2$ :

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \\ x_1+x_2=y}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)).$$

Из примеров 4–7 видно, что при использовании равенства (1) необходимо решать уравнение  $f(x_1, \dots, x_n) = y$  для каждого  $y \in \mathbb{R}$ . Если это уравнение имеет небольшое количество решений (примеры 4 и 5), равенство (1) немедленно дает значение  $\mu_B(y)$ . Но прямое использование равенства (1) весьма проблематично, если уравнение  $f(x_1, \dots, x_n) = y$  имеет бесконечно много решений (примеры 6 и 7), что особенно типично при  $n \geq 2$  (пример 7). Приводимая ниже теорема 1 (доказательство см., напр., в [8]) позволяет вычислять множества уровня нечеткого числа  $B$  непосредственно по множествам уровня  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , минуя прямое использование равенства (1).

**Теорема 1.** Пусть все множества уровня нечетких чисел  $A_1, A_2, \dots, A_n$  компактны, и функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для каждого  $0 < \alpha \leq 1$  множество уровня  $[B]_\alpha$  равно образу множеств уровня  $[A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha$ :

$$\begin{aligned} [B]_\alpha &= f([A_1]_\alpha, [A_2]_\alpha, \dots, [A_n]_\alpha) = \\ &= \{f(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in ([A_1]_\alpha \times [A_2]_\alpha \times \dots \times [A_n]_\alpha)\}. \end{aligned}$$

**Пример 8.** Рассмотрим нечеткие числа  $A_1$  и  $A_2$  с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(x_1) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_1 - a_1|}{\delta_1}, & |x_1 - a_1| \leq \delta_1; \\ 0, & |x_1 - a_1| > \delta_1, \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x_2) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_2 - a_2|}{\delta_2}, & |x_2 - a_2| \leq \delta_2; \\ 0, & |x_2 - a_2| > \delta_2, \end{cases}$$

где  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\delta_i > 0$  ( $i \in \{1; 2\}$ ). Поскольку все множества уровня  $A_1$  и  $A_2$  компактны, а отображение  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  является непрерывным на  $\mathbb{R}^2$ , для вычисления множеств уровня нечеткого числа  $B = A_1 + A_2$  можем использовать теорему 1. Для  $A_1$  и  $A_2$  имеем  $[A_i]_\alpha = [a_i - \alpha\delta_i; a_i + \alpha\delta_i]$  ( $i \in \{1; 2\}$ ) и для  $B$  получаем:

$$[B]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha = [a_1 + a_2 - (\delta_1 + \delta_2)\alpha; a_1 + a_2 + (\delta_1 + \delta_2)\alpha],$$

где  $0 < \alpha \leq 1$ . Теперь по виду  $[B]_\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) легко определить  $\mu_B = \mu_{A_1+A_2}$ :

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y - (a_1 + a_2)|}{\delta_1 + \delta_2}, & |y - (a_1 + a_2)| \leq \delta_1 + \delta_2; \\ 0, & |y - (a_1 + a_2)| > \delta_1 + \delta_2. \end{cases}$$

Графики функций  $\mu_{A_1}$ ,  $\mu_{A_2}$  и  $\mu_B$  изображены на рис. 3.

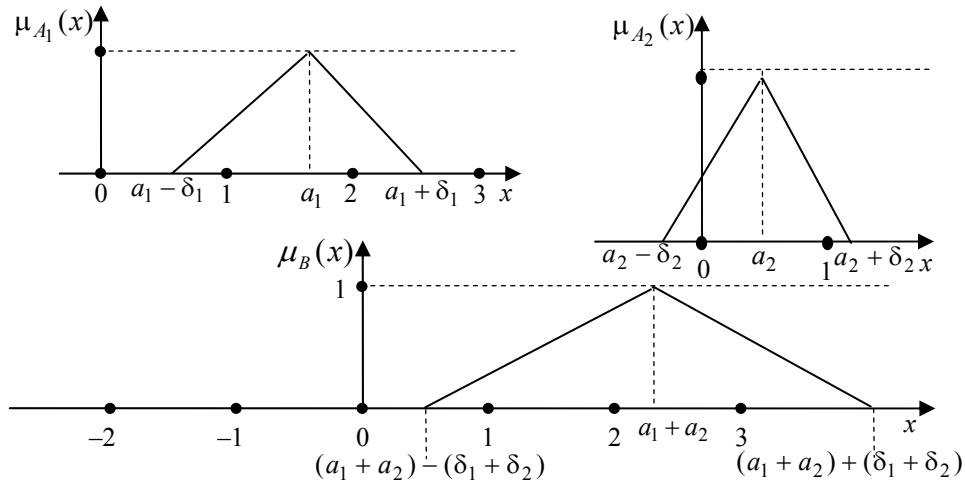


Рис. 3. Нечеткие числа  $A_1$ ,  $A_2$  и  $B = A_1 + A_2$ : условия теоремы 1 выполнены

**Пример 9.** Рассмотрим нечеткие числа  $A_1$  и  $A_2$  с функциями принадлежности

$$\mu_{A_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_1+1}, & x_1 \geq 0; \\ 0, & x_1 < 0, \end{cases} \quad \mu_{A_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2}{x_2-1}, & x_2 \leq 0; \\ 0, & x_2 > 0, \end{cases}$$

Соответствующие графики схематически изображены на рис. . 4.

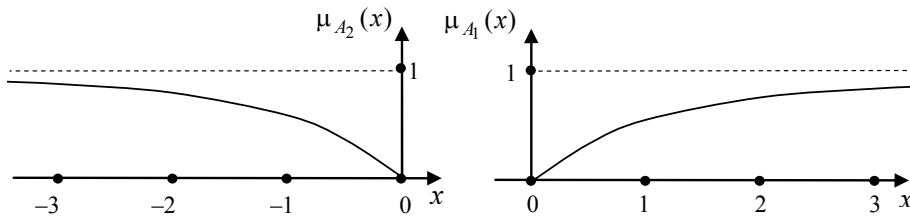


Рис. 4. Нечеткие числа  $A_1$  и  $A_2$ : условия теоремы 1 не выполнены

Поскольку множества уровня нечетких чисел  $A_1$  и  $A_2$  неограничены (а значит, и некомпактны), условия теоремы 1 не выполнены. Применяя формулу (1) (см. также пример 7), получаем:

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: \\ x_1+x_2=y}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)) = \sup_{x \geq \max(0, y)} \min\left(\frac{x}{x+1}, \frac{y-x}{y-x-1}\right) = 1$$

для всех  $y \in \mathbb{R}$ . Равенство  $[A_1 + A_2]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha$ , постулируемое теоремой 1, выполняется для всех  $\alpha \in (0; 1)$  (в этом случае  $[A_1 + A_2]_\alpha = [A_1]_\alpha + [A_2]_\alpha = \mathbb{R}$ ), но не выполняется для  $\alpha = 1$ :  $[A_1 + A_2]_1 = \mathbb{R}$ ,  $[A_1]_1 + [A_2]_1 = \emptyset$ .

Важным фактом является сохранение свойств выпуклости для нечетких чисел и полунепрерывности сверху для их функций принадлежности при непрерывном отображении; соответствующая теорема доказана [8].

**Теорема 2.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — произвольные нечеткие числа, функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $\mathbb{R}^n$ , и  $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Тогда:

- 1) если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  выпуклы, то нечеткое число  $B$  также выпукло;
- 2) если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  полунепрерывны сверху и все множества уровня  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ограничены, то  $B$  также полунепрерывна сверху.

**Пример 10.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta}, & |x| \leq \delta; \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

где  $\delta > 0$ .

Непосредственно из формулы (1) (см. также пример 5) найдем функцию принадлежности числа  $\mu_{A^2}(x)$ :

$$\mu_{A^2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{x}}{\delta}, & 0 \leq x \leq \delta^2; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > \delta^2. \end{cases}$$

Графики функций принадлежности  $\mu_A(x)$  и (схематично)  $\mu_{A^2}(x)$  приведены на рис. 5.

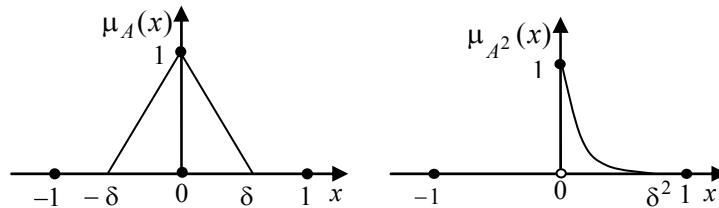


Рис. 5. Нечеткие числа  $A$  и  $A^2$

Отметим, что функция  $\mu_{A^2}(x)$  полунепрерывна сверху, но не непрерывна при непрерывной функции  $\mu_A(x)$  и непрерывном отображении  $f(x) = x^2$ .

**Пример 11.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности  $\mu(x) = 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). Очевидно,  $\mu_{e^A}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  не полунепрерывна сверху: теорема 2 неприменима, так как множества уровня нечеткого числа  $A$  неограничены.

**Замечание 2.** Теоремы 1 и 2 легко обобщить на случай, когда функция  $f$  непрерывна на множестве  $\text{supp } A_1 \times \text{supp } A_2 \times \dots \times \text{supp } A_n$ . Так, если нечеткие числа  $A_1$  и  $A_2$  выпуклы и  $0 \notin \text{supp } A_2$ , то нечеткое число  $\frac{A_1}{A_2}$  также выпукло.

**Замечание 3.** Очевидно, что свойство нормальности сохраняется при произвольном отображении: если нечеткие числа  $A_1, A_2, \dots, A_n$  нормальны и

отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определено на  $\mathbb{R}^n$ , то  $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$  также нормально.

**Последовательность отображений нечетких чисел. Предельный переход для множеств уровня**

Рассмотрим последовательность непрерывных отображений  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ). Будем предполагать существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , где  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, непрерывная на  $\mathbb{R}$ . Для выпуклого полунепрерывного сверху нечеткого числа  $A$  с ограниченными множествами уровня получаем соответственно теореме 2, последовательность выпуклых полунепрерывных сверху нечетких чисел  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ). Для исследования сходимости последовательности множеств стандартным средством является расстояние Хаусдорфа. Напомним, что расстояние Хаусдорфа  $d_H$  (возможно, бесконечное) в метрическом пространстве  $\langle X, \rho \rangle$  для непустых множеств  $A, B \subset X$  определяется как

$$d_H(A, B) = \max \left( \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(a, b) \right).$$

В частности, на  $\mathbb{R}$  со стандартной метрикой  $\rho(a, b) = |a - b|$  для замкнутых интервалов  $[a_1; b_1], [a_2; b_2]$  имеем:

$$d_H([a_1; b_1], [a_2; b_2]) = \max(|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|). \tag{2}$$

Известно [10], что  $d_H$  является метрикой на семействе всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств  $X$ .

Для исследования сходимости множество уровня понадобится простая техническая лемма.

**Лемма 3.** Пусть все множества уровня нечеткого числа  $A$  компактны, отображение  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно,  $0 < \alpha \leq 1$ . Тогда  $[A]_\alpha = \emptyset$  в том и только в том случае, когда  $[g(A)]_\alpha = \emptyset$ .

**Доказательство.** Утверждение леммы немедленно следует из теоремы 1.

**Теорема 3.** Пусть все множества уровня нечеткого числа  $A$  компактны,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  локально равномерно на  $\text{supp } A$  (т.е. равномерно на любом интервале  $[a, b] \subset \text{supp } A$ ),  $[A]_\alpha = \emptyset$  для некоторого  $0 < \alpha \leq 1$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$ .

**Доказательство.** В соответствии с теоремой 1

$$\begin{aligned} [f_n(A)]_\alpha &= f_n([A]_\alpha) = \{f_n(x) : x \in [A]_\alpha\} \quad (n \geq 1); \\ [f(A)]_\alpha &= f([A]_\alpha) = \{f(x) : x \in [A]_\alpha\}. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу ограниченности (и даже компактности)  $[A]_\alpha$ , а также непрерывности  $f_n$  ( $n \geq 1$ ) и  $f$ , все множества  $[f_n(A)]_\alpha$  ( $n \geq 1$ ) и  $[f(A)]_\alpha$  также

ограничены. Вследствие теоремы 2 выпуклость нечеткого числа  $A$  влечет выпуклость нечетких чисел  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) и  $f(A)$ , а значит вследствие леммы 1 и выпуклость множеств  $[f_n(A)]_\alpha$  ( $n \geq 1$ ) и  $[f(A)]_\alpha$ . Далее, замкнутость (и даже компактность)  $[A]_\alpha$  в соответствии с леммой 1 означает замкнутость множеств  $[f_n(A)]_\alpha$  ( $n \geq 1$ ) и  $[f(A)]_\alpha$ . Таким образом, множества  $[f_n(A)]_\alpha$  ( $n \geq 1$ ) и  $[f(A)]_\alpha$  выпуклы, компактны, вследствие леммы 3 непусты, т.е. имеют вид замкнутых интервалов:

$$\begin{aligned} [f_n(A)]_\alpha &= [a_n; b_n], \quad n \geq 1; \\ [f(A)]_\alpha &= [a_0; b_0], \end{aligned} \quad (4)$$

включая случай одноточечных интервалов вида  $\{c\} = [c; c]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Благодаря равномерной на  $x \in [A]_\alpha$  сходимости  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  можем выбрать такое  $N \geq 1$ , что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, \quad x \in [A]_\alpha. \quad (5)$$

Поскольку множество  $[A]_\alpha$  непустой компакт, непрерывные отображения  $f$  и  $f_n$  ( $n \geq 1$ ) вследствие теоремы Вейерштрасса (о функции, непрерывной на компакте) достигают на  $[A]_\alpha$  своих минимальных и максимальных значений. Таким образом, с соотношениями (3) и (4) имеем:

$$\begin{aligned} a_n &= \min_{x \in [A]_\alpha} f_n(x), \quad b_n = \max_{x \in [A]_\alpha} f_n(x) \quad (n \geq 1); \\ a_0 &= \min_{x \in [A]_\alpha} f(x), \quad b_0 = \max_{x \in [A]_\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Выберем  $x_n \in \mathbb{R}$  ( $n \geq N$ ) и  $x_0 \in \mathbb{R}$  такие, что  $f(x_n) = a_n$  ( $n \geq N$ ) и  $f(x_0) = a_0$  (отметим, что таких точек может быть много, так как функция может достигать минимума на нескольких значениях аргумента). С учетом выражения (5) получаем:

$$\begin{aligned} a_n &= f_n(x_n) \leq f_n(x_0) < f(x_0) + \varepsilon = a_0 + \varepsilon; \\ a_n &= f_n(x_n) > f(x_n) - \varepsilon \geq f(x_0) - \varepsilon = a_0 - \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует оценка

$$|a_n - a_0| < \varepsilon. \quad (6)$$

Аналогично для правого конца выберем  $\tilde{x}_n \in \mathbb{R}$  ( $n \geq N$ ) и  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$  такие, что  $f(\tilde{x}_n) = b_n$  ( $n \geq N$ ) и  $f(\tilde{x}_0) = b_0$ . С учетом выражения (5) получаем:

$$\begin{aligned} b_n &= f_n(\tilde{x}_n) \geq f_n(\tilde{x}_0) > f(\tilde{x}_0) - \varepsilon = b_0 - \varepsilon; \\ b_n &= f_n(\tilde{x}_n) < f(\tilde{x}_n) + \varepsilon \leq f(\tilde{x}_0) + \varepsilon = b_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует оценка

$$|b_n - b_0| < \varepsilon. \quad (7)$$

Из оценок (6) и (7) с учетом соотношения (2) следует оценка для расстояния Хаусдорфа между множествами уровня:

$$d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = d_H([a_n; b_n], [a_0; b_0]) < \varepsilon \quad (n \geq N).$$

Полученная оценка с учетом произвольности выбора  $\varepsilon > 0$  означает сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$ , что завершает доказательство теоремы.

**Пример 12.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta}, & |x| \leq \delta; \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

где  $\delta > 0$  (см. пример 10). Очевидно, нечеткое число  $A$  выпукло и все его множества уровня компактны:  $[A]_\alpha = [-\delta(1-\alpha); \delta(1-\alpha)]$  для всех  $\alpha \in (0; 1]$ .

Рассмотрим последовательность функций  $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ). Очевидно, что и  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = x^2$  равномерно на  $\text{supp } A = [-\delta; \delta]$ . Таким образом, условия теоремы 3 выполнены.

Непосредственно из (1) (см. также пример 10) найдем  $\mu_{A^2}(x)$  и  $\mu_{f_n(A)}(x)$ :

$$\mu_{A^2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{x}}{\delta}, & 0 \leq x \leq \delta^2; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > \delta^2. \end{cases} \quad \mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{x - \frac{1}{n}}}{\delta}, & \frac{1}{n} \leq x \leq \delta^2 + \frac{1}{n}; \\ 0, & x < \frac{1}{n} \text{ или } x > \delta^2 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Графики функций  $\mu_A$  и (схематично)  $\mu_{A^2}$  и  $\mu_{f_n(A)}$  приведены на рис. 6.

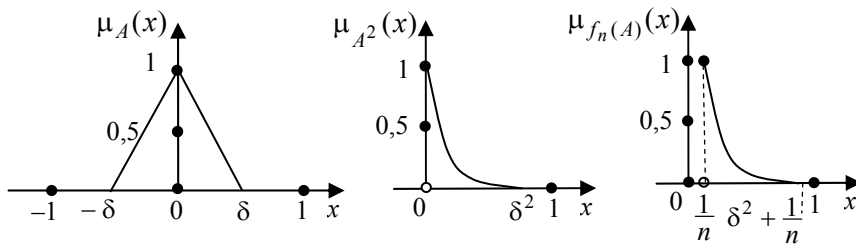


Рис. 6. Нечеткие числа  $A$ ,  $f_n(A)$  и  $A^2$

Множества уровня нечетких чисел  $f(A)$  и  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) имеют вид:

$$[f(A)]_\alpha = [0; 0 + \delta^2(1-\alpha)^2], \quad [f_n(A)]_\alpha = \left[ \frac{1}{n}; \frac{1}{n} + \delta^2(1-\alpha)^2 \right], \quad \alpha \in (0; 1].$$

Используя соотношение (2), немедленно получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \alpha \in (0; 1],$$

что соответствует утверждению теоремы 3.

Заметим, что поточечная сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$  выполняется для  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(0) = 0$ ,  $\mu_{f(A)}(0) = 1$ .

Следующий пример показывает, что условие локально равномерной на  $\text{supp } A$  сходимости  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  является в теореме 3 существенным.

**Пример 1.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\delta^2}, & |x| \leq \delta; \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

где  $\delta > 0$ . Очевидно, нечеткое число  $A$  выпукло и все его множества уровня компактны:  $[A]_\alpha = [-\delta\sqrt{1-\alpha}; \delta\sqrt{1-\alpha}]$  для всех  $\alpha \in (0; 1]$ .

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} a \left( 1 - \left| \frac{nx}{\delta} - 1 \right| \right), & |x| \leq \frac{2\delta}{n}; \\ 0, & |x| > \frac{2\delta}{n}; \end{cases} \quad (n \geq 1),$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta}, & |x| \leq \delta; \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

где  $a$  и  $\delta$  — положительные константы. Графики  $\mu_A(x)$  (схематично) и отображения  $f_n(x)$  при  $n = 2$  показаны на рис. 7.

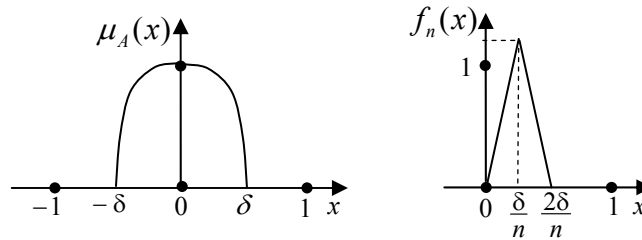


Рис. 7. Нечеткое число  $A$  и отображение  $f_n$

Легко видеть, что выполняется поточечная сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0$  для каждого  $x \in \mathbb{R}$ , однако равномерной сходимости

нет ни на одном интервале вида  $[0; \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ), так как  $f_n\left(\frac{\delta}{n}\right) = a$  при любом  $n \geq 1$  (достаточно выбрать  $n > \frac{\delta}{\varepsilon}$ ).

Непосредственно из соотношения (1) найдем  $\mu_{f(A)}(x)$  и  $\mu_{f_n(A)}(x)$ :

$$\mu_{f(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0; \end{cases}$$



$$\mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{n^2 a^2}, & 0 \leq x \leq a; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > a. \end{cases}$$

График  $\mu_{f_n(A)}(x)$  (схематично) изображен на рис. 8.

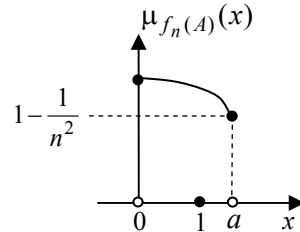


Рис. 8. Нечеткое число  $f_n(A)$

Множества уровня нечетких чисел  $f(A)$  и  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) имеют вид:

$$[f(A)]_\alpha = \{0\}, [f_n(A)]_\alpha = [0; \min(a, na\sqrt{1-\alpha})], \alpha \in (0; 1].$$

В соответствии с соотношением (2), допуская одноточечный интервал  $\{0\} = [0; 0]$ , имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \min(a, na\sqrt{1-\alpha}), \alpha \in (0; 1],$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$  лишь для  $\alpha = 1$ .

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > a, \end{cases}$  т.е. поточечная сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$  выполняется лишь для  $x = 0$ .

Следующий простой пример показывает, что условие непрерывности функций  $f_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) и  $f(x)$  является в теореме 3 существенным.

**Пример 14.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta}, & |x| \leq \delta; \\ 0, & |x| > \delta, \end{cases}$$

где  $\delta > 0$  (см. примеры 10 и 12). Очевидно, нечеткое число  $A$  выпукло и все его множества уровня компактны:  $[A]_\alpha = [-\delta(1-\alpha); \delta(1-\alpha)]$  для всех  $\alpha \in (0; 1]$ .

Рассмотрим последовательность отображений  $f_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) и  $f(x)$

$$f_n(x) = \begin{cases} a, & x \geq \frac{\delta}{n}; \\ 0, & x < \frac{\delta}{n}, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} a, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где  $a$  — положительная константа. Очевидно, для каждого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется поточечная, и даже равномерная на  $\mathbb{R}$  сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Непосредственно с соотношения (1) найдем  $\mu_{f_n(A)}(x)$  ( $n \geq 1$ ) и  $\mu_{f(A)}(x)$ :

$$\mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & x = a, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \notin \{0, a\}; \end{cases} \quad \mu_{f(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0, a\}, \\ 0, & x \notin \{0, a\}. \end{cases}$$

Множества уровня нечетких чисел  $f(A)$  и  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) имеют вид:

$$[f(A)]_\alpha = \{0, a\} \quad (\alpha \in (0; 1]), \quad [f_n(A)]_\alpha = \begin{cases} \{0, a\}, & 0 < \alpha \leq 1 - \frac{1}{n}; \\ \{0\}, & \alpha > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

По определению расстояния Хаусдорфа:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\{0, a\}, \{0, a\}) = 0, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\{0\}, \{0, a\}) = a \neq 0,$$

т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$  для  $0 < \alpha < 1$ , но не для  $\alpha = 1$ . Заметим, что поточечная (и даже равномерная на  $\mathbb{R}$ ) сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$  выполняется для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Приведенные примеры показывают, что поточечная сходимость функций принадлежности  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n(A)}(x) = \mu_{f(A)}(x)$  и сходимость множеств уровня  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$  в общем случае логически не связаны. Так, в примере 12 выполняется сходимость множеств уровня, но нет поточечной сходимости; в примере 14 выполняется поточечная сходимость функций принадлежности, но нет сходимости множеств уровня (не для всех  $\alpha$ ); в примере 1 нет ни поточечной сходимости функций принадлежности, ни сходимости множеств уровня. Любопытно отметить, что в примере 14, ввиду отсутствия непрерывности  $f_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) и  $f(x)$ , не выполняются условия не только теоремы 3, но и теоремы 2, что привело к потере выпуклости у нечетких чисел  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) и  $f(A)$ .

### Сходимость функциональной последовательности с нечетким аргументом по метрике пространства нечетких чисел

Пусть, как и выше  $0, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ) — последовательность непрерывных отображений,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , где  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, непрерывная на  $\mathbb{R}$ ;  $A$  — выпуклое полунепрерывное сверху нечеткое число с ограниченными множествами уровня.

Сходимость последовательности нечетких чисел удобно исследовать с помощью функции  $\rho(A, B) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H(A_\alpha, B_\alpha)$ , где  $A$  и  $B$  — нечеткие нормальные числа. Известно [6, 7], что  $\rho$  — метрика в пространстве выпуклых полунепрерывных сверху нормальных нечетких чисел с ограниченным носителем.

**Теорема 4.** Пусть  $A$  – выпуклое нечеткое число, все множества уровня которого компактны;  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  равномерно на  $\text{supp } A$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n(A), f(A)) = 0$ .

**Доказательство.** Поскольку условия теоремы 3 выполняются для каждого  $0 < \alpha \leq 1$ , можем воспользоваться результатами доказательства теоремы 3. Так, для каждого  $0 < \alpha \leq 1$  множества уровня  $[f_n(A)]_\alpha$  ( $n \geq 1$ ) и  $[f(A)]_\alpha$  имеют вид замкнутых интервалов, включая случай одноточечных интервалов вида  $\{c\} = [c; c]$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Далее зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . В силу равномерной на  $x \in \text{supp } A$  сходимости  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  можем выбрать такое  $N \geq 1$ , что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } n \geq N, x \in \text{supp } A. \quad (8)$$

В ходе доказательства теоремы 3 показано, что из (8) следует оценка

$$d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) < \varepsilon \quad (n \geq N), \quad (9)$$

причем, поскольку (8) выполняется для всех  $x \in \text{supp } A$ , неравенство (9) выполняется для всех  $0 < \alpha \leq 1$ . Таким образом,

$$\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) < \varepsilon$$

для всех  $n \geq N$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n(A), f(A)) = 0$ , что завершает доказательство.

**Пример 15.** Рассмотрим нечеткое число  $A$  с функцией принадлежности  $\mu_A(x) = e^{-x^2}$  и последовательность функций ( $n \geq 1$ )

$$f_n(x) = \begin{cases} a \left( 1 - \frac{|x-n|}{\delta} \right), & |x-n| \leq \delta; \\ 0, & |x-n| > \delta, \end{cases}$$

где  $a$  и  $\delta$  — положительные константы. Графики (схематично) функции принадлежности  $\mu_A(x)$  и функции  $f_n(x)$  изображены на рис. 9. Очевидно, для каждого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется поточечная, и даже локально равномерная, но не равномерная на  $\mathbb{R}$  сходимость  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ . Непосредственно из равенства (1) найдем  $\mu_{f_n(A)}$  (рис. 9) и:

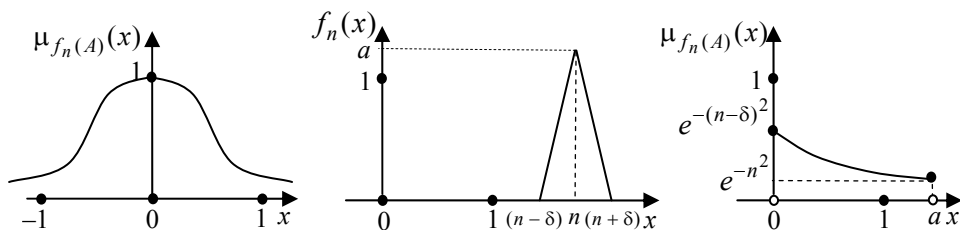


Рис. 9. Графики  $\mu_A$ ,  $f_n$  и  $\mu_{f_n(A)}$

$$\mu_{f_n(A)}(x) = \begin{cases} e^{-(n - (1-\frac{x}{a})\delta)^2}, & x \in (0; a]; \\ 1, & x = 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > a. \end{cases} \quad \mu_{f(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

Заметим, что  $[f_n(A)]_\alpha = \{0\}$  при  $\alpha \geq e^{-(n-\delta)^2}$  и  $[f_n(A)]_\alpha = [0; a]$  при  $\alpha < e^{-n^2}$ . Также очевидно, что  $[f(A)]_\alpha = \{0\}$  при всех  $0 < \alpha \leq 1$ . Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, \{0\}) = 0$  при каждом  $0 < \alpha \leq 1$ , что соответствует теореме 3, однако  $\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = a \neq 0$ .

Таким образом, требование равномерной на  $x \in \text{supp } A$  сходимости  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  в теореме 4 существенно.

## ВЫВОДЫ

1. Для функциональной последовательности  $f_n(x)$   $n \geq 1$ , локально равномерно сходящейся к  $f(x)$ , и нечеткого аргумента  $A$  представлены достаточные условия сходимости множеств уровня нечетких чисел  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ). При этом дифференцируемость отображений  $f_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) не требуется.

2. При выполнении дополнительного условия равномерной на  $\text{supp } A$  сходимости  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  последовательность нечетких чисел  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) сходится к  $f(A)$  в топологии расстояния  $\rho(A, B) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H(A_\alpha, B_\alpha)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
2. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. — М.: Мир, 1976. — 176 с.
3. Mizumoto M. Algebraic Properties of Fuzzy Numbers / M. Mizumoto, K. Tanaka // Proceedings of IEEE International Conference on Cybernetics and Society. — 1976. — P. 559–563.
4. Delgado M. Fuzzy numbers, definitions and properties / M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila // Mathware & Soft Computing 1. — 1994. — N 1 (1). — P. 31–43.
5. Dubois D. Fuzzy Real Algebra: Some Results / D. Dubois, H. Prade // Fuzzy Sets and Systems. — 1979. — N 4 (2). — P. 327–348.
6. Inaida J. Taylor Series on the Fuzzy Number Space // Special Issue on Biometrics And Its Applications. — 2010. — N 16 (1). — P. 15–25.
7. Tripathy B.C. On Convergence of Series of Fuzzy Real Numbers / B.C. Tripathy, P.C. Das // Kuwait Journal of Science & Engineering. — 2012. — N 39 (1A). — P. 57–70.
8. Спекторский И.Я. Последовательности функций и ряды Тейлора с нечетким аргументом / И.Я. Спекторский // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2014. — № 2. — С. 125–140.
9. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
10. Кадец В.М. Курс функционального анализа / В.М. Кадец. — Х.: Харьк. нац.ун-т имени В. Каразина, 2006. — 607 с.

Поступила 10.05.2019

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,  
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ  
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,  
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 519.004.942

**Розрахунок щільності енергії та щільності спіну гравітаційних хвиль Місяця у прямолінійних координатах / Мацукі Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 7–17.**

Розраховано щільність енергії та щільність спіну гравітаційних хвиль Місяця у прямолінійній системі координат тяжіння на поверхні Місяця та глобальної температури Землі. Розглянуто принцип дії, що поєднує гравітаційне поле та гравітаційні хвилі, які утворюють замкнену систему разом із глобальною температурою Землі. Розраховано значення щільності енергії розрахованих енергетичних полів та хвиль як дисперсію у прямолінійних координатах, а також розраховано їхні коефіцієнти та стандартні похибки розрахованих коефіцієнтів. Результати розрахунків узгоджуються з результатами попереднього дослідження, яке демонструє негативний вплив гравітаційних хвиль на глобальну температуру Землі, у той час як гравітаційне поле впливає на неї позитивно. Розраховано також спін гравітаційних хвиль Місяця у прямолінійній системі координат. Табл.: 1. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 519.004.942

**Расчет плотности энергии и плотности спина гравитационных волн Луны в прямолинейных координатах / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 7–17.**

Рассчитано плотность энергии и плотность спина гравитационных волн Луны в прямолинейной системе координат притяжения на поверхности Луны и глобальной температуры Земли. Рассмотрен принцип действия, соединяющий гравитационное поле и гравитационные волны, образующие замкнутую систему, вместе с глобальной температурой Земли. Рассчитано значение плотности энергии этих энергетических полей и волн, которые рассчитывались как дисперсии в прямолинейных координатах, а также рассчитаны их коэффициенты и стандартные погрешности рассчитанных коэффициентов. Результаты расчетов согласовываются с результатами предыдущего исследования, которое показывает негативное влияние гравитационных волн на глобальную температуру Земли, в то время как гравитационное поле влияет на нее положительно. Рассчитан также спин гравитационных волн Луны в прямолинейной системе координат. Табл.: 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 303.732.4

**Исследование и прогнозирование успешности стартапов платформы kickstarter / Кузнецова Н.В., Грушко Я.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 18–32.**

Основная цель исследования, проведенного в работе, — выявление и прогнозирование успешности новых проектов-стартапов. Решена задача прогнозирования факта успешности того или иного стартапа, применены различные методы интеллектуального анализа данных, такие как методы экстремального градиентного бустинга и  $k$ -ближайших соседей, которые позволили с высокой точностью предсказать успешность проекта, а самым эффективным оказался метод экстремального градиентного бустинга. Применение моделей выживания позволило оценить среднее время работы над успешным стартапом и определить ключевые отрасли, для которых стартапы становятся эффективными; спрогнозировав для каждого из них необходимое время работы для воплощения прогрессивной идеи в успешный бизнес. Опре-

делены наиболее успешные категории проектов-стартапов и спрогнозировано время, необходимое как в целом для достижения успешности (выживания) проектов, так и для отдельных категорий проектов. Для этого построены модели выживания на основе пропорциональных рисков Кокса и модели Каплан–Майера. Рис.: 12. Табл.: 3. Библиогр.: 15 назв.

UDC 303.732.4

**Research and prediction of the startups' success on kickstarter platform / Kuznietsova N.V., Grushko Ya.V.** // *System Research and Information Technologies*. — 2019. — № 3. — P. 18–32.

The main purpose of the study, carried out in the work, was to identify and predict the success of new start-up projects. The task of predicting the success of one or another startup was solved, various methods of data analysis, such as methods of extreme gradient boosting and k-nearest neighbors, were used. They allowed to predict with high precision the success of the project, and the method of extreme gradient boosting was the most effective. The use of survival models allowed us to estimate the average time spent working on a successful startup, as well as identify those key industries for which startups become effective, predicting for each of them the required time to turn a progressive idea into a successful business. The most successful categories of start-up projects were also identified, and the time required to achieve the success (survival) of projects as a whole and for specific project categories was predicted. For this purpose, survival models were constructed on the basis of Cox proportional risks and Kaplan-Meyer models. Figs: 12. Tables: 3. Refs: 15 titles.

---

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ  
ИНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ  
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF  
INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION  
MAKING SUPPORT

УДК 683.519

**Использование рекуррентной нейронной сети для автоматической диагностики рака легких / Чапалюк Б.В., Зайченко Ю.П.** // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2019. — № 3. — С. 33–40.

Рак легких является одним из наиболее агрессивных и быстро прогрессирующих онкологических заболеваний, приводящим к смерти большого количества людей по всему миру. Одним из основным методов борьбы с раком является выявление его на наиболее ранней стадии. Построение автоматических систем диагностирования рака легких может помочь врачам в этом. Рассмотрена возможность построения рекуррентной нейронной сети для анализа КТ изображений легких пациентов. Описана построенная нейронная сеть, состоящая из сверточной нейронной сети, рекуррентной нейронной сети и дополнительного механизма внимания, который дает возможность переиспользовать предварительно аннотированную информацию о злокачественных областях на КТ снимке. Рис.:1. Табл.: 1. Библиогр.: 16 назв.

UDC 683.519

**Recurrent neural network usage for computer-aided lung cancer detection system / Chapaliuk B.V., Zaychenko Yu.P.** // *System Research and Information Technologies*. — 2019. — № 3. — P. 33–40.

The lung cancer is one of the most aggressive types of a cancer, which is the cause of the massive number of deaths worldwide. One of the methods to prevent the lung cancer death is to detect it on the earliest possible stage. Building an automated lung cancer detection system can help doctors with it. In the scope of this article we consider building a recurrent neural network, which can analyze lung CT scans. As a result, we have built a neural network, which consists of a convolution neural network, a recurrent neural net-

work and an addition attention mechanism, which allows to reuse predefined information about possible malignant sections on the CT scan. Figs: 1. Tables: 1. Refs: 16 titles.

---

УДК 530.1.007:575+577

**До теорії систем: швидкий огляд особливостей понять в концептуальному полі / Коляда В.П.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 41–54.

Із системної точки зору зроблено спробу виявити найбільш зручне логіко-семантичне понятійне визначення для системних понять зі збереженням максимально можливої сумісності на теоретичній площині, яка дає змогу звести системи будь-якого масштабу та складності в єдину стратегію інтерпретації їх динаміки. Установлено спеціальні семантичні уточнення для понять, які формують теоретичну основу, і тим самим конкретизовані фундаментальні системоформувальні процеси. Виділено безпосередню зв'язність деяких термінів, показано тонкощі у відмінностях таких системних понять, їх роль у формуванні єдиного системного теоретичного уявлення, наведено деякі приклади біохімічного типу. Запропоновано явне семантичне уточнення деяких понять, що характеризують динаміку систем та станів. Рис.: 2. Бібліогр.: 10 назв.

УДК 530.1.007:575+577

**К теории систем: краткий обзор особенностей понятий в концептуальном поле / Коляда В.П.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 41–54.

С системной точки зрения сделана попытка обнаружить наиболее подходящее логико-семантическое понятийное определение для системных понятий, сохраняя максимально допустимую совместимость на теоретической плоскости, позволяющую свести системы любого масштаба и сложности к единой стратегии в интерпретации их динамики. Установлены специальные семантические уточнения для понятий, образующих теоретическое основание и тем самым конкретизированы фундаментальные системообразующие процессы. Выделена непосредственная связанность определенных терминов, показаны тонкости в различии таких системных понятий, их роль в формировании единого системного теоретического представления, приведены некоторые примеры биохимического типа. Предложено явное семантическое уточнение некоторых понятий, описывающих динамику систем и состояний. Рис.: 2. Библиогр.: 10 назв.

---

УДК 004.9:504.064

**Система поддержки принятия решений для оценки состояния воздуха при неточных входных данных / Криваковская Р.В.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 55–62.

Рассмотрен вопрос проектирования структуры системы поддержки принятия решений для оценки состояния атмосферного воздуха при неточных входных данных, а также методологию построения информационных систем, их преимущества и недостатки при применении к вопросу проектирования системы поддержки принятия решений для оценки состояния атмосферного воздуха при неточных входных данных. Исследованы потоки данных и на их основе предложена соответствующая диаграмма и структура системы в целом. Рассмотрено построение базы моделей как части сложной системы, различные вопросы функционирования системы, такие, как организация обмена данными, определения условий применимости и верификация моделей, синхронизация работы различных частей системы. Рис.: 6. Библиогр.: 6 назв.

UDC 004.9:504.064

**Decision support system for assessing the state of atmospheric air under inaccurate input data / Kryvakovska R.V.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 55–62.

The article deals with the design of a decision support system structure for assessing the state of atmospheric air under inaccurate input data. The methodologies of constructing information systems, their advantages and disadvantages when applying to the design of a decision support system are considered. The data streams are investigated and the corresponding diagram is proposed on the basis of them. The structure of the system as a whole is proposed, as well as the construction of a model base as the part of a complex system. Different questions related to functioning of the system are considered such as the organization of the data exchange, definition of conditions of applicability and verification of models, synchronization of work of various parts of the system. Figs.: 6. Refs: 6 titles.

---

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ, ОПТИМАЛЬНЕ  
УПРАВЛІННЯ І ТЕОРІЯ ІГОР

METHODS OF OPTIMIZATION, OPTIMUM  
CONTROL AND THEORY OF GAMES

УДК 004.852; 004.942

**Игровые стратегии принятия решений в иерархических системах. I. Математическая модель стохастической игры / Кравец П.А.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 63–75.

Разработана математическая модель стохастической игры для принятия решений в иерархических системах в условиях неопределенности. Суть игры состоит в выравнивании чистых стратегий игроков для достижения консенсусного или мажоритарного коллективного решения. Выполнена параметризация игровой модели для обособления автократической, анархической и демократической иерархических структур систем принятия решений. Разработан марковский рекуррентный метод решения стохастической игры на основе стохастической аппроксимации условия дополняющей нежесткости. Рис.: 1. Библиогр.: 30 назв.

UDC 004.852; 004.942

**Game strategies for decision making in hierarchical systems. I. Mathematical model of stochastic game / Kravets P.A.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 63–75.

A mathematical model of a stochastic game for decision making in hierarchical systems under uncertainty conditions is developed. The essence of the game consists in aligning the players' pure strategies to achieve a consensus or a majoritarian collective solution. The parameterization of the game model for the separation of the autocratic, anarchic, and democratic hierarchical structures of decision-making systems is carried out. A Markov recurrent method for solving a stochastic game based on a stochastic approximation of the complementary slackness condition has been developed. Figs: 1. Refs: 30 titles.

---

УДК 519.715

**Методология построения основных метрик Q-анализа и их применения / Полуцыганова В.И., Смирнов С.А.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 76–88.

Исследование сложных систем требует использования различных методов, которые должны предоставлять полезную информацию для обеспечения эффективно-го управления. Использование Q-анализа дает возможность углубиться в структуру системы и понять сложную взаимосвязь между её компонентами. В ходе исследования введено такие понятия, как структурное дерево, локальные карты и иерархия наследования, которые позволяют лучше осознать смысл метрик системы, полученных с помощью Q-анализа. На этой основе разработаны алгоритмы для определения основных метрик и применены к банковской системе Украины по состоянию на



2016 г. Предложена интерпретация полученных результатов и описано их практическое значение. Рис.:4. Табл.: 2. Библиогр.: 10 назв.

UDC 519.715

**Methodology for building the basic metrics of  $Q$ -analysis and their application / Polutsyhanova V.I., Smirnov S.A.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 76–88.

The study of complex systems requires the use of various methods, which should provide useful information to ensure effective management. Using  $Q$ -analysis makes it possible to delve into the structure of the system and understand the complex relationship between its components. In the course of the study, concepts such as a structural tree, local maps, and the inheritance hierarchy were introduced, which make it possible to better understand the meaning of the system metrics obtained by  $Q$ -analysis. Then, on this basis, algorithms were developed to determine the basic metrics. They were applied to the banking system of Ukraine as of 2016. An interpretation of the results is proposed and their practical significance is described. Figs: 4. Tables: 2. Refs: 10 titles.

---

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І  
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ  
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,  
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR  
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 62.50

**Метод автоматизації управління у когнітивних картах на основі синтезу приростів вагових коефіцієнтів і координат вершин / Романенко В.Д., Мілявський Ю.Л.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 89–99.

Розглянуто розв'язання проблеми автоматизації керування імпульсними процесами в когнітивних картах складних систем шляхом синтезу закону керування на основі варіювання координат вершин когнітивних карт і вагових коефіцієнтів під час формування керувань у замкненій системі керування. Як приклад розглянуто застосування розроблених алгоритмів для керування якістю підготовки персоналу ІТ компанії, модель якої показано у вигляді когнітивної карти. Рис. 2. Бібліогр.: 4 назви.

UDC 62.50

**Control automation method in cognitive maps based on the synthesis of increments of weighting coefficients and nodes coordinates / Romanenko V.D., Milyavsky Yu.L.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3 — P. 89–99.

A solution to the problem of control automation of impulse processes in cognitive maps of complex systems is considered. The problem is solved by means of synthesizing the control law based on varying nodes coordinates of a cognitive map and weighting coefficients while generating controls in a closed-loop control system. As an example, we consider applying the suggested algorithms for managing the quality of human resources in IT company, while its model is presented in the CM form. Figs.: 2. Refs: 4 titles.

---

УДК 519.8

**Алгоритми наближеного розв'язання багатостадійних Flow-Shop-Problem / Зак Ю.О.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 100–109.

Побудова багатостадійних розкладів виконання завдань на розташованих в послідовний ланцюжок системах машин має багато практичних застосувань у календарному плануванні дискретного виробництва. Отримано оцінки нижньої межі критерію ефективності для оптимальної послідовності виконання завдань і два алгоритми наближеного розв'язання проблеми, що забезпечують виконання всіх робіт на всіх стадіях оброблення в найкоротші терміни. Алгоритми розв'язання про-

ілюстровано числовим прикладом. Наведено оцінки складності запропонованих алгоритмів. Алгоритми розв'язання задачі можуть бути використані в календарному плануванні дрібно- та середньосерійного дискретного виробництва. Табл.: 4. Библиогр.: 10 назв.

UDC 519.8

**Algorithms for approximate multi-stage Flow-Shop-Problem solution / Zack Yu.O.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 100–109.

The construction of multi-stage schedules for performing tasks on machines located in a sequential chain has many practical applications in discrete-production scheduling. Estimates are obtained for the lower bound of the performance criterion for the optimal sequence of tasks and 2 algorithms for approximate problem solving, ensuring that all work is performed at all stages of processing in the shortest possible time. The algorithms of the solution are illustrated by a numerical example. The estimates of the complexity of the proposed algorithms are given. The given algorithms for solving the problem can be used in the scheduling of the small- and medium-sized discrete production. Tables: 4. Refs: 10 titles.

---

УДК 539.3

**Математическое моделирование напряженного состояния ортотропного пьезоэлектрического материала со сфероидальной полостью под внутренним давлением / Кирилюк В.С., Левчук О.И., Гавриленко Е.В., Сукач М.К.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 110–117.

На основе математического моделирования исследовано напряженное состояние ортотропного электроупругого пространства со сфероидальной полостью под внутренним давлением. Решение задачи получено с помощью использования обобщенного на случай ортотропного пьезоэлектрического материала метода эквивалентного включения Эшелби и интегрального представления функции Грина для ортотропной электроупругого пространства. Тестирование алгоритма решения задачи на частном случае (для трансверсально-изотропного электроупругого материала со сфероидальной полостью) подтверждает его эффективность. Проведены численные исследования напряженного состояния в ортотропном электроупругом материале с полостью под внутренним давлением, выявлены характерные закономерности распределения напряжений. Рис.: 2. Библиогр.: 18 назв.

UDC 539.3

**Mathematical modeling of the stress state of an orthotropic piezoelectric material with a spheroidal cavity under internal pressure / Kirilyuk V.S., Levchuk O.I., Gavrilenko O.V., Sukach M.K.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 110–117.

On the basis of mathematical modeling, the stress state of an orthotropic electroelastic space with a spheroidal cavity under internal pressure is investigated. The solution of the problem is obtained by using the Eshelby equivalent method, generalized to the case of an orthotropic piezoelectric material, and the integral representation of the Green's function for an orthotropic electroelastic space. Testing of the algorithm for solving the problem for a special case (for a transversely isotropic electrical-elastic material with a spheroidal cavity) confirms its effectiveness. The numerical studies of the stress state in an orthotropic electroelastic material with a cavity under internal pressure were carried out, characteristic patterns of the stress distribution were found. Figs.: 2. Refs: 18 titles.

---

УДК 517.956+519.63

**Збіжність ітерацій у формулі Троттера–Далецького для нелінійного збурення / Бондаренко В.Г., Маркевич І.С.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 118–125.

Запропоновано й обґрунтовано ітераційний метод побудови розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з нелінійним потенціалом (рівняння типу «реакція–дифузія»). Основою методу є узагальнена для нелінійного збурення еліптичного оператора формула Троттера–Далецького. Суть узагальнення — композиція півгрупи еліптичного генератора і фазового потоку, породженого звичайним диференціальним рівнянням. Установлені під час доведення цієї формули оцінки швидкості збіжності ітерацій підтверджені обчислювальним експериментом, виконаним для рівняння Колмогорова–Петровського–Піскунова–Фішера. Отримані результати дозволяють припустити доцільність нетрадиційного підходу до моделювання динамічних систем з розподіленими параметрами. Як приклад розглянуто модель просторово-часової динаміки водного співтовариства в термінах системи «хижак–жертва». Рис.: 4. Бібліогр.: 13 назв.

UDC 517.956+519.63

**On the convergence of iterations in the Trotter–Daletsky formula for nonlinear perturbation / Bondarenko V.G., Markevych I.S.** // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 118–125.

An iterative method for constructing a solution to the Cauchy problem for a parabolic equation with a nonlinear potential («reaction–diffusion» type equation) is proposed and substantiated. The method is based on the Trotter–Daletsky formula that is generalized for a nonlinear perturbation of an elliptic operator. The essence of the generalization is the composition of the semigroup of an elliptic generator and the phase flow generated by an ordinary differential equation. The estimates of the rate of convergence of iterations established in the proof of this formula were confirmed by the computational experiment performed for the Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov–Fisher equation. The obtained results suggest the feasibility of an unconventional approach to the modeling of dynamic systems with distributed parameters. A model of the space-time dynamics of the water community in terms of the two-species «predator–prey» system was shown as an example. Figs.: 4. Refs:13 titles.

УДК 519.6

**Функціональні послідовності з нечітким аргументом: збіжність множин рівня / Спекторський І.Я.** // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 3. — С. 126–140.

Основним об'єктом розгляду є функціональні послідовності  $f_n(A)$  з опуклим півнеперервним згори нечітким числом  $A$  як аргумент; припускається наявною збіжність  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  рівномірно на кожному замкненому інтервалі всередині носія  $\text{supp } A$ . Запропоновано достатні умови збіжності  $f_n(A)$  у сенсі збіжності послідовності множин рівня  $[f_n(A)]_\alpha$  за метрикою Хаусдорфа  $d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha)$ : доведено збіжність  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$  для кожного значення  $0 < \alpha \leq 1$  за умови неперервності відображень  $f_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) і  $f(x)$ , без припущення про існування похідних. Також доведено збіжність послідовності  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) за метрикою простору нечітких чисел  $\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha)$  за додаткової умови рівномірної на всьому  $\text{supp } A$  збіжності послідовності  $f_n(A)$ ; у цьому випадку для забезпечення скінченності відстані Хаусдорфа для всіх  $0 < \alpha \leq 1$  нечітке число  $A$  вважається нормальним. Рис.: 9. Бібліогр.: 10 назв.

UDC 519.6

**Functional sequences with fuzzy argument: convergence of level sets / Sectorsky I.Ya.**  
// System Research and Information Technologies. — 2019. — № 3. — P. 126–140.

The main consideration subject is functional sequences  $f_n(A)$  with convex upper semicontinuous fuzzy number  $A$  for argument; it is supposed that  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , and this convergence is uniform on each closed interval within  $\text{supp } A$ . The paper proposes sufficient conditions for  $f_n(A)$  to converge in the sense that a sequence of level sets  $[f_n(A)]_\alpha$  converges with respect to Hausdorff distance  $d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha)$ . It is proved that:  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha) = 0$  for each  $0 < \alpha \leq 1$  assuming continuity of  $f_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) and  $f(x)$ , without the assumption about an existence of a derivative. Also, it is proved that a sequence  $f_n(A)$  ( $n \geq 1$ ) converges with respect to distance  $\rho(f_n(A), f(A)) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} d_H([f_n(A)]_\alpha, [f(A)]_\alpha)$  in the space of fuzzy sets, additionally assuming that  $f_n(A)$  converges uniformly on the whole  $\text{supp } A$ . In this case, for the sake of finiteness of Hausdorff distance for all  $0 < \alpha \leq 1$ , fuzzy set  $A$  is supposed to be normal. Fig.: 9. Refs.: 10 titles.

---

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Бідюк Петро Іванович,**

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Бондаренко Віктор Григорович,**

професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Гавриленко Олена Валеріївна,**

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Грушко Ярослав Володимирович,**

студент ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Зайченко Юрій Петрович,**

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Зак Юрій Олександрович,**

доктор технічних наук, науковий експерт і консультант, Німеччина, Аахен

**Кирилюк Віталій Семенович,**

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, Київ

**Коляда Володимир Петрович,**

інженер технічної підтримки компанії «Digital Services Ukraine», Україна, Київ

**Кравець Петро Олексійович,**

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних систем та мереж Національного університету «Львівська політехніка», Україна, Львів

**Криваковська Регіна Володимирівна,**

програміст «Mama Products» Ltd., Україна, Київ

**Кузнєцова Наталія Володимирівна,**

доктор технічних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Левчук Ольга Іванівна,**

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, Київ

**Маркевич Ігор Сергійович,**

бакалавр ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Мацукі Йошіо,**

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Мілявський Юрій Леонідович,**

кандидат технічних наук, старший викладач кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Романенко Віктор Демидович,**

професор, доктор технічних наук, заступник директора з науково-педагогічної роботи ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Полуциганова Вікторія Ігорівна,**

аспірант, асистент кафедри інформаційної безпеки Фізико-технічного інституту КПІ ім. І. Сікорського, Україна, Київ

**Смирнов Сергій Анатолійович,**

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційної безпеки Фізико-технічного інституту КПІ ім. І. Сікорського, Україна, Київ

**Спекторський Ігор Якович,**

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

**Сукач Михайло Кузьмич,**

професор, доктор технічних наук, професор кафедри будівельних машин Київського національного університету будівництва і архітектури МОН України, Київ

**Чапалюк Богдан Володимирович,**

аспірант кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ