

M. Gordiyenko, PhD-student

# THE PROBLEM OF SMALL DENOMINATORS AND CONDITIONS OF APPLYING ASYMPTOTIC KRYLOV-BOGOLYUBOV-MITROPOLSKY TECHNIQUE

*The connection between the classical problem of small denominators and conditions for the right side functions of weakly nonlinear differential equations describing the oscillatory motions to which the Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky technique may be applied to construct asymptotic solutions are analyzed.*

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, викл.,  
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський,  
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Кам'янець-Подільський державний університет, Кам'янець-Подільський

## ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

*Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в кусково-однорідному суцільному циліндрі.*

**ВСТУП.** Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкості її межі, наявності в неї кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1, 3, 18, 19, 22].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7, 8, 20, 21].

Окрім методу відокремлення змінних [23], одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються, або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [4-6, 11, 13-15, 17].

Гіперболічні крайові задачі в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях розглянуто у працях [9, 10, 12]. У цій статті ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному суцільному циліндрі.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.** Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z); t > 0; r \in (0; R), R < +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (I_{j-1}; I_j), I_0 \geq 0; I_k < I_{k+1}; I_{n+1} \equiv l < +\infty \right\} \quad 2\pi - \text{періодичного}$$

щодо кутової змінної  $\varphi$  розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [23]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[ a_j^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad z \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); \quad z \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=I_0} = g_0(t, r, \varphi); \quad \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, r, \varphi), \quad (3)$$

$$u_j|_{r=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{r=R} = \theta_j(t, \varphi, z); \quad z \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (4)$$

та умовами спряження [17]

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=I_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де  $a_{ij}$ ,  $a_{zj}$ ,  $\chi_j$ ,  $\alpha_{js}^k$ ,  $\beta_{js}^k$ ,  $h$  – деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} c_{2k} > 0; \quad |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0; \quad |\alpha_{22}^{n+1}| + |\beta_{22}^{n+1}| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\}; \quad g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\};$$

$$\theta(t, \varphi, z) = \{\theta_1(t, \varphi, z), \theta_2(t, \varphi, z), \dots, \theta_{n+1}(t, \varphi, z)\} \quad g_0(t, r, \varphi), g_i(t, r, \varphi) - \text{задані обмежені неперервні функції};$$

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\} - \text{шукана функція}.$$

**ОСНОВНА ЧАСТИНА.** Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 17, 24].

До задачі (1)–(5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної  $\varphi$  [23]:

$$F_m[g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \equiv g_m, \quad (6)$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m e^{im\varphi} \right) \equiv g(\varphi), \quad (7)$$

$$F_m \left[ \frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \quad (8)$$

де  $\operatorname{Re}(\dots)$  – дійсна частина виразу  $(\dots)$  щодо  $\varphi$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ;  $\varepsilon_k = 2$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $i$  – уявна одиниця

Інтегральний оператор Фур'є  $F_m$  за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D' = \{(t, r, z); t > 0; r \in (0; R); z \in K_n^+\}$  розв'язку диференціальних рівнянь В-гіперболічного типу [18]

$$\frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial t^2} - \left[ a_{ij}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm} + \chi_j^2 u_{jm} = f_{jm}(t, r, z); \quad z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (9)$$

з початковими умовами

$$u_{jm}|_{t=0} = g_{jm}^1(r, z); \quad \frac{\partial u_{jm}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jm}^2(r, z); \quad z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (10)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m} \Big|_{z=l_0} = g_{0m}(t, r); \quad \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,m} \Big|_{z=l} = g_{lm}(t, r), \quad (11)$$

$$u_{jm}|_{r=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} + h \right) u_{jm} \Big|_{r=R} = \theta_{jm}(t, z); \quad z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (12)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_{km} - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1,m} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}. \quad (13)$$

До задачі (9)–(13) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Ганкеля 1-го роду щодо радіальної змінної  $r$  [16]:

$$H_v[g(r)] = \int_0^R g(r) J_v(\beta_k r) r dr \equiv g_k, \quad (14)$$

$$H_v^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{J_v(\beta_k r)}{\|J_v(\beta_k r)\|^2} \equiv g(r), \quad (15)$$

$$H_v \left[ \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{v^2}{r^2} g \right] = -\beta_k^2 g + R J_v(\beta_k R) \left( \frac{dg}{dr} + hg \right) \Big|_{r=R}, \quad (16)$$

де  $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$  – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

Бесселя 1-го роду  $\left( \frac{v}{R} + h \right) J_v(\beta R) - \beta J_{v-1}(\beta R) = 0$ , які утворюють дискретний спектр, а квадрат норми спектральної

функції  $\|J_v(\beta_k r)\|^2 \equiv \int_0^R J_v^2(\beta_k r) r dr = \left( \frac{R^2}{2} \right) \left[ J_v^2(\beta_k R) - 2v(\beta_k R)^{-1} J_v(\beta_k R) J_{v+1}(\beta_k R) + J_{v+1}^2(\beta_k R) \right]$ .

Інтегральний оператор  $H_m$  за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (9)–(1) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D'' = \{(t, z); t > 0; z \in K_n^+\}$  розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u_{jmk}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 u_{jmk}}{\partial z^2} + (a_{ij}^2 \beta_k^2 + \chi_j^2) u_{jm} = F_{jmk}(t, z); \quad z \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (17)$$

з початковими умовами

$$u_{jmk}|_{t=0} = g_{jmk}^1(z); \quad \frac{\partial u_{jmk}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jmk}^2(z); \quad z \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (18)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_{1mk} \Big|_{z=l_0} = g_{0mk}(t); \quad \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,mk} \Big|_{z=l} = g_{lmk}(t), \quad (19)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^p \right) u_{pmk} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,mk} \right] \Big|_{z=l_p} = 0; \quad j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n}, \quad (20)$$

де

$$F_{jmk}(t, z) = f_{jmk}(t, z) + a_{\eta}^2 R J_m(\beta_k R) \theta_{jm}(t, z); \quad j = \overline{1, n+1}.$$

До задачі (17)–(20) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[l_0; l]$  з  $n$  точками спряження щодо змінної  $z$  [17]:

$$F_{sn}[g(z)] = \int_{l_0}^l g(z) V(z, \lambda_s) \sigma(z) dz \equiv g_s, \quad (21)$$

$$F_{sn}^{-1}[g_s] = \sum_{s=1}^{\infty} g \frac{V(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \equiv g(z), \quad (22)$$

$$F_{sn} \left[ \sum_{i=1}^{n+1} a_{zi}^2 \theta(z-l_{i-1}) \theta(l_i-z) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\lambda_s^2 g_s - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z) V_i(z, \lambda_s) \sigma_i dz - \\ - a_{z1}^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_s) \left( \alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g \right) \Big|_{z=l_0} + a_{z,n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g \right) \Big|_{z=l}. \quad (23)$$

У формулах (21)–(23) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_s) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_s) \theta(z-l_{i-1}) \theta(l_i-z); \quad \sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \theta(z-l_{i-1}) \theta(z-l_i); \quad \sigma_k = \frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2} \prod_{m=k}^n c_{1m} c_{2m}; \quad k = \overline{1, n}; \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{z,n+1}};$$

$$V_m(z, \lambda_s) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{i+1,s} G_m(z, \lambda_s); \quad m = \overline{1, n}; \quad V_{n+1}(z, \lambda_s) = \omega_{n2}(\lambda_s) \cos(q_{n+1,s} z) - \omega_{n1}(\lambda_s) \sin(q_{n+1,s} z);$$

$$G_m(z, \lambda_s) = \omega_{m-1,2}(\lambda_s) \cos(q_{ms} z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_s) \sin(q_{ms} z); \quad \|V(z, \lambda_s)\|^2 = \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_s) \sigma(z) dz = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} V_k^2(z, \lambda_s) \sigma_k dz;$$

$$q_j \equiv q_j(\lambda) = a_{z,0}^{-1} (\lambda^2 + k_j^2)^{1/2}; \quad q_{js} = q_j(\lambda_s); \quad v_{ip}^{k1}(q_{js} l_m) = -\alpha_{ip}^k q_{js} \sin(q_{js} l_m) + \beta_{ip}^k \cos(q_{js} l_m);$$

$$v_{ip}^{k2}(q_{js} l_m) = \alpha_{ip}^k q_{js} \cos(q_{js} l_m) + \beta_{ip}^k \sin(q_{js} l_m); \quad \omega_{01}(\lambda_s) = v_{11}^{01}(q_{1s} l_0); \quad \omega_{02}(\lambda_s) = v_{11}^{02}(q_{1s} l_0);$$

$$\psi_{pm}^k(x, y) = v_{11}^{kp}(x) v_{22}^{km}(y) - v_{21}^{kp}(x) v_{12}^{km}(y); \quad \omega_{pm}(\lambda_s) = \omega_{p-1,2}(\lambda_s) \psi_{1m}^p(q_{ps} l_p, q_{p+1,s} l_p) - \omega_{p-1,1}(\lambda_s) \psi_{2m}^p(q_{ps} l_p, q_{p+1,s} l_p);$$

де  $\lambda_s$  – корені трансцендентного рівняння  $\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l) \omega_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l) \omega_{n2}(\lambda) = 0$ , які утворюють дискретний спектр.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (17) та початкові умови (18) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r1}^2 \beta_k^2 + \chi_1^2 \right) u_{1mk} \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r2}^2 \beta_k^2 + \chi_2^2 \right) u_{2mk} \\ \dots \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r,n+1}^2 \beta_k^2 + \chi_{n+1}^2 \right) u_{n+1,mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1mk}(t, z) \\ F_{2mk}(t, z) \\ \dots \\ F_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1mk}(t, z) \\ u_{2mk}(t, z) \\ \dots \\ u_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1mk}^1(z) \\ g_{2mk}^1(z) \\ \dots \\ g_{n+1,mk}^1(z) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_{1mk}(t, z) \\ u_{2mk}(t, z) \\ \dots \\ u_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1mk}^2(z) \\ g_{2mk}^2(z) \\ \dots \\ g_{n+1,mk}^2(z) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Інтегральний оператор  $F_{sn}$ , який діє за правилом (21), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{sn}[\dots] = \left[ \int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_s) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_s) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^l \dots V_{n+1}(z, \lambda_s) \sigma_{n+1} dz \right] \quad (26)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25). Внаслідок тотожності (23) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left( \frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + a_{\eta}^2 \beta_k^2 + \chi_j^2 + k_j^2 \right) u_{jms} = \\ = \sum_{j=1}^{n+1} F_{jms}(t) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_s) g_{0mk}(t) + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) g_{lmk}(t), \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} u_{j m k s}(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} g_{j m k s}^1, \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} u_{j m k s}(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} g_{j m k s}^2, \quad (28)$$

Де

$$u_{j m k s}(t) = \int_{I_{j-1}}^{I_j} u_{j m k}(t, z) V_j(z, \lambda_s) \sigma_j dz; j = \overline{1, n+1}; F_{j m k s}(t) = \int_{I_{j-1}}^{I_j} F_{j m k}(t, z) V_j(z, \lambda_s) \sigma_j dz; j = \overline{1, n+1};$$

$$g_{j m k s}^1 = \int_{I_{j-1}}^{I_j} g_{j m k}^1(z) V_j(z, \lambda_s) \sigma_j dz; j = \overline{1, n+1}; g_{j m k s}^2 = \int_{I_{j-1}}^{I_j} g_{j m k}^2(z) V_j(z, \lambda_s) \sigma_j dz; j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що  $\max_{1 \leq j \leq n+1} \{a_{ij}^2, \beta_k^2 + \chi_j^2\} = a_{r1}^2 \beta_k^2 + \chi_1^2$  і покладемо всюди

$k^2 = (a_{r1}^2 \beta_k^2 + \chi_1^2) - (a_{ij}^2 \beta_k^2 + \chi_j^2); j = \overline{1, n+1}$ . Задача Коші (27), (28) набуває вигляду

$$\frac{d^2 u_{m k s}(t)}{dt^2} + \Delta^2(\beta_k, \lambda_s) u_{m k s}(t) = F_{m k s}(t) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(I_0, \lambda_s) g_{0 m k}(t) + \sigma_{n+1} a_{z, n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(I, \lambda_s) g_{l m k}(t), \quad (29)$$

$$u_{m k s}(t) \Big|_{t=0} = g_{m k s}^1, \frac{du_{m k s}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = g_{m k s}^2, \quad (30)$$

Де

$$u_{m k s}(t) = \sum_{j=1}^{n+1} u_{j m k s}(t), \Delta^2(\beta_k, \lambda_s) = \lambda_s^2 + a_{r1}^2 \beta_k^2 + \chi_1^2, F_{m k s}(t) = \sum_{j=1}^{n+1} F_{j m k s}(t), g_{m k s}^1 = \sum_{j=1}^{n+1} g_{j m k s}^1, g_{m k s}^2 = \sum_{j=1}^{n+1} g_{j m k s}^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (29), (30) є функція

$$u_{m k s}(t) = \frac{\sin(\Delta(\beta_k, \lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k, \lambda_s)} g_{m k s}^2 + \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\beta_k, \lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k, \lambda_s)} g_{m k s}^1 \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\beta_k, \lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\beta_k, \lambda_s)} \left[ F_{m k s}(\tau) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(I_0, \lambda_s) \times \right. \\ \left. \times g_{0 m k}(\tau) + \sigma_{n+1} a_{z, n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(I, \lambda_s) g_{l m k}(\tau) \right] d\tau. \quad (31)$$

Оскільки суперпозиція операторів  $F_{sn}$  та  $F_{sn}^{-1}$  є одиничним оператором, то оператор  $F_{sn}^{-1}$  зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{sn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента  $[u_{m k s}(t)]$ , де функція  $u_{m k s}(t)$  визначена формулою (31). Одержуємо єдиний розв'язок задачі (17)-(20):

$$u_{j m k}(t, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin(\Delta(\beta_k, \lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k, \lambda_s)} g_{m k s}^2 + \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\beta_k, \lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k, \lambda_s)} g_{m k s}^1 \right] \frac{V_j(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\beta_k, \lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\beta_k, \lambda_s)} \times \right. \\ \left. \times \left[ F_{m k s}(\tau) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(I_0, \lambda_s) g_{0 m k}(\tau) + \sigma_{n+1} a_{z, n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(I, \lambda_s) g_{l m k}(\tau) \right] d\tau \right\} \frac{V_j(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2}; j = \overline{1, n+1}. \quad (33)$$

Застосували послідовно до функцій  $u_{i m k}(t, z)$ , визначених формулами (33), обернені оператори  $H_m^{-1}$  за та  $F_m^{-1}$ , одержуємо функції

$$u_j(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{I_{k-1}}^{I_k} E_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{I_{k-1}}^{I_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{I_{k-1}}^{I_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\ + \int_0^t \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ W_j^0(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z) g_0(\tau, \rho, \alpha) + W_j'(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z) g_l(\tau, \rho, \alpha) \right] \rho d\alpha d\rho d\tau + \\ + a_{ij}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_{I_{k-1}}^{I_k} W_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi-\alpha, z, \xi) \theta_k(\tau, \alpha, \xi) \sigma_k d\xi d\alpha d\tau; j = \overline{1, n+1}, \quad (34)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)-(5).

У формулах (34) застосовано компоненти  $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m E_{jk, m}(t, r, \rho, z, \xi) \cos(m\varphi)$  матриці впливу (функції впливу), компоненти  $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, r, \rho, \varphi, z, I_0)$  нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна),

компоненти  $W_j'(t, r, \rho, \varphi, z) = \sigma_{n+1} a_{z, n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{j, n+1}(t, r, \rho, \varphi, z, l)$  верхньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна) та компоненти  $W_{jk}(t, r, \varphi, z, \xi) = RE_{jk}(t, r, R, \varphi, z, \xi)$  радіальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі, де

$$E_{jk, m}(t, r, \rho, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\Delta(\beta_p, \lambda_s)t)}{\Delta(\beta_p, \lambda_s)} \frac{J_m(\beta_p r) J_m(\beta_p \rho)}{\|J_m(\beta_p r)\|^2} \frac{V_j(z, \lambda_s) V_k(\xi, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2}; j, k = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу  $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$  і функцій Гріна  $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z)$ ,  $W_j'(t, r, \rho, \varphi, z)$ ,  $W_{jk}(t, r, \varphi, z, \xi)$  безпосередньо перевіряється, що функції  $u_j(t, r, \varphi, z)$ , визначені формулами (34), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [25].

Єдиність розв'язку (34) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу та функцій Гріна).

Можна довести [2], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)–(5), узагальнений розв'язок (34) буде також її класичним розв'язком.

**Зауваження 1.** У випадку  $a_{ij} = a_{ji} \equiv a_j > 0$  формули (34) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному суцільному циліндрі.

**Зауваження 2.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  дають можливість виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях  $z = l_0, z = l$  крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 1–3, ..., 3–3).

**Зауваження 3.** Параметр  $h$  дає можливість виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні  $r = R$  крайової умови 1-го та 2-го роду.

**Зауваження 4.** Аналіз розв'язку (34) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(t, r, \varphi, z), g_j^1(r, \varphi, z), g_j^2(r, \varphi, z), g_0(t, r, \varphi), g_j(t, r, \varphi), \theta_j(t, \varphi, z)$  проводиться безпосередньо.

**ВИСНОВКИ.** Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.
2. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз., 1958.
3. Городецкий В.В. Граничные свойства гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1998.
4. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарные задачи теплопроводности в кусково-однородных просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2009.
5. Громик А.П., Конет І.М. Стационарные задачи теплопроводности в кусково-однородных просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2008.
6. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однородних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2011.
7. Дейнека В.С. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
8. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992.
9. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 93-108.
10. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т.7. – С. 71-92.
11. Конет І.М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2007.
12. Конет І.М., Ленюк М.П. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11). – Чернівці: Прут, 2011. – С. 5-17.
13. Конет І.М., Ленюк М.П. Стационарные температурные поля в цилиндрично-круговых областях. – Чернівці : Прут, 2001. – 312 с.
14. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці : Прут, 2004.
15. Конет І.М. Стационарные та нестационарные температурные поля в ортотропных сферических областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.
16. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – К., 1983. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Институт математики; 83.18).
17. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропных областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997.
18. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці : Прут, 2003.
19. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957.
20. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984.
21. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
22. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
24. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат., 1956.
25. Шиллов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шиллов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 02.01.13

А. Громик, канд. техн. наук, препод., И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф.

#### ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

*Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений построены точные аналитические решения гиперболических краевых задач в кусочно-однородном сплошном цилиндре.*

A. Gromyk PhD (eng), I. Konet, Full Doctor

#### HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE HOMOGENEOUS SOLID CYLINDER

*By means the method of integral transforms in combination with the method of principal solutions the exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems in piecewise homogeneous solid cylinder are obtained*