

G. Verovkina, PhD, Ass. Prof.

THE INTERPOLATION REPRESENTATION OF SOME KINDS OF RANDOM PROCESSES

Paper deals with some interpolation representations of some random processes with no equidistance knots interpolations.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, викл.,
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Кам'янець-Подільський державний університет, Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

ВСТУП. Прикладні задачі сучасної теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6, 7, 17, 18].

Для досить широкого класу крайових задач в кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються, або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3–5, 10, 12–14, 16].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях одержано у працях [8, 9, 11]. У цій статті, яка є логічним продовженням [2], ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z); t > 0; r \in (R_0; R), R_0 > 0, R < +\infty; \varphi \in [0; 2\pi); z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (I_{j-1}; I_j), I_0 \geq 0; I_k < I_{k+1}; I_{n+1} \equiv l < \infty\} \quad 2\pi -$$

періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{ij}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початково-крайовими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, r, \varphi); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, r, \varphi), \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h_1 \right) u_j \Big|_{r=R_0} = \theta_j^1(t, \varphi, z); \left(\frac{\partial}{\partial z} + h_2 \right) u_j \Big|_{r=R} = \theta_j^2(t, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = \overline{1, 2}; k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де $a_{ij}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k, h$ – деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} c_{2k} > 0; |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0; |\alpha_{22}^{n+1}| + |\beta_{22}^{n+1}| \neq 0; f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z)\}; g^2(r, \varphi, z) = \{g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z)\};$$

$$\theta^1(t, \varphi, z) = \{\theta_1^1(t, \varphi, z), \theta_2^1(t, \varphi, z), \dots, \theta_{n+1}^1(t, \varphi, z)\}; \theta^2(t, \varphi, z) = \{\theta_1^2(t, \varphi, z), \theta_2^2(t, \varphi, z), \dots, \theta_{n+1}^2(t, \varphi, z)\};$$

$g_0(t, r, \varphi), g_l(t, r, \varphi)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$ – шукана функція.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ. Вважаємо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних перетворень [19, 15, 16].

Побудований за методикою, розвинутою у [2] для суцільного циліндра, методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є щодо кутової φ [19], скінченного інтегрального перетворення Ганкеля 2-го роду щодо радіальної змінної r [15] та скінченного інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження щодо змінної z [16], єдиний обмежений розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)–(5) визначають функції

© Громик А., Конет І., 2013

$$\begin{aligned}
u_j(t, r, \varphi, z) = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
& + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
& + \int_0^t \int_0^R \int_0^{2\pi} [W_j^0(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) g_0(\tau, \rho, \alpha) + W_j^1(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) g_1(\tau, \rho, \alpha)] \rho d\alpha d\rho d\tau + \\
& + a_{\eta}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^R \int_{l_{k-1}}^{l_k} [W_{jk}^1(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) \theta_k^1(\tau, \alpha, \xi) + W_{jk}^2(t - \tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) \theta_k^2(\tau, \alpha, \xi)] \sigma_k d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1},
\end{aligned} \quad (6)$$

У формулах (6) застосовано компоненти $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m E_{jk,m}(t, r, \rho, z, \xi) \cos(m\varphi)$ матриці впливу (функції впливу), $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, r, \rho, \varphi, z, l_0)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), $W_j^1(t, r, \rho, \varphi, z) = \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{j,n+1}(t, r, \rho, \varphi, z, l)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), $W_{jk}^1(t, r, \varphi, z, \xi) = R_0 E_{jk}(t, r, R_0, \varphi, z, \xi)$ лівої радіальної матриці Гріна та компоненти $W_{jk}^2(t, r, \varphi, z, \xi) = R E_{jk}(t, r, R, \varphi, z, \xi)$ правої радіальної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t, r, \rho, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\Delta(\beta_p, \lambda_s) t)}{\Delta(\beta_p, \lambda_s)} \frac{f_{m,0}(\beta_p r, \beta_p R)}{\|f_m(\beta_p r, \beta_p R)\|^2} \frac{V_j(z, \lambda_s) V_k(\xi, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2}; \quad j, k = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z)$, $W_j^1(t, r, \rho, \varphi, z)$, $W_{jk}^s(t, r, \varphi, z, \xi)$, ($s = 1, 2$), безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (6), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [20].

Єдиність розв'язку (6) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу та функцій Гріна).

Можна довести [1], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)–(5), узагальнений розв'язок (6) буде також її класичним обмеженням розв'язком.

Зауваження 1. У випадку $a_{\eta} = a_{z_j} \equiv a_j > 0$ формули (6) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному порожнистому циліндрі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (6) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 1–3, ..., 3–3).

Зауваження 3. Параметри h_1, h_2 дає можливість виділяти із формул (6) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $r = R_0, r = R$ крайової умови 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 2–1, 2–2).

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (6) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $\theta_j^1(t, \varphi, z)$, $\theta_j^2(t, \varphi, z)$, $g_0(t, r, \varphi)$, $g_1(t, r, \varphi)$ проводиться безпосередньо.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному порожнистому циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гельфанд І.М., Шиллов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз., 1958.2. Громик А.П., Конет І.М. Гіперболічна крайова задача в кусково-однорідному суцільному циліндрі // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2013. – Вип. 29. 3. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2011. 4. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2009. 5. Громик А.П., Конет І.М. Стационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2008. 6. Дейнека В.С. Сергиенко І.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. 7. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. 8. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 93–108. 9. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т.7. – С. 71–92. 10. Конет І.М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2007. 11. Конет І.М., Ленюк М.П. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11). – Чернівці: Прут, 2011. – С. 5–17. 12. Конет І.М., Ленюк М.П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці : Прут, 2001. – 312 с. 13. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці : Прут, 2004. 14. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. 15. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – К., 1983. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Институт математики; 83.18). 16. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских куско-

во-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 17. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. 18. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. 19. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат., 1956. 20. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 15.04.13

А. Громик, канд. техн. наук, препод.,
И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений построены точные аналитические решения гиперболических краевых задач в кусочно-однородном полом цилиндре.

A. Gromyk, PhD (eng) I. Konet, Full Doctor

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE HOMOGENEOUS POROŽNISTOMU CYLINDER

The method of integral transforms in combination with the method of principal solutions the exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems in piecewise homogeneous hollow cylinder.

УДК 519.21

В. Васькович, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: v.v.vaskovych@gmail.com

ЦІНИ АЗІЙСЬКОГО ОПЦІОНУ ТА ЇХ ЗБІЖНІСТЬ ВІДНОСНО ПАРАМЕТРІВ

Розглянуто модель ринку цінних паперів і азійський опціон в ній. Враховано справедливу і об'єктивну ціну даного опціону і досліджено об'єктивну ціну на збіжність відносно параметрів та її порядок.

ВСТУП. Азійський опціон – це різновидність опціону, при якому ціна виконання залежить від середнього значення активу за період. Розглянемо модель ринку, в якій ціна активу в момент часу s дорівнює $x e^{us + \beta W_s}$, де $x > 0$, а W – вінерівський процес. Отже, прибуток від цього опціону в момент T визначається як $(Y - K)^+$, де Y – середнє дисконтоване значення ціни активу за період (це середнє ми будемо шукати як середнє арифметичне), а $K \geq 0$ – фіксована страйкова ціна, яка визначається в момент заключення контракту. Об'єктивною ціною в такому випадку буде математичне сподівання від нашого прибутку. Очевидно, що вона буде залежати від параметрів μ та β . З метою технічного спрощення далі всюди вважатимемо, що $x = 1$.

ЦІНА ОПЦІОНУ. Як зазначено вище об'єктивною ціною азійського опціону буде математичне сподівання від $(Y - K)^+$, де Y – випадкова величина, що дорівнює $Y = \frac{1}{T} \int_0^T e^{us + \beta W_s} ds$. Для того, щоб знайти справедливу ціну даного

азійського опціону, в Y потрібно μ замінити на $-\frac{\beta^2}{2}$, тобто знайти $E(X - K)^+$, де $X = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{\beta^2}{2}s + \beta W_s} ds$.

З [2] відомо, що щільність розподілу випадкової величини $\int_0^T e^{2\delta\eta s + 2\delta W_s} ds$ в точці $y > 0$ дорівнює

$$Q(y, \eta, \delta) = \frac{\sqrt{2} |\delta| (2\delta^2 y)^{\frac{\eta}{2\delta}}}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\eta^2 T}{2} - \frac{1}{4\delta^2 y}} m_{2\delta^2 T} \left(\frac{\eta}{2\delta} - \frac{1}{2}, \frac{1}{4\delta^2 y} \right), \quad \frac{\eta}{2\delta} > -1.$$

$$\text{Тут } m_y(x, z) = \frac{8z^2 \Gamma\left(x + \frac{3}{2}\right) e^{\frac{\pi^2}{4y}}}{\pi \sqrt{2\pi y}} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch}(2u) - \frac{u^2}{y}} M\left(-x, \frac{3}{2}, 2z \operatorname{sh}^2(u)\right) \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{\pi u}{y}\right) du,$$

$$\text{а функція } M(a, b, x) = 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a+1}{b+1}\right) \dots \left(\frac{a+k-1}{b+k-1}\right) \frac{x^k}{k!}.$$

Таким чином, щільність розподілу випадкової величини $\frac{1}{T} \int_0^T e^{us + \beta W_s} ds$ в точці $y > 0$ дорівнює

$$P(y, \mu, \beta) = Q\left(y, \frac{\mu}{\beta}, \frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{2} |\beta| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 T y}} \frac{\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi \sqrt{\pi T}} \times \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\operatorname{ch}(2u)}{\beta^2 T y} - \frac{2u^2}{\beta^2 T}} M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du \right), \quad \frac{\mu}{\beta^2} > -1.$$

Тоді знаходимо

$$E(Y - K)^+ = \int_K^\infty (y - K) \sqrt{2} |\beta| \left(\frac{\beta^2 T y}{2}\right)^{\frac{\mu}{\beta^2} - 2} e^{-\frac{\mu^2 T}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 T y}} \frac{\Gamma\left[\frac{\mu}{\beta^2} + 1\right] e^{\frac{\pi^2}{2\beta^2 T}}}{\pi \sqrt{\pi T}} \times \left(\int_0^\infty e^{-\frac{\operatorname{ch}(2u)}{\beta^2 T y} - \frac{2u^2}{\beta^2 T}} M\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\beta^2}, \frac{3}{2}, \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\beta^2 T y}\right) \operatorname{sh}(2u) \sin\left(\frac{2\pi u}{\beta^2 T}\right) du \right) dy.$$