

СИНТЕЗ ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ВІДОМОЮ АМПЛІТУДНО-ЧАСТОТНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

© Матвійчук Я., 2016

Показано обчислення коефіцієнтів передавальної функції лінійної системи із зосередженими постійними параметрами, що відтворює задану амплітудно-частотну характеристику, двома методами. Застосовано перетворення Гільберта для розрахунку фазо-частотної характеристики з мінімальною фазою. Методи порівняно на конкретному прикладі. Всі розрахунки виконано в системі MATLAB.

Ключові слова: передавальна функція, амплітудно-частотна характеристика, перетворення Гільберта.

Y. Matviychuk

Lviv Polytechnic National University

TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS FROM THE KNOWN FREQUENCY RESPONSE

© Matviychuk Y., 2016

The calculation of the coefficients of linear system transfer function with the lumped constant parameters which corresponds to the preset frequency response is present.

Calculation of the transfer function on a given frequency response is the optimization problem. Direct solution has multiextremal nonlinear optimization.

Hilbert transform is applied to calculate the minimum-phase phase response. Therefore, the optimization problem of calculating the coefficients of the transfer function has complex goal function with some restrictions.

An example of the synthesis transfer function of the order seven for a given frequency response of real parametric amplifier is present. We obtain repeatability of the frequency response of less than 3 %.

All calculations is made in the system MATLAB.

Key words: transfer function, frequency response, Hilbert transform.

Вступ

Нескладний розрахунок амплітудно-частотної характеристики за заданою передавальною функцією добре відомий. Зворотна задача значно складніша, передусім своєю неоднозначністю.

Задача синтезу передавальної функції за заданою амплітудно-частотною характеристикою $AFC(\omega)$ є практичною задачею теорії лінійних систем. Обмежимося дробово-раціональною передавальною функцією $W(p)$, що відповідає системам із зосередженими постійними параметрами. За визначенням

$$AFC(w) = |W(jw)| \equiv \left| \frac{\sum_{i=0}^N b_i \times (jw)^i}{\sum_{i=0}^N a_i \times (jw)^i} \right|, \quad (1)$$

де N – степінь передавальної функції.

З рівняння (1) можна обчислити в квадратичній метриці коефіцієнти $W(j\omega)$ за заданою $AFC(\omega)$ в дискретній області Ω :

$$\min_{\bar{a}, \bar{b}} \sum_{w \in \Omega} \left(\left| \frac{\sum_0^N b_i \times (jw)^i}{\sum_0^N a_i \times (jw)^i} - AFC(w) \right| \right)^2. \quad (2)$$

Оптимізація (2), крім найпростіших випадків, є нелінійною з багатоекстремальною функцією мети. Тому її практичне використання ускладнене.

Основна частина

Розглянемо інший підхід, що зводиться до оптимізаційної задачі з комплексною функцією мети.

Для заданої $AFC(\omega)$ формуємо фазо-частотну характеристику $FFC(\omega)$ з мінімальною фазою за допомогою відповідного дискретного перетворення Гільберта [1]

$$FFC(w) = \frac{1}{p} \sum_{x \in \Omega} \frac{\ln AFC(x)}{x - w} \quad (3)$$

та комплексну амплітудно-фазо-частотну характеристику $AFC(w) \times \exp(jFFC(w))$.

Якщо задано фазо-частотну характеристику, то її можна доповнити амплітудно-частотною також за допомогою відповідного дискретного перетворення [1]:

$$AFC(w) = \exp \left(-\frac{1}{p} \sum_{x \in \Omega} \frac{FFC(x)}{x - w} \right).$$

Для кожного значення ω повинно виконуватись

$$W(jw) = AFC(w) \times \exp(jFFC(w)). \quad (4)$$

Тому коефіцієнти передавальної функції знайдемо так:

$$\min_{\bar{a}, \bar{b}} \sum_{w \in \Omega} \left(\frac{\sum_0^N b_i \times (jw)^i}{\sum_0^N a_i \times (jw)^i} - W(jw) \right)^2. \quad (5)$$

Задача оптимізації (5) має комплексну функцію мети, завдяки чому гарантовано фазо-частотну характеристику з мінімальною фазою.

Щодо шуканої передавальної функції є деякі додаткові вимоги. Наприклад, вимога стійкості системи зводиться до необхідної умови додатності коефіцієнтів знаменника:

$$a_i > 0; \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (6)$$

Отже, задачі (2) і (5) повинні доповнюватись обмеженнями (6).

Порівняємо (2)–(6) і (5)–(6) на конкретному прикладі.

Приклад синтезу передавальної функції

Нехай треба знайти передавальну функцію підсилювача зі статті [2], амплітудно-частотна характеристика якого показана на рис. 1.

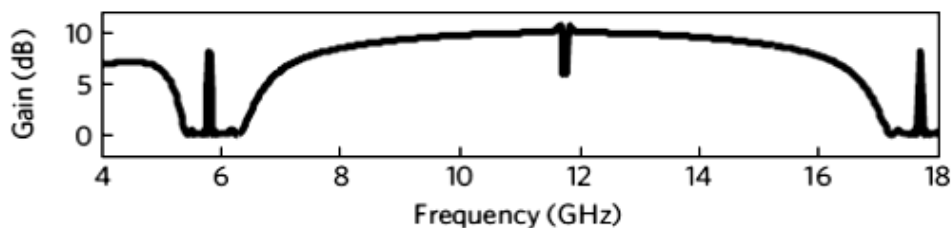


Рис. 1. Амплітудно-частотна характеристика $AFC(\omega)$ зі статті [2]

Всі розрахунки виконано в системі MATLAB-7.14. Етапи обчислень такі:

- здійснено дискретизацію спрощеного графіка $AFC(\omega)$ на рис. 1 в 1024 точках програмою GetData Graph Digitizer 2.26.0.20;
- перераховано підсилення з децибел у рази за формулою $m=10^{(n/20)}$, де m – підсилення, разів, n – підсилення, децибел, та пронормована частота з діапазону 6~17.5 GHz в діапазон 0.48~1.4 Hz;
- побудовано фазо-частотну характеристику з мінімальною фазою за формулою (3) за допомогою функції *hilbert* системи MATLAB;
- підібрано степінь передавальної функції $N=6$ за найменшим значенням критерію N^* (похибка відтворення $AFC(\omega)$) і знайдено коефіцієнти згідно з (2)–(6) та (5)–(6) за допомогою функції *fmincon* (початковий вектор одиничний);
- виконано денормування частоти в початковий діапазон з перерахунком значень коефіцієнтів і побудовано амплітудно-частотні характеристики за розрахованими коефіцієнтами передавальної функції за допомогою функції *bode*.

Коефіцієнти передавальних функцій, отримані згідно з (2)–(6) і (5)–(6) та впорядковані за спадними степенями p , наведено нижче:

$$\bar{b} = [7.4719\text{e-}65 \quad -6.3819\text{e-}53 \quad 8.8284\text{e-}43 \quad -8.5830\text{e-}31 \quad 1.7783\text{e-}21 \quad -1.1195\text{e-}9 \quad -1.5127];$$

$$\bar{a} = [1.8436\text{e-}65 \quad 1.5357\text{e-}53 \quad 3.4751\text{e-}43 \quad 2.1533\text{e-}31 \quad 1.6226\text{e-}34 \quad 2.1598\text{e-}10 \quad 1.0];$$

$$\bar{b} = [2.7823\text{e-}60 \quad 2.9684\text{e-}49 \quad 4.9284\text{e-}38 \quad 4.1414\text{e-}27 \quad 1.9960\text{e-}16 \quad 4.9822\text{e-}6 \quad 1.9173\text{e}5];$$

$$\bar{a} = [2.3289\text{e-}61 \quad 4.8550\text{e-}50 \quad 2.5702\text{e-}39 \quad 8.4422\text{e-}28 \quad 8.7697\text{e-}19 \quad 4.9588\text{e-}7 \quad 1.0].$$

На рис. 2 показано графіки заданої $AFC(\omega)$ (суцільна лінія) і модулів знайдених передавальних функцій (перервна та точкова лінії).

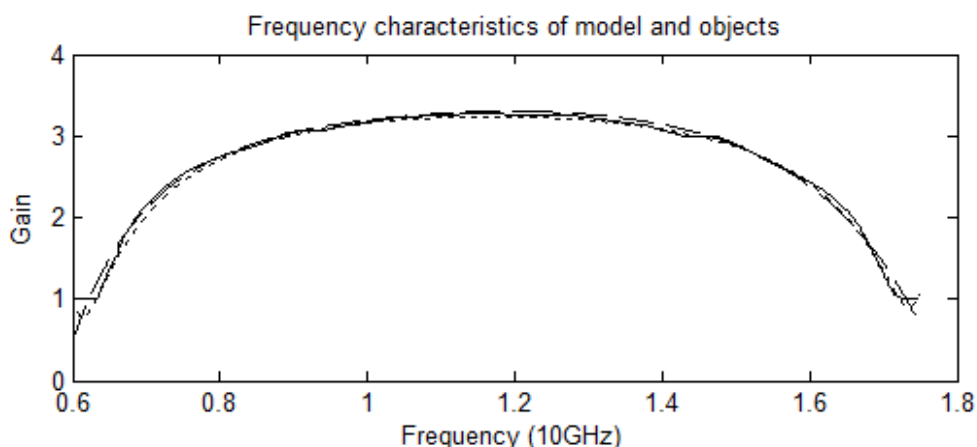


Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики оригіналу та моделі

Ітераційний пошук розв'язку (2)–(6) зійшовся за 243 ітерації, а (5)–(6) – за 169 ітерацій. Середні відносні похибки відтворення заданої частотної характеристики такі: 1.9 % для (2)–(6) (перервна лінія на рис. 2) та 2.6 % для (5)–(6) (точкова лінія).

Висновки

Методом (2)–(6) і (5)–(6) знайдено передавальні функції, модулі яких відтворили задану амплітудно-частотну характеристику $AFC(\omega)$ з практично однаковою точністю зі співмірними обсягами обчислень. Але відповідні фазо-частотні характеристики (ФЧХ), зображені на рис. 3, істотно різняться.

Суцільна лінія на рис. 3 показує $FFC(\omega)$ з мінімальною фазою, розрахованою перетворенням Гільберта (3). Аргумент передавальної функції, знайденої за (5)–(6), відстежує задану ФЧХ (точкова лінія на рис. 3). Але ФЧХ за (2)–(6) зовсім інша (перервна лінія).

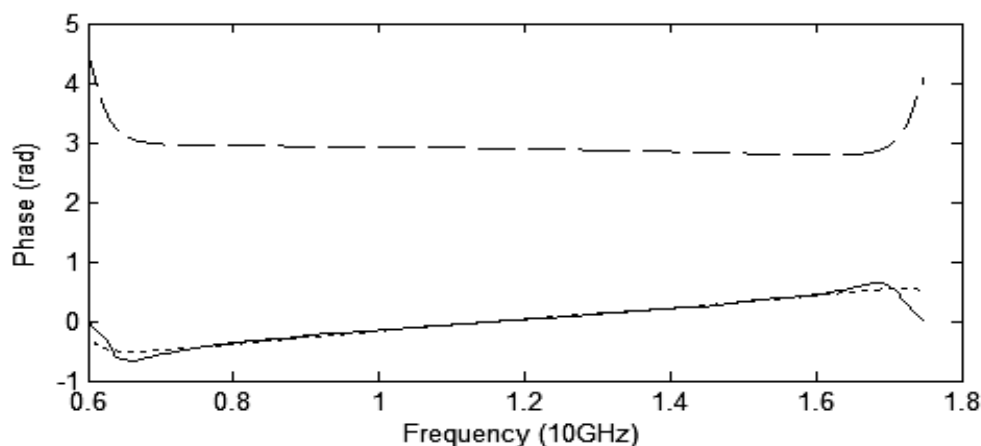


Рис. 3. Фазо-частотні характеристики

Отже, якщо треба контролювати не лише модуль, але й аргумент передавальної функції, то метод (5)–(6) є відповідним.

Текст програми та консультації можна отримати за адресою автора matv@ua.fm.

1. Матвійчук Я. М. Математичне макромодельовання динамічних систем: теорія та практика. Львів Вид. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. 215 с. URL: <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/22710>.
2. Byeong Ho Eom, Peter K. Day, Henry G. LeDuc and Jonas Zmuidzinas. A wideband, low-noise superconducting amplifier with high dynamic range // *NATURE PHYSICS*. Vol. 8. August 2012. P. 623–627.

References

1. Matviychuk Yaroslav, *Mathematical macromodelling of dynamic systems: theory and application*, Lviv, 2000. 215 p., (in ukrainian), <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/22710>.
2. Byeong Ho Eom, Peter K. Day, Henry G. LeDuc and Jonas Zmuidzinas, A wideband, low-noise superconducting amplifier with high dynamic range, *NATURE PHYSICS*, vol.8, august 2012, p. 623–627.