

REFERENCES

1. Brezis, H., Coron, J.M. and Nirenberg, L. (1980), "Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **33**, pp. 667-689.
2. Rabinowitz, P. (1967), "Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, no. 1, pp. 145-205.
3. Rudakov, I.A. (1984), "Nonlinear vibration of a string", *Vestnik Mosk. un-ta, Ser. 1. Matematika i mekhanika*, no. 2, pp. 9-13.
4. Veyvoda, O. and Shtedry, M. (1984), "The existence of periodic solutions of the classical wave equation. Contact number-theoretic nature of the period and the geometric properties of solutions", *Differentsialnyye uravneniya*, **XX**, no. 10, pp. 1733-1739.
5. Ptashnik, B.I. (1984), *Nekorrektnyye granichnyye zadachi dlya differentsialnykh uravneniy z chastnymi proizvodnymi* [Ill-posed boundary value problems for differential equations with partial derivatives], Naukova dumka, Kiev.
6. Ptashnyk, B.Y., Ilkiv, V.S., Kmit, I.Ya. and Polishchuk, V.M. (2002), *Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnykh pokhidnykh* [Nonlocal boundary value problems for partial differential equations], Naukova dumka, Kiyv.
7. Mitropolskiy, Yu.A., Khoma, G.P. and Gromyak, M.I. (1991), *Asimptoticheskiye metody issledovaniya kvazivolnovykh uravneniy giperbolicheskogo tipa* [Asymptotic methods of investigation of quasi-wave equations of hyperbolic type], Nauk. dumka, Kiev.
8. Khokhlova, L.H., Khoma, N.H. and Petrivskiy, Ya.B. (1995), "Trivial solutions homogeneous boundary periodic problem", *Volynskiy matem. visnyk*, issue 2, pp. 179-182.
9. Samoilenko, A.M., Khoma, N.H. and Khoma-Mohylska, S.H. (2010), "Properties 2π -periodic solutions of the boundary problem", *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 10, pp. 27-32.
10. Mytropolskiy, Yu.O. and Khoma-Mohylska, S.H. (2005), "Existence conditions of boundary periodic problem for linear inhomogeneous hyperbolic equations of second order. I", *Ukr. Mat. zhurn.*, **57**, no. 7, pp. 912-921.
11. Khartman, F. (1970), *Obyknovennyye differentsyalnyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow.

УДК 539.374

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор, Шевченко А. Г., аспирант

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Исследуется вопрос о локализации пластической деформации в форме образования шейки для материалов с площадкой текучести в условиях плоского напряженного состояния. Установлено, что длина шейки может быть конечной и определяется в зависимости от действующего в теле максимального напряжения, а также, верхнего и нижнего пределов текучести, которые характерны для диаграмм одноосного нагружения материала с площадкой текучести при жестком нагружении.

Ключевые слова: локализация пластической деформации, плоское напряженное состояние, шейкообразование, разрыв перемещений, дислокации, полосы Людерса-Чернова.

ЛОКАЛІЗАЦІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ НА ПЛОЩАДЦІ ТЕКУЧОСТІ В УМОВАХ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., професор, Шевченко А. Г., аспірант

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

Досліджується питання про локалізацію пластичної деформації у формі утворення шийки для матеріалів з площадкою текучості в умовах плоского напруженого стану. Встановлено, що довжина шийки може бути кінцевою і визначається залежно від діючого в тілі максимального напруження, а також, верхньої і нижньої меж текучості, які характерні для діаграм одноосного навантаження матеріалу з площадкою текучості при жорсткому навантаженні.

Ключові слова: локалізація пластичної деформації, плоский напружений стан, шийкоутворення, розрив переміщень, дислокації, смуги Людерса-Чернова.

LOCALIZATION OF PLASTIC DEFORMATION ON YIELD PLATFORM IN PLANE STRESS CONDITIONS

Chernyakov Y. A., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Shevchenko A. G., Graduate Student

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

artur_shev91@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

The problem of localization of plastic deformation in the form of a shear band has been well studied for plane strain cases and for plane stress. In [1] was shown that the localization band can have a limited length. In [2] is noted that angle-Chernoff Lüders lines is significantly different from the angle that can be observed in "compact" form samples for tensile test specimens of wide flat metal having a well-defined yield point. Such localization associated with formation of a neck, which leads to thinning of the plate in a direction parallel to the smallest dimension of the cross section

In this article investigates the possibility localization limited length neck in the infinite plate under tensile load. It differs from the case of plane strain described previously in [1]. With the plane stress should be allowed the opportunity to jump not only in shear, but also in the normal displacement component.

Plate material during hard loading (with deformation control) will be characterized by a diagram with a "peak-tooth" (OABCE curve) as shown in Fig.1. The stresses corresponding to points A and B will be called the upper and lower yield points, respectively.

The occurrence of the initial localization region, in the interpretation adopted here, is considered as a loss of stability "in the large" of the body under homogeneous strain conditions in the form of the formation localized plastic yielding band (like clap effect in the shell). When the lower yield stress plate can be in two states of equilibrium - in homogeneous elastic or elastic strip with localized plastic deformation, as shown in Fig. 1.

The occurrence of the initial localization is considered as a loss of stability "in the large" of homogeneous deformation of the body in the form of the localized plastic yield neck. When it has reached the lower yield stress the plate can be in two states of equilibrium - in homogeneous elastic or in elastic with localized plastic deformation, as shown in Fig. 2.

To solve this problem one can use the method of discontinuous gaps according to which localization of the neck can be represented as a set of dislocations with the corresponding Burgers vector [5]. The problem is reduced to two singular equations with the Cauchy kernel on a limited interval. Their solution exists under the condition of limited integrand. For the formulation an additional condition that will determine the length of localization area, notice that the deformation in the band should be limited to the value related to the length of yield area BC, since the above solution is valid only before the strain hardening reached area at point C.

These results demonstrates that for plates with clearly defined peak-tooth on the material diagram under uniaxial tensile conditions localized necking region has a finite length. Introducing the conditional band thickness which has the order of the grain size of the polycrystalline material, one can found the dependence of the neck length from the upper and lower yield point and current load.

Keywords: localization of plastic deformation, necking, dislocations, Luders-Chernof's bands.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о локализации пластической деформации в форме сдвига хорошо изучен как для случаев плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния. В работе [1] было

показано, что полоса локализации может иметь ограниченную длину. В работе [2] отмечается, что при испытаниях на растяжение широких плоских образцов из металлов, имеющих хорошо выраженный предел текучести, угол наклона линий Людерса-Чернова значительно отличается от угла, который можно наблюдать на образцах «компактной» формы. Таковую локализацию связывают с образованием шейки, то есть с утоньшением пластинки в направлении, параллельном наименьшему размеру сечения.

В настоящей работе анализируется возможность образования шейки ограниченной длины в бесконечной растянутой пластине.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечную пластинку, находящуюся в условиях однородного плоского напряженного состояния. Пластика подвержена одноосному растяжению. Материал пластинки при жестком нагружении (с контролем деформации) будем характеризовать диаграммой $\sigma_u \sim \varepsilon_u$ с «пиком-зубом» (кривая OABCE), показанной на рис. 1. Напряжения, отвечающие точкам A и B, будем называть верхним σ_u^{up} и нижним σ_u^{low} пределами текучести, соответственно.

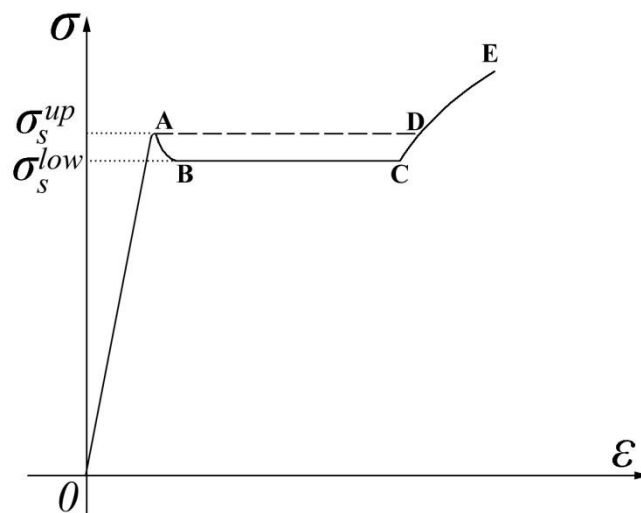


Рис. 1. Диаграмма материала

Возникновение начальной области локализации, в принятой здесь трактовке, рассматривается как потеря устойчивости «в большой» однородной деформации тела в форме образования локализованной полосы пластического течения (подобно эффекту хлопка в оболочке).

При достижении нижнего предела текучести σ_u^{low} пластинка может находиться в двух состояниях равновесия – в упругом однородном или в упругом с локализованной полосой пластической деформации, как показано на рис. 1.

Свяжем пластинку с декартовой системой координат Oxy и будем считать известными компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} .

Рассмотрим некоторую линию разрыва перемещений L . В отличие от случая плоской деформации, рассмотренного ранее в работе [1], при плоском напряженном состоянии следует допустить возможность скачка не только в сдвиговой, но и в нормальной составляющей перемещений. Подобный скачок приводит к резкому утоньшению («шейка») или утолщению («валик») пластинки вдоль линии разрыва. Такая линия является математической идеализацией наблюдаемого в опытах локального образования шейки.

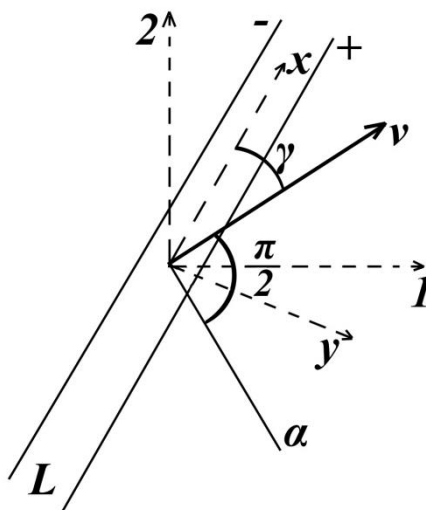


Рис. 2. Линия образования шейки в пластинке

Ориентация линии, вдоль которой имеет место скачок перемещений, связана определенными условиями с напряженным состоянием и в соответствии с [2] можем записать: $\sigma_2 = 0$, $\gamma = \arcsin \frac{1}{3} = 19^\circ 28'$, а $\psi = 54^\circ 44'$.

В пределах полосы разрыва перемещений действуют касательные и нормальные напряжения. Учитывая диаграмму $\sigma_s \sim \varepsilon_s$ (рис. 1), можно допустить, что на берегах полосы локализации на участке $|x| \leq l$ действуют нормальные и касательные напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_{low}$ и $\tau_{xy} = \tau_{low}$, а на участках $l \leq |x| \leq b$ значения σ_s^{low} , τ_s^{low} могут изменяться до σ_s^{up} , τ_s^{up} и напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_{up}$ и $\tau_{xy} = \tau_{up}$, удовлетворяющие условиям текучести Губера-Мизеса:

$$\sqrt{\sigma_{low}^2 + 3\tau_{low}^2} = \sigma_s^{low}, \quad \sqrt{\sigma_{up}^2 + 3\tau_{up}^2} = \sigma_s^{up}.$$

В дальнейшем примем

$$\frac{\sigma_{up}}{\sigma_{low}} = \frac{\tau_{up}}{\tau_{low}} = \frac{\sigma_s^{up}}{\sigma_s^{low}} = \alpha.$$

Рассмотрим кусочно-постоянную схему нагружения берегов полосы (рис. 3). Такая схема нагружения берегов полосы напоминает модель Леонова-Панасюка [3] и Дагдейла [4], но с тем существенным отличием, что напряжения в пределах полосы не равны нулю.

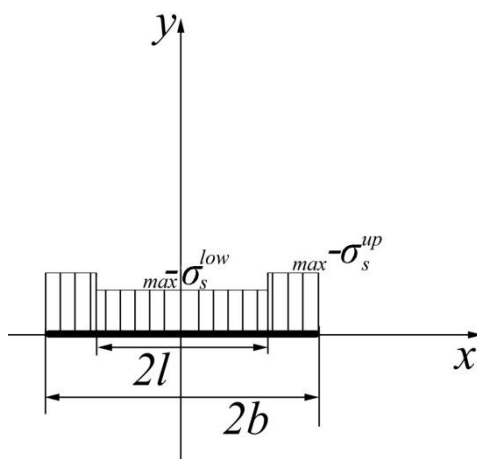


Рис. 3

Требуется определить длины l и b , определяющие размеры полосы разрыва.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи воспользуемся методом разрывных смещений, по которому локализацию в виде шейки представим в виде некоторой совокупности дислокаций, с соответствующим вектором Бюргерса b_0 .

Известно [5], что разрыв смещений в начале координат, в пределах малого отрезка $d\xi$ в точке $(\xi, 0)$, вызывает напряжения в упругой пластинке в точке $(x, 0)$, которые могут быть представлены следующим образом:

$$d\sigma_y = \frac{Af_\sigma(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad d\tau_{xy} = \frac{Af_\tau(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

где $A = 3\mu b_0 / (4\pi)$, μ – упругий модуль сдвига.

На основании этих формул можем записать:

$$\int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\sigma(x)}{A}, \quad \int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\tau(x)}{A}, \quad (1)$$

где:

$$\tau(x) = \begin{cases} -\tau_1 \equiv \tau_{xy}^\infty - \tau_{up}, & l < |x| < b, \\ \tau_0 \equiv \tau_{xy}^\infty - \tau_{low}, & 0 < |x| < l, \end{cases} \quad \sigma(x) = \begin{cases} -\sigma_1 \equiv \sigma_y^\infty - \sigma_{up}, & l < |x| < b, \\ \sigma_0 \equiv \sigma_y^\infty - \sigma_{low}, & 0 < |x| < l. \end{cases}$$

Уравнения(1) являются сингулярными уравнениями первого рода с ядром Коши на ограниченном отрезке. Решение их существует при условии ограниченности функции $f(\xi)$:

$$\int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi = 0, \quad \int_{-b}^b \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi = 0. \quad (2)$$

Известно [5], что функция распределения разрывов смещений имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_\tau(x) = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{A} \int_{-b}^b \frac{\tau(\xi)}{(\xi - x)\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi, \\ \delta_\sigma(x) = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{A} \int_{-b}^b \frac{\sigma(\xi)}{(\xi - x)\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi. \end{cases} \quad (3)$$

После подстановки в уравнения (2) распределений напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$, получаем уравнения для определения α , β при заданном относительном размере $\theta = b/l$:

$$\pi(\beta - \alpha) + 2(\alpha - 1) \arccos\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0,$$

где обозначено:

$$\beta = \tau_{xy}^\infty / \tau_s^{up} = \sigma_y^\infty / \sigma_s^{up}.$$

Запишем условия интенсивности напряжений:

$$\sigma_u^{low} = \sqrt{\sigma_s^{low} + 3\tau_s^{low}}, \quad \sigma_u^{up} = \sqrt{\sigma_s^{up} + 3\tau_s^{up}}.$$

При этом:

$$\sigma_y^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty}{2}(1 + \cos 2\beta), \quad \tau_{xy}^\infty = \frac{\sigma_{11}^\infty}{2} \sin 2\beta.$$

С учетом принятых обозначений получаем:

$$\frac{l}{b} = \cos \left(\frac{\pi \left(\beta \cos(\beta) \sqrt{\cos^2(\beta) + 3 \sin^2(\beta)} - \alpha \right)}{2(1-\alpha)} \right).$$

Для формулировки дополнительного условия, которое позволит определить длину локализованной области, заметим, что деформация в полосе должна быть ограничена значением, связанным с длиной площадки текучести BC , т.к. приведенное выше решение допустимо только до достижения деформацией участка упрочнения в точке C .

Максимальный разрыв перемещений будет достигаться в средней точке линии разрыва и определится по формуле:

$$\delta = \sqrt{\delta_\tau^2 + \delta_\sigma^2}, \quad \delta_\tau = b_0 \int_b^0 \delta_\tau(\xi) d\xi, \quad \delta_\sigma = b_0 \int_b^0 \delta_\sigma(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Если учесть построенные выше решения (3) для функций распределения дислокаций, то для безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta} = \delta/b$ получим:

$$\begin{cases} \bar{\delta}_\tau = \frac{8\gamma_s}{3\pi}(1-\alpha) \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta}, \\ \bar{\delta}_\sigma = \frac{8\varepsilon_s}{\pi}(1-\alpha) \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta}. \end{cases}$$

Таким образом можно записать:

$$\bar{\delta} = \sqrt{\delta_\tau^2 + \delta_\sigma^2} = \frac{16(1-\alpha)}{3\pi} \frac{\ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})}{\theta} \gamma_s.$$

Здесь γ_s – предел текучести по деформациям.

На рис. 4 представлены зависимости величины безразмерного разрыва перемещений $\bar{\delta}/\gamma_s$ от параметра нагрузки β для некоторых фиксированных значений параметра α , характеризующего различие верхнего и нижнего пределов текучести. Из приведенных графиков следует, что для каждого α существует два различных значения β для одного и того же отношения $\bar{\delta}/\gamma_s$. Кроме того, кривые, отвечающие фиксированному значению $\bar{\delta}$, имеют явно выраженный максимум. Это означает, что для каждого α можно найти максимальное отношение $\bar{\delta}/\gamma_s$, которое определит минимальную длину полосы локализации.

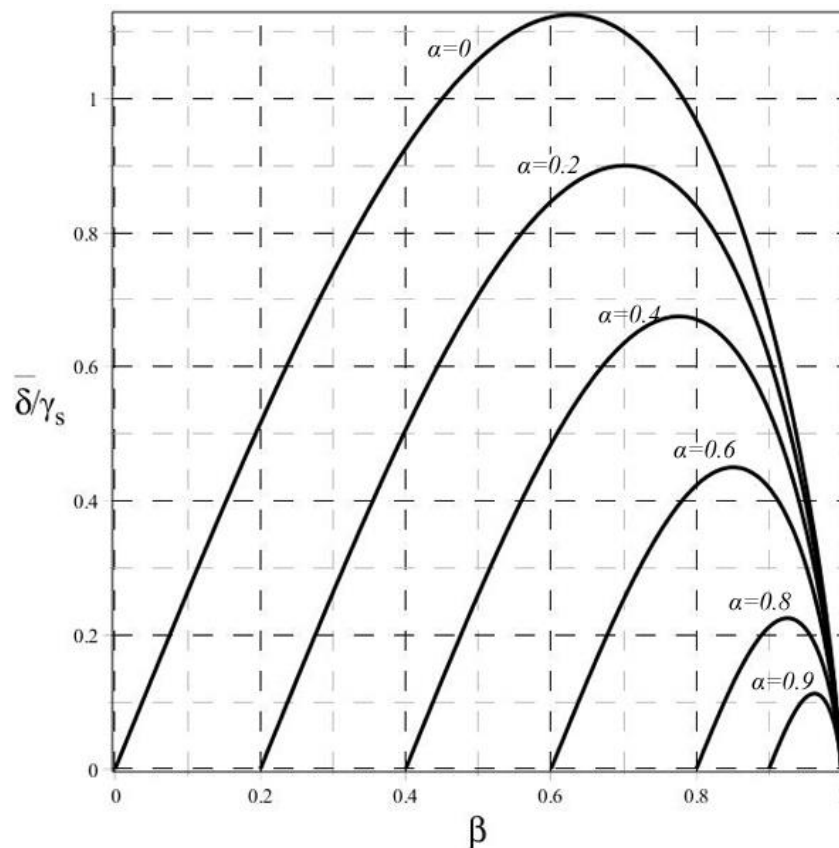


Рис. 4. Графики зависимости $\bar{\delta}/\gamma_s$ от параметра β для различных значений α для несжимаемого материала. Дадим количественную оценку минимальной длины полосы локализации. Для этого представим δ в следующем виде:

$$\delta = h\varepsilon_c, \quad (5)$$

где h – условная толщина полосы, $\varepsilon_c = \gamma_c/\sqrt{3}$ – деформация сдвига на площадке текучести (деформация Людерса). В таком случае длина линии разрыва будет определяться по формуле:

$$b = \frac{\gamma_c h}{\sqrt{3} \gamma_s \bar{\delta}(\beta)}.$$

По данным для стали 1045, приведенным в работе [6], имеем $\gamma_c = 1.5 \times 10^{-2}$, $\gamma_s = 2.5 \times 10^{-3}$. Сложнее обстоит дело с величиной h . Для ее определения будем исходить из того, что характерная ширина полосы локализации материала определяется средним размером зерна поликристаллического материала, поскольку размер зерна оказывает большое влияние на деформацию Людерса и морфологию полос, особенно для малоуглеродистых сталей [7] и [8]. В соответствии с данными, приведенными в статье [6], средний размер зерна стали 1045 порядка 10 мкм. Исходя из изложенного, принимаем $h \approx 10$ мкм. Тогда отношение $\bar{\delta}/\gamma_s$, к примеру, для $\alpha = 0$, будет порядка 1.125 и получаем длину полосы b порядка 53 мкм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты показывают, что для пластин с явно выраженным пик-зубом на диаграмме материала при одноосном растяжении область локализации шейки имеет конечную длину. С введением условной толщины полосы, порядка размера зерна

поликристаллического материала, получена зависимость длины шейки от соотношения верхнего и нижнего предела текучести и действующей нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черняков Ю. А. Локализация пластической деформации в форме ограниченной полосы разрыва перемещений / Ю. А. Черняков, А. Г. Шевченко // Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – № 11. – С. 61-66.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М. : Издательство иностранной литературы, 1954. – 647 с.
3. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К. : Наукова думка, 1968. – 246 с.
4. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – 8. – P. 100-104.
5. Сиратори М. Вычислительная механика разрушения / М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. – М. : Мир, 1986. – 334 с.
6. Zhang J. Lüders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state / J. Zhang, Y. Jiang // International Journal of Plasticity 21. – 2005. – P. 651-670.
7. Hall E. O. The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. III. Discussion of results / E. O. Hall // Proc. Phys. Soc. – 1961. – B 64. – P. 742-753.
8. Morrison W. B. Examination of the Lüders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy / W. B. Morrison, R. C. Glenn // J. Iron Steel Inst. – 1968. – 206. – P. 611-612.

REFERENCE

1. Chernyakov, Yu.A. and Shevchenko, A.G. (2013), "The localization of plastic deformation in the form of a limited displacement gap band", *Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny*, no. 11, pp. 61-66.
2. Nadai, A. (1954), *Plastichnost i razrushenie tverdykh tel* [Plasticity and fracture of solids], Izdatel'stvo inostrannoy literatury, Moscow.
3. Panasyuk, V.V. (1968), *Predel'noye ravnovesiye khrupkikh tel s treshchinami* [Limit equilibrium of brittle bodies with cracks], Naukova dumka, Kiev.
4. Dugdale, D.S. (1960), "Yielding of steel sheets containing slits", *J. Mech. and Phys. Solids*, 8, pp. 100-104.
5. Siratori, M., Miyosi, T. and Matsusita, Kh. (1986), *Vychislitelnaia mekhanika razrusheniia* [Computational fracture mechanics], Mir, Moscow.
6. Zhang, J. and Jiang, Y. (2005), "Lüders bands propagation of 1045 steel under multiaxial stress state", *International Journal of Plasticity* 21, pp. 651-670.
7. Hall, E.O. (1961), "The deformation and aging of mild steel: II. Characteristics of the Lüders deformation. III. Discussion of results", *Proc. Phys. Soc.*, B 64, pp.742-753.
8. Morrison, W.B. and Glenn, R.C. (1968), "Examination of the Lüders front in a low-carbon steel by transmission electron microscopy", *J. Iron Steel Inst.*, 206, pp. 611-612.