

УДК 631.7.04-197:631:7.019.12

В.О. ПОВГОРОДНИЙ

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТУРБИН ИСХОДЯ ИЗ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Экспериментально – теоретическое исследование термоупругого состояния элементов турбостроения осуществляется исходя из решения обратной задачи термоупругости. В результате решения обратной задачи термоупругости можно определить температурное поле диска турбины исходя из температурных напряжений. Обратная задача термоупругости решается с использованием уравнения Фредгольма и конечно-разностный аналог ядра интегрального оператора строится исходя из кусочно-постоянной аппроксимации и позволяет заменить эксперимент. В качестве примера рассмотрим полый круговой цилиндр. Результаты расчета можно использовать как неотъемлемую часть проектирования объектов энергетического машиностроения (паровых и газовых турбин), а также расчета их ресурса и выбора системы охлаждения.

Ключевые слова: температура, обратные задачи, термоупругость, турбина, диск турбины.

Введение

Сформулируем следующую задачу экспериментально-теоретического исследования термоупругого напряженного состояния тела. Пусть в теле, занимающем область V , имеется стационарное неоднородное температурное поле и соответствующее ему поле термоупругих напряжений.

В результате измерений на части поверхности S температура $T(s)$ и тензор термоупругих напряжений $\sigma_{ij}(s)$ считаются известными. При этих условиях требуется определить температуру $T(x)$ поверхности L .

1. Формулирование проблемы

Тензор термоупругих напряжений $\sigma_{ij,j}$ в рассматриваемом случае удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений стационарной термоупругости в напряжениях [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= 0, \\ \sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\mu}(\sigma_{kk} + \alpha_t E T), ij &= 0, \\ \sigma_{ij} n_j &= 0 \text{ на } L+S.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь σ_{kk} – первый вариант тензора напряжений; α_t – коэффициент теплового расширения; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; T – температурное поле без источников; n_j – компоненты единичного вектора внешней нормали в точках поверхностей L и S .

Рассмотрим случай, когда в точке $x_0 \in L$ задана обобщенная функция температуры $T_0 \delta(x - x_0)$, где T_0 – константа, $\delta(x - x_0)$ – дельта-функция Дирака. На части поверхности S положим температуру, равную нулю. Найдем в этом случае решение уравнений теплопроводности для рассматриваемой области. Эта задача является полностью определенной в смысле краевых условий и корректно поставленной. В результате решения системы уравнений (1) определим распределение значений тензора напряжений в объеме тела, в том числе и на поверхности S . Обозначим тензор напряжений на S через $H_{ij}(s, x_0)$. Пусть точка x_0 пробегает все множество точек, принадлежащих L . В результате построим функции Грина для напряжений. Зная функции Грина $H_{ij}(s, x_0)$, можно определить напряженное состояние на поверхности S от произвольного распределения температуры $T(x)$ на поверхности L при условии равенства нулю температуры на S . Тензор напряжений в точках $s \in S$ можно представить в следующем виде

$$\sigma_{ij}(s) = \int_L H_{ij}^t(s, x) T(x) dL(x). \quad (2)$$

Поскольку выражение (2) представляет собой суперпозицию решений краевых задач термоупругости, то тензор напряжений $\sigma_{ij}(x)$ также будет удовлетворять системе уравнений линейной термоупругости (1).

Поскольку выражение (2) представляет собой суперпозицию решений краевых задач термоупругости, то тензор напряжений $\sigma_{ij}(x)$ также будет

удовлетворять системе уравнений линейной термоупругости (1).

Рассмотрим теперь случай, когда на поверхности S задана температура $T(S)$, известная из постановки задачи, а на поверхности L температура равна нулю. Найдем в этом случае решение системы уравнений (1)–(2). Эта задача также является полностью определенной в смысле краевых условий и конкретно поставленной. В результате решения определим распределение значений тензора напряжений в объеме тела и в точках $s \in S$. Обозначим тензор напряжений на S через $\sigma_{ij}^0(x)$. Предположим теперь, что распределение температуры как на поверхности S , так и на поверхности L известно ($T(x)$ и $T(s)$). Тогда заданный на наружной поверхности тензор напряжений $\sigma_{ij}^*(x)$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\sigma_{ij}^*(s) = \sigma_{ij}^0(s) + \int_1 H_{ij}^t(s, x) T(x) dL(x). \quad (3)$$

Тензор термоупругих напряжений, определяемый этим выражением, ввиду линейности рассматриваемой задачи удовлетворяет всем уравнениям термоупругости и заданным граничным условиям.

При известном распределении температуры $T(s)$ и известном тензоре напряжений $\sigma_{ij}^*(x)$ на поверхности S представление (3) является уравнением относительно неизвестного распределения температуры $T(x)$ на поверхности L .

Перепишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\int_1 H_{ij}^t(s, x) T(x) dL(x) = \varphi_{ij}(s),$$

где $\varphi_{ij}(s) = \sigma_{ij}^*(s) - \sigma_{ij}^0(s)$, $ij = 1, 2, 3$.

Таким образом, для нахождения неизвестного распределения $T(x)$ на поверхности S необходимо решить это интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Решение этого уравнения представляет собой обратную задачу термоупругости, в которой изучаемый объект (в данном случае $T(x)$ – распределение температуры на L) не доступен для прямого экспериментального исследования, и изучается его некоторое проявление $\varphi_{ij}(s)$.

2. Решение проблемы

Методы решения обратной задачи термоупругости аналогичны рассмотренным выше и сводятся к решению уравнения Фредгольма 1-го рода. Но здесь необходимо отметить, что построение альтернирующего итерационного процесса в этой задаче невозможно ввиду специфики граничных условий, задаваемых на поверхности измерений. Задача не

сводится к некоторой корректно-поставленной, минуя использование процедуры регуляризации или конструктивного выделения компактного множества корректности, на котором возможен поиск искомого решения. В то же время рассматриваемая задача характеризуется тем обстоятельством, что искомая величина является скалярной величиной, а отклик ее проявляется в виде тензорной величины. Это весьма благоприятное обстоятельство, позволяющее во многих случаях получать устойчивые приближения, на пользуясь методом регуляризации. Используя же регуляризацию, можно в широких пределах варьировать эффективную зону измерений, сужая ее до тех пределов, с которых начинает сказываться неустойчивость алгоритма регуляризации [2, 3].

Изложенный метод восстановления температуры на недоступных для измерений поверхностях может быть использован при рассмотрении нестационарной задачи термоупругости, в том числе с распределенными по объему источниками тепла. Отличие этой задачи от рассмотренной стационарной заключается в способе построения интегрального оператора, являющегося функцией времени и определяемого из решения уравнений нестационарной термоупругости.

В качестве примера рассмотрим полый круговой цилиндр, имеющий радиальные размеры, но ограниченную длину $2L = 200$ мм и находящийся под действием осесимметричного, нестационарного температурного поля, полученного при нулевой начальной температуре и мгновенно нагреваемой внутренней поверхности, поддерживаемой неизменной во времени. На торцах и внешней поверхности цилиндра поддерживается нулевая температура. Коэффициент температуропроводности материала цилиндра $a = 2,3 \cdot 10^{-4}$ мм²/с. Требуется при известных на внешней поверхности осевых и кольцевых напряжениях σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$, приведенных на рис. 1 и соответствующих 40-й секунде прогрева, определить распределение температуры на внутренней поверхности цилиндра и возникающие в нем термоупругие (температурные) напряжения.

При решении этой задачи применен метод граничных элементов (МГЭ) в сочетании с вариационным методом. На рис. 1 приведены результаты решения обратной задачи термоупругости. Кривая 1 (сплошная) соответствует точному распределению температуры на внутренней поверхности, кривая 2 (пунктир с точкой) соответствует регуляризованному решению обратной задачи, полученному по точным значениям совместно использованных осевых и кольцевых напряжений на внешней поверхности.

На рис. 2 представлены регуляризованные решения при двух уровнях погрешности задания коль-

цевых и меридиональных напряжений. Кривые 1 и 2 отвечают значениям относительных случайных ошибок с нормальным законом распределения, не превышающим соответственно 5 и 10 % от величины напряжений в узловых точках s_i . Рис. иллюстрирует устойчивость регуляризованных приближений к возмущению исходных данных (кривая 3 – точное значение искомой температуры).

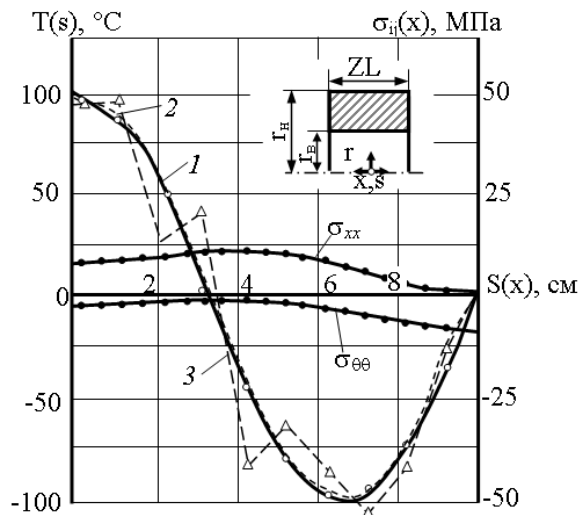


Рис. 1. Исходные данные (напряжения σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$ на внешней поверхности) и результаты восстановления распределения температуры (на внутренней поверхности):
1 – точное решение; 2 – регуляризованное решение;
3 – нерегуляризованное решение

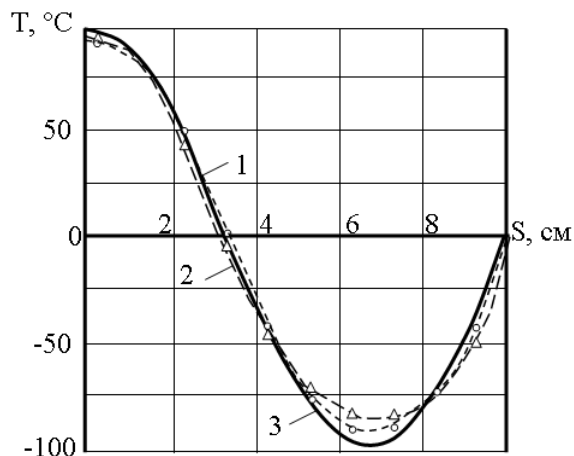


Рис. 2. Регуляризованные решения при двух уровнях погрешностей исходных данных:
1 – точное решение; 2 – регуляризованное решение;
3 – нерегуляризованное решение

Полученные результаты показывают следующее. Регуляризованное решение (см. кривую 3 на

рис. 1), полученное на основе совместного использования информации о кольцевых и меридиональных напряжениях, обладает высокой степенью приближения к точному решению. Хотя количество информации, необходимое для восстановления распределения температуры в рассматриваемом случае, могло бы быть значительно меньшее, использование избыточной информации позволило получить устойчивые приближения в широком диапазоне изменения параметра регуляризации. Практически оптимальное значение параметра регуляризации в приведенном на рис. 1 случае занимает интервал $0,01 \geq \alpha \geq 0,00001$. Приведенное на рис. 1 нерегуляризованное решение (кривая 3), хотя и «разболтано», но отражает тенденцию поведения искомого решения. При получении нерегуляризованного решения с меньшим или минимально необходимым количеством исходной информации наблюдается усиление «разболтки». При этом зона оптимальных значений параметра регуляризации сильно сужается.

Выводы

Решение проблемы регулирования внешних или внутренних температурных силовых нагрузений, при которых будут достигнуты температурные напряжения или перемещения в элементах конструкций в пределах допустимых значений, имеют теоретическую и практическую ценность. Целесообразно считать, что единственный путь нахождения этих величин как функции времени и гометрических координат заключается в решении обратных задач теплопроводности и термоупругости и определении температурного поля исходя из поля температурных напряжений.

Кроме того, экономичность состоит в том, что дороговизна и сложность экспериментальных исследований вызывает необходимость создания расчетно-теоретических методик исследования данных технических объектов и разработки алгоритмов для аналитического и численного решения ряда тестовых задач температурного управления.

Литература

1. Бахышев, Ш.М. Обратные задачи термоупругости [Текст] / Ш.М. Бахышев. – М.: Прометей, 2002. – 152 с.
2. Банцарев, К.Н. Исследование составных пластин методом граничных элементов в сочетании с вариационным методом [Текст] / К.Н. Банцарев. – Набережные Челны, 2001. – 116 с.
3. Романов, В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г. Романов. – М.: Наука, 1984. – 261 с.

Поступила в редакцию 30.05.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Л. Шубенко, Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина.

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ
ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ ТУРБІН
ВИХОДЯЧИ З РІШЕННЯ ЗВОРОТНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ**

В.О. Повногородній

Розглядається обернена коефіцієнтна задача термопружності для елементів турбін. Розв'язок, що пропонується в цій роботі, базується на тому, що термомеханічні процеси в пласті є гармонійними. Геометрія області та граничні умови дозволяють звести цю задачу до одновимірної задачі термопружності. За умови дуже малих частот термомеханічних коливань можна побудувати рівняння, з якого можна знайти коефіцієнти температурних напружень та тепловиділення при деформуванні. Числовий метод, який використовується – метод граничних елементів. Одержані результати можна використовувати при моделюванні процесу експериментального визначення фізико – математичних характеристик матеріалів, які використовуються в авіа конструкціях, приладобудуванні ракетобудуванні та енергетичному машинобудуванні.

Ключові слова: температура, обернені задачі, термопружність, турбіна, диск турбіни.

**THE DIGIT AND ANALYTICAL SOLUTION OF INVERS PROBLEM
FOR PLATE WITH ELEMENT'S OF THE TURBINE**

V.O. Povnogorodniy

An inverse quotients thermoelasticity problem for a finite thickness layer is considered. The proposed solution is based on the assumption that thermo-mechanical processes in the layer have a stationary harmonic character. The area geometry and boundary conditions allow reducing the problem to a one-dimensional thermoelasticity problem. Assuming thermomechanical oscillation frequency small enough a solving equation was produced. This equation allows determining quotients of temperature stresses and heat release under deformation. Obtained results can be used to simulate the process of experimental determination of physical-mechanical properties of the materials used in aero- and spacecraft manufacturing and of the energetic machinebuidings.

Key words: temperature, inverse problems, thermoelasticity, turbine, element's of the turbine.

Повгородній Владимир Олегович – кандидат технических наук, доцент, Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков, Украина.