

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ОБЪЕКТОВ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЗЕРКАЛАХ

*Национальная академия природоохранного
и курортного строительства, Украина*

В статье рассматривается геометрия отражения плоских предметов в криволинейных зеркалах. Предложен алгоритм, позволяющий моделировать изображение плоских объектов в цилиндрическом зеркале с определенной позиции наблюдателя.

Анализ публикаций. В дизайне помещений зеркало уже давно не просто предмет, ответственный за наше отражение. Это ещё и один из важнейших декоративных элементов, который активно используется дизайнерами. Обилие зеркал расширяет пространство, но остается «холодным» отражением окружающего пространства. Это всегда вынуждает прибегать к декору самих зеркал: всевозможные рисунки по зеркалу, тонирование, наклейки, мозаика и т.д. Интересным представляется моделирование отражений в зеркалах, которые представляют собой различные криволинейные формы, в частности, в статье рассмотрим моделирование отражений плоских геометрических фигур в цилиндрическом зеркале.

Цилиндрические зеркала бывают как выпуклые, так и вогнутые. При использовании этих зеркал можно наблюдать интересные эффекты. Многие художники (Автар Сингх Вирди, Иштван Орос) с давних времен пишут, так называемые, анаморфные картины [3-4]. Изображения на анаморфных картинах сильно искажены, но если смотреть их с помощью зеркала и с определенной точки, то можно увидеть неискаженное изображение предмета.

Анаморфную картину для выпуклого цилиндрического зеркала можно узнать по кругу, расположенному, как правило, посередине. Для просмотра анаморфных цилиндрических картин в неискаженном виде необходимо поставить на неё в центр круга цилиндрическое зеркало (рис.1, 2).

Нарисованная на листе кривая линия превратилась в цилиндрическом зеркале в прямую линию, а расходящиеся лучи в цилиндре видны как параллельные прямые. На рисунке 2 изображены анаморфные кофейные чашки, выполненные дизайнером Роз Мак Брайд. Обычно художники рисуют такие анаморфозы, постоянно сверяясь с зеркалом. Один неудачный мазок или штрих - и все изображение будет испорчено.

Интересным представляется также отражение предметов в сферическом зеркале. На рисунке 3 можно увидеть, как искажаются прямоугольные плоские фрагменты при отражении в сферическом зеркале. На рисунке 4 представлено изображение в сферическом зеркале картины Боттичелли «Рождение Венеры».

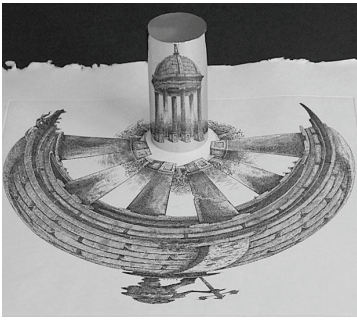


Рис.1



Рис.2



Рис.3



Рис.4

Основная часть. Найдем координаты точки, которая отразится в цилиндрическом зеркале, если известно положение наблюдателя. Рассмотрим схему отражения для плоского случая, когда наблюдатель $S(x_s, y_s)$, точка $A(x_A, y_A)$, отражающаяся в зеркале, и нормаль OK к зеркалу в искомой точке $K(x_K, y_K)$ лежат в одной плоскости (рис. 5). Введем систему координат xOy . Проекция зеркала представляет собой окружность

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2, \quad (1)$$

где $O(x_O, y_O)$ – координаты центра окружности. Нормаль OK пересекает прямую SA в точке $L(x_L, y_L)$ и является биссектрисой треугольника SKA . Известно свойство биссектрисы:

$$\frac{SK}{AK} = \frac{SL}{AL}, \text{ т.е.} \\ \frac{(x_K - x_S)^2 + (y_K - y_S)^2}{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \frac{(x_L - x_S)^2 + (y_L - y_S)^2}{(x_L - x_A)^2 + (y_L - y_A)^2}. \quad (2)$$

Уравнение нормали OK к окружности имеет вид:

$$(x_K - x_O) \cdot (y - y_K) = (y_K - y_O) \cdot (x - x_K). \quad (3)$$

Уравнение прямой SA имеет вид:

$$\frac{x - x_A}{x_S - x_A} = \frac{y - y_A}{y_S - y_A}. \quad (4)$$

Совместным решением (3)-(4) получаем координаты точки $L(x_L, y_L)$. Подставив их в (2) и учитывая, что искомая точка лежит на окружности, т.е. ее координаты удовлетворяют (1), найдем искомую точку $K(x_K, y_K)$.

Для исходных данных $S(2,2)$, $A(7,1)$, $O(5,7)$, $R=5$, используя программное обеспечение Maple, имеем:

```
> xs:=2: ys:=2: xa:=7: ya:=1: x0:=5: y0:=7: R:=5:
> yk2:=sqrt(R^2-(xk-x0)^2)+y0: yk1:=-sqrt(R^2-(xk-
x0)^2)+y0: y1:=(7*xk+7*yk1-84)/(xk+5*yk1-40): x1:=
5*y1+12:
> S:=evalf(solve( ((xk-2)^2+(yk1-2)^2)/((xk-7)^2+(yk1-
1)^2)=((x1-2)^2+(y1-2)^2)/((x1-7)^2+(y1-1)^2), xk)):
print(S[4]);
4.177499888
> yk:=-sqrt(R^2-(S[4]-5)^2)+7;
yk:=2.068114603
```

Т.е. координаты точки K следующие: $x_K=4.1774$, $y_K=2.0681$.

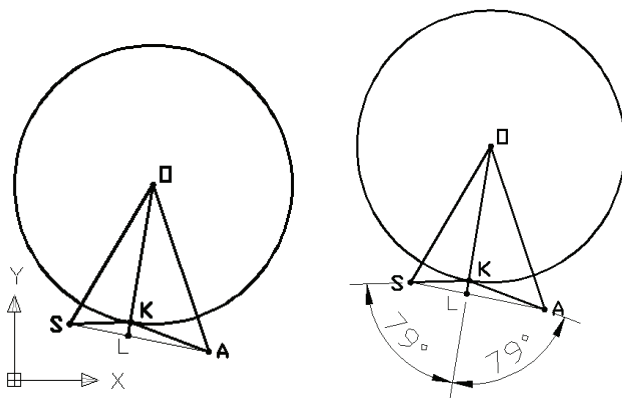


Рис.5

Имея координаты точки K для плоского случая, несложно перейти к пространственному.

Представим моделирование отражения участка прямой $x=30$ в цилиндре с радиусом основания $R=15$ (рис.6). Точка зрения имеет координаты $S(40,0,20)$. Прямая линия в цилиндре отражается в виде дуги.

```
> R:=15: xs:=40: ys:=0: zs:=20: xa:=30: za:=0:
> S:=pointplot3d([xs,ys,zs],symbol=diamond,color=green):
> gelob:=plot3d(x^2+y^2-R^2,x=-36..36,y=-36..36,
style=hidden):
```

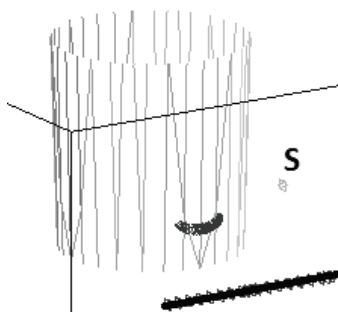


Рис.6

На рис. 7 представлена компьютерная модель отражения прямоугольной пластины длиной 30 см и шириной 15 см в сферическом зеркале радиуса 15 см. Можно увидеть сходство с рисунком 3.

```
> R:=15:
> xs:=40: ys:=0: zs:=10: ya:=-15: xa:=30: za:=-15:
> SS:=pointplot3d([xs, ys, zs
],symbol=diamond,color=green):
> gelob:=implicitplot3d(R^2-x^2-y^2-z^2=0,x=0..20,y=-
20..20,z=-20..20,style=hidden):
```

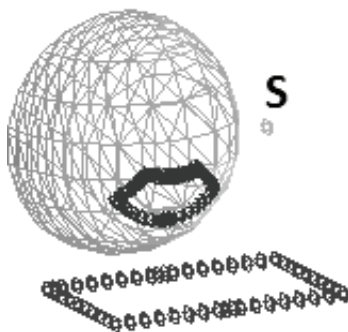


Рис.7

Выводы. Изучение геометрии отражений плоских предметов в криволинейных зеркалах представляется весьма интересным. Предложенные способы математического, геометрического и компьютерного моделирования помогут найти изображение отраженных объектов в цилиндрическом зеркале максимально точно, что позволит использовать цилиндрические зеркала, например, при оформлении интерьеров помещений и городских ландшафтов.

Литература

1. *Glaeser G.* Reflections on Spheres and Cylinders of Revolution// Journal for Geometry and Graphics. – Volume 3 (1999) .№2, 121-139.
2. *Перешилкин К.А., Денисова Т.В.* Отражение плоских объектов в цилиндрических зеркалах // Актуальные проблемы архитектуры, строительства и энергосбережения. – Симферополь, 2011. – Вып.3, Ч.1
3. <http://www.kulturologia.ru>
4. <http://yablor.ru>

ВІДБИТТЯ ПЛОСКИХ ОБ'ЄКТІВ В КРИВОЛІНІЙНИХ ДЗЕРКАЛАХ

Т. В. Денисова

У статті розглядається геометрія відбиття плоских предметів в криволінійних дзеркалах. Запропонований алгоритм, що дозволяє моделювати зображення плоских об'єктів в циліндричному дзеркалі з певної позиції спостерігача.

REFLECTION OF FLAT OBJECTS IN THE CURVILINEAR MIRRORS

T. Denysova

Reflection geometry of flat objects in curvilinear mirrors is examined in the article. An algorithm allowing to design the image of flat objects in a cylindrical mirror from certain position of observer is offered.