
EXPERT ASSESSMENT OF RESIDUAL STRENGTH OF VEHICLE LONGERON, WHICH WAS DAMAGED BY A CRACK**V. Shvabyuk, Y. Fedorus, V. Grabovets**Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine

**ABSTRACT****Key words:**

spar,
residual strength,
beam,
J. Irwin's criterion,
strength

Article history:

Received 20.09.2020

Accepted 17.11.2020

Corresponding author:

vgrabovets@ukr.net

Beams and plates are important load-bearing elements of most designs of mechanisms and machines that work on bending or torsion. Safe operation of load-bearing beams of spars of cars working in the conditions of repeated alternating loadings and having a large number of concentrators of tension is very important. Stresses cause cracks in the beams, which can cause dangerous accidents. The calculation of these elements is extremely complex and requires the consideration a large number of factors. The problem of studying the bending of beams and plates, which are weakened by cuts or cracks, is covered in many scientific sources. The purpose of the study is to develop a method of expert assessment of the residual strength of the longeron of vehicle. The article develops a method of expert assessment of the residual strength in the load-bearing beam of the car spar, which is damaged by a crack in the stretched fibers of its lower surface under static load. The wall thicknesses of the spar are quite thin, so it is believed that the crack has gone through and can then spread to the vertical walls until the complete destruction of the entire beam. The calculation was performed on the basis of the equations of the nonclassical model of bending of short beams, which took into account the influence of deformations of transverse shear and compression. The residual strength of the beam was determined from the conditions determined by the force criterion of J. Irwin. It was believed that the load on the spar beam is distributed according to the law of sinusoids and concentrated moments at the edges. The obtained numerical data are summarized in comparative tables. The residual strength found according to the force criterion of crack propagation and according to the method of allowable stresses is compared.

УДК 629.1

ЕКСПЕРТНА ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОЇ МІЦНОСТІ ЛОНЖЕРОНА АВТОМОБІЛЯ, ЩО ПОШКОДЖЕНИЙ ТРІЩИНОЮ**В.В. Швабюк, Ю.В. Федорусь, В.В. Грабовець**

Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

**Ключові слова:**

лонжерон,
залишкова міцність,
балка,
критерій Дж. Ірвіна,
міцність

Історія публікації:

Отримано 20.09.2020

Затверджено 17.11.2020

Автор для**листування:**

vgrabovets@ukr.net

АНОТАЦІЯ

Балки і пластини є важливими несучими елементами більшості конструкцій механізмів та машин, що працюють на згин або кручення. Надзвичайно важливою є безпечна робота несучих балок лонжеронів автомобілів, що працюють в умовах повторно-змінних навантажень і мають велику кількість концентраторів напружень. Напруження викликають у балках появу тріщин, що можуть спричинити небезпечні аварії. Мета дослідження – розробити методику проведення експертної оцінки залишкової міцності лонжерона автомобіля Mercedes-Benz Sprinter 212D. У статті розроблена методика проведення експертної оцінки залишкової міцності несучої балки лонжерона автомобіля, що пошкоджена тріщиною в розтягнутих волокнах її нижньої поверхні за дії статичного навантаження. Стінки лонжерона є достатньо тонкими, тому можна припустити, що тріщина є наскрізною і надалі може поширюватися на вертикальні стінки аж до повного руйнування всієї балки. Розрахунок проводився на основі рівнянь неklasичної моделі згину коротких балок, де урахувувався вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення. Залишкова міцність балки визначалася з умов, що визначаються силовим критерієм Дж. Ірвіна. Припускалося, що навантаження на балку лонжерона розподіляється за законом синусоїди з урахуванням зосереджених моментів на краях. Одержані числові дані зведені у порівняльні таблиці. Порівнюється залишкова міцність, що знайдена відповідно до силового критерію поширення тріщини і згідно методу допустимих напружень.

<https://doi.org/10.36910/acm.vi45.404>

Стан питання та постановка проблеми

Балки і пластини є важливими несучими елементами більшості конструкцій механізмів та машин, що працюють на згин або кручення. Надзвичайно важливою є безпечна робота несучих балок лонжеронів автомобілів (рис. 1), що працюють в умовах повторно-змінних навантажень і мають велику кількість концентраторів напружень. Напруження викликають у балках появу тріщин, що можуть спричинити небезпечні аварії. Розрахунок цих елементів є надзвичайно складним і вимагає урахування великої кількості різних факторів.



Рис. 1 – Поява тріщини у балці лонжерона автомобіля

Проблема дослідження згину балок і пластин, які послаблені розрізами або тріщинами, висвітлена у багатьох наукових джерелах інформації [1–3]. Оцінка залишкової міцності конструкцій, що вже пошкоджені дефектами типу тріщин, є на сьогодні надзвичайно важливою проблемою. Зокрема, у наукових працях В.В. Панасюка, Б.Л. Лозового, Г.Т. Сулима, О.Є. Андрейківа, В.В. Божидарніка [4–6] розв'язуються задачі для ізотропної та трансформної балки – смуги з поперечною тріщиною.

Поперечні та поздовжні тріщини у циліндричних оболонках також розглядаються у наукових працях С.В. Серенсена, І.В. Ориняка, М.М. Николишина, Р.М. Кушніра [7, 8]. У науковій праці [10] за допомогою рівнянь неklasичної моделі згину коротких балок досліджувалася залишкова міцність пошкоджень типу тріщин, що є у балці лонжерона автомобіля, та отримані результати порівнювалися із

результатами, які отримані за допомогою класичної теорії згину балок. За спрощеною схемою розроблена методика проведення експертної оцінки міцності лонжерона автомобіля Mercedes-Benz Sprinter 212D, що має поперечну тріщину у розтягнутій зоні під дією статичних навантажень.

Для визначення граничного навантаження застосовується силовий критерій Дж. Ірвіна [11]. Результати порівнюються із даними розрахунків балки на міцність та згин під дією розподіленого синусоїдального навантаження.

Мета дослідження – розробити методику проведення експертної оцінки залишкової міцності лонжерона автомобіля Mercedes-Benz Sprinter 212D, що має поперечну тріщину у розтягнутій зоні, а також дослідити вплив зростання тріщини на залишкову міцність конструкції.

Матеріали і методи

Для математичного опису роботи лонжерона під дією зовнішнього навантаження використовуються уточнені рівняння згину балок, що представлені у попередній роботі авторів [10]. Зокрема, рівняння прогинів середньої лінії балки $w(x)$ та формули для напружень та переміщень для ізотропного матеріалу (рис. 2):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q_2}{EI} - \frac{\varepsilon_1 h^2}{EI} \cdot \frac{d^2 q_2}{dx^2} - \frac{\varepsilon_2 h^4}{4EI} \cdot \frac{d^4 q_2}{dx^4}, \quad (1)$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I} z + \frac{z}{I} \left(\frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{5} \right) \left(1 - \tilde{\varepsilon}_2 \frac{d^2}{dx^2} \right) q_2, \quad (2)$$

$$U(x, z) = u(x) + z \cdot \gamma_x(x) - \frac{\varepsilon_2 z}{6I} (5z^2 - 3h^2) \frac{Q_x}{G},$$

$$W(x, z) = w(x) - \frac{q^-}{b} \cdot \frac{z}{E} + \frac{\nu}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot z^2 + \\ + z^2 \left(C_1 - C_2 z^2 / h^2 \right) \cdot \frac{q^-}{Ebh} + \frac{5\nu \varepsilon_2}{32bhE} \cdot \frac{d^2 q^-}{dx^2} \cdot z^4,$$

$$M = b \int_{-h}^h z \sigma_x dz = -EI \hat{w}'' - \varepsilon_1 h^2 \tilde{q}_2,$$

$$\text{де } C_1 = \frac{3}{8} (1 + 2\nu(1 + \nu)); \quad C_2 = \frac{1}{16} (1 + 2\nu(1 + \nu) - \nu^2); \quad \varepsilon_1 = 0,8 + 0,5\nu;$$

$$I = \frac{2}{3} b h^3 (1 - \delta^*), \quad \delta^* = (1 - 2t')(1 - t'')^3, \quad t' = t/b, \quad t'' = t/h;$$

$$\varepsilon_2 = 0,2(1 - 0,5\nu/(1 + \nu)); \quad \hat{w} = w + \varepsilon_2 \cdot \frac{3\tilde{q}^-}{8E} \cdot h; \quad \gamma_x = -\frac{d\hat{w}}{dx} + (1 - \varepsilon_2) \frac{h^2}{2I} \frac{Q_x}{G'};$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = 1,25\varepsilon_2 h^2; \quad \tilde{q}^- = \frac{q^-}{b}, \quad E, G, \nu - \text{відповідно, модуль пружності,}$$

модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу балки.

Розв'язок рівняння (1) вибираємо у вигляді:

$$w = k_w w_0 \sin \pi x / L, \quad (3)$$

де $k_w = 1 + \varepsilon_1 \delta^2 - \varepsilon_2 \delta^4 / 4; \quad \delta = \pi h / L; \quad w_0 = \frac{q_0 L^4}{EI \pi^4}$ – максимальний

прогин середньої лінії балки за класичною теорією Бернуллі-Ейлера.

Для отримання розв'язку у вигляді рівняння (3), використовується метод прямого інтегрування диференціального рівняння (2).

Результати дослідження та обговорення

Розглянемо випадок, коли порожниста балка (профіль із перерізом $2h \times b$ і товщиною стінки t) навантажена по зовнішній поверхні ($z = -h$) розподіленим за периметром рами навантаженням $q^-(x)$ (рис. 2), що змінюється за законом:

$$q^-(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (4)$$

де L – довжина балки, м.

Необхідно зазначити, що площа синусоїди із максимумом q_0 еквівалентна вазі, що припадає на довжину балки.

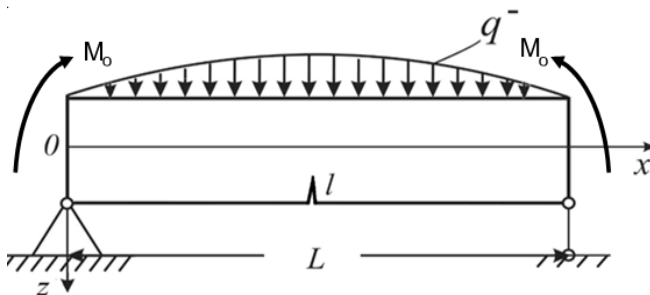


Рис. 2 – Схема навантаження балки лонжерона автомобіля

Навантаження із консольної частини лонжерона передаються на балку у вигляді прикладених до її кінців зосереджених моментів M_0 . Нехай, на кінцях балки ($x = 0; L$) виконуються умови:

$$M = M_0, w = 0. \quad (5)$$

Нижня поверхня балки послаблена крайовою тріщиною завглибшки l , що розташована у розтягнутій зоні посередині нижньої поверхні балки і не перевищує товщини стінки t . Нехай, за певного навантаження автомобіля впливом моментів M_0 можна знехтувати. За таких крайових умов та прийнятих припущень стосовно навантаження, згинальний момент у балці, згідно формули (4), визначається у вигляді:

$$-M(x) = \frac{L^2}{\pi^2} q^-(x). \quad (6)$$

Ураховуючи зазначене вище, формулу для напруження σ_x за такого навантаження можна записати таким чином:

$$\sigma_x = \frac{L^2 z}{I \pi^2} q^-(x) + \frac{z}{I} \left(\frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{5} \right) (1 + 1,25 \varepsilon_2 \delta^2) q^-(x). \quad (7)$$

Останній член у формулі (7) є уточненням до класичної теорії Бернуллі-Ейлера. Для автомобіля Mercedes-Benz Sprinter 212D характеристики поперечного перерізу балки лонжерона: $b = 6$ см, $h = 16$ см, $t = 0,25$ см. Тому реальний момент інерції поперечного перерізу лонжерона можна записати у вигляді:

$$I = \frac{2}{3} b h^3 \cdot 0,164. \quad (8)$$

Довжина балки лонжерона для даного автомобіля дорівнює $L = 3$ м. Тоді формулу для нормального напруження σ_x у середньому перерізі балки ($z = \pm h$, $x = L/2$) можна записати таким чином:

$$\sigma_{\max}(\pm h) = \pm \frac{3}{2} \frac{q_0 L^2}{0,164 \cdot \pi^2 h^2 b} k_\sigma, \quad (9)$$

де $k_\sigma = 1 + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} \varepsilon_2 \delta^2 \right) \delta^2$, $\delta = \pi h / L$.

Для коефіцієнтів k_w і k_σ із аналізу формул (7) та (9) видно, що переміщення та напруження в балках строго більші за модулем від тих, які дає теорія тонких стрижнів Бернуллі-Ейлера. Значення коефіцієнтів k_w і k_σ для високоміцної сталі ($\nu = 0,32$) представлені в таблиці 1. Аналіз даних у таблиці 1 показує, що результат урахування ефектів поперечного зсуву і обтиснення зовсім незначний у випадку балки лонжерона з $L/2h = 18,75$. Навіть для переміщень він не перевищує 2,7%. Одночасно, для короткої ізотропної балки ($2h/L = 1/3$) результати для переміщень можуть на 100% перевищувати ті, які можна отримати за допомогою класичної теорії Бернуллі-Ейлера. Вплив названих

поправок на величину напружень для ізотропного матеріалу знаходиться у межах 18,5% (для цієї довжини). Разом із тим, як показують результати у праці [10], для композитних матеріалів (графітопластик) вплив ефектів поперечного зсуву та обтиснення може бути досить значним, навіть при визначенні нормальних напружень ($k_\sigma = 1,967$ для $2h/L = 1/3$), тому користуватися у цьому випадку класичною теорією Бернуллі-Ейлера недоцільно. Якщо ж визначити величину переміщень у композитній балці (зростання більше ніж у 6 разів), то використання класичної теорії для таких матеріалів є недоречним. Представлені висновки підтверджуються результатами, що одержані Ю.М. Тарнопольським [12] на основі рівнянь плоскої задачі теорії пружності.

Таблиця 1 – Значення коефіцієнтів k_w і k_σ

$L/2h$	18,75	10	5	3
k_σ	1,004	1,013	1,057	1,185
k_w	1,027	1,094	1,372	2,0

За умови довжини тріщини $l \ll h, t$ та ураховуючи розв'язок для випадку тріщини на краю півплощини, функція $Y(l/2h)$, що, у свою чергу, урахує розміри стінки балки та спосіб навантаження, дорівнює $Y(l/2h) = 1,12$. У цьому випадку задача знаходження залишкової міцності $q^* = q_0 / b$ зводиться до розв'язування рівняння, що впливає із силового критерію Дж. Ірвіна [11]:

$$K_I^* = K_{IC} \text{ або } \sigma_x^*(q^*, h) \sqrt{\pi l} \cdot 1,12 = K_{IC}, \quad (10)$$

де K_{IC} – критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень (в'язкості руйнування), яке не залежить від розмірів та геометрії елемента конструкції.

Нормальне напруження $\sigma_x^*(q^*, h)$ у нижній поверхні балки лонжерона ($z = h, x = L/2$), через яке проходить тріщина, визначається за формулою:

$$\sigma_x^*(q^*, h) = \frac{3}{2} \cdot \frac{L^2 q^*}{0,164 \cdot \pi^2 b h^2} k_\sigma. \quad (11)$$

де $k_\sigma = 1 + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} \varepsilon_2 \delta^2 \right) \delta^2$ – коефіцієнт, що урахує вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

На основі залежностей (10) та (11) знаходимо граничне значення розподіленого навантаження q_{Kc}^* для балки, що пошкоджена тріщиною, довжиною l :

$$q_{Kc}^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta^2}{k_\sigma} \cdot \frac{0,164 K_{IC}}{1,12 \sqrt{\pi l}}. \quad (12)$$

Інваріантність в'язкості руйнування K_{IC} відносно розмірів перерізу балки зберігається тільки за умови забезпечення в околі вістря тріщини стану плоскої деформації [11]:

$$t, l \geq 2,5 (K_{IC} / \sigma_{0,2})^2. \quad (13)$$

Для сталі Ст 45 ($\sigma_{0,2} = 360$ МПа) ці величини мають бути в межах: $t, l \geq 19$ мм. Разом із тим, у нашому випадку, коли товщина стінки профілю перерізу не перевищує 3 мм, можна вважати, що кінець тріщини знаходиться у плоскому напруженому стані і в'язкість руйнування K_{IC} буде у 2,5 рази більшою ($K_{IC}^{\max} \approx 2,5 K_{IC} = 77$ МПа).

Одночасно, поряд із формулою (12), формулу для визначення залишкової міцності q^* для лонжерона без тріщини можна отримати із умови міцності за найбільшими нормальними напруженнями у вигляді:

$$\sigma_x^*(q^*, h) = \sigma_{mc}^p. \quad (14)$$

Таким чином, використавши формулу (11), отримаємо:

$$q_\sigma^* = \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{k_\sigma} 0,164 \sigma_{mc}^p, \quad (15)$$

де $\sigma_{mc}^p = 650$ МПа – граничний опір матеріалу лонжерона за розтягу.

Поклавши у формулах (12) та (15) значення коефіцієнта $k_\sigma = 1$, отримаємо результати класичної теорії балок Бернуллі-Ейлера.

Значення приведеної залишкової міцності q_i^* розраховані для випадку $q_i^* = q_\sigma^*$ та $q_i^* = q_{Kc}^*$, тобто для ізотропного матеріалу – сталь Ст.45, де величина в'язкості руйнування КІН $K_{IC}^{\max} = 77$ МПа. За різних співвідношень L/h довжина тріщини у вертикальній стінці приймалася рівною $l = 0,5$ см.

Проведені розрахунки представлені в таблиці 2. У знаменнику величини q_i^* пораховані за формулою (15) для випадку, коли тріщина відсутня. Для того, щоб одержати результати для тріщини вдвічі більшої, їх необхідно поділити на число $\sqrt{2}$. Відповідно, результати для тріщини вдвічі меншої необхідно помножити на це ж число.

Таблиця 2 – Значення зведеної залишкової міцності q_i^*

$L/2h$	18,75	10	5
k_σ	1,004	1,013	1,057
q_i^* , МПа	$\frac{1,68(1,68)}{1,99(1,99)}$	$\frac{5,84(5,92)}{6,92(7,01)}$	$\frac{22,4(23,7)}{26,5(28,0)}$

Аналіз даних таблиці 1 та таблиці 2 вказує на те, що результати, які отримані за допомогою уточненого методу, що ураховує поперечний зсув і обтиснення, відрізняються від результатів класичної теорії балок Бернуллі-Ейлера (в таблиці 2 – у дужках) пропорційно коефіцієнту k_σ . Тому для великого відношення $L/2h = 18,75$ (балка лонжерона), вони практично співпадають. Тобто, у цьому випадку можна користуватися формулами класичної теорії балок. Із цього аналізу також зрозуміло, що за довжини тріщини $l = 0,5$ см, розрахунок балок без урахування впливу тріщини (знаменник) дає завищені у 1,184 рази (18,4%) результати. Із ростом довжини тріщини вказана різниця буде також значно зростати. Одночасно, зменшення відносної довжини балки, приблизно удвічі, призводить до зростання граничного навантаження у 3–4 рази.

У загальному випадку коефіцієнт n зниження залишкової міцності, за умови появи у балці тріщини, можна записати у вигляді:

$$n = \frac{q_\sigma^*}{q_{K_C}^*} = \frac{1,12\sqrt{\pi l} \cdot \sigma_{мц.}^p}{K_{IC}^{\max}}. \quad (16)$$

Формула (16) корелюється із даними, що представлені в таблиці 2, тобто підтверджується попереднє значення $n = 1,184$ для ізотропного матеріалу. Якщо ж у формулі (16) межу тріщиностійкості K_{IC} записати через критичне напруження $K_{IC} = \sqrt{\pi l} \sigma_{кр.}$, тоді коефіцієнт n зниження граничного навантаження можна записати у спрощеному і більш доступнішому вигляді $n = 1,12 \sigma_{мц.}^p / \sigma_{кр.}$.

Разом із тим, якщо тріщина зросте до довжини $l = 1$ см, то коефіцієнт n зниження залишкової міцності також зросте у $\sqrt{2}$ рази і досягне величини $n = 1,674$. Тобто, зниження залишкової міцності конструкції відбудеться на 67%.

Одночасно, необхідно зауважити, що уточнювальний множник 1,12 знайдений для півплощини із крайовою тріщиною [11] без урахування розмірів балки. Тому, щоб досягнути кращого узагальнення формули (16) для коефіцієнта n , потрібно замість множника 1,12 (у чисельнику)

підставити функцію $Y(l/2h)$, яку ще називають функцією форми та розмірів об'єкту, яка залежить від відносної довжини тріщини, розмірів балки та виду навантаження.

Для деяких навантажень балки із тріщиною, наприклад, у випадку дії зосередженої сили, прикладеної до центрального перерізу балки ($2h/L = 1/8$), ця функція має вигляд [1, 2]:

$$Y(\lambda) = 1,106 - 1,551\lambda + 7,706\lambda^2 - 13,528\lambda^3 + 14,228\lambda^4, \lambda \leq 0,6. \quad (17)$$

Значення $Y(\lambda) = 1,12$ досягається для тріщини, коли $\lambda \approx 1/3$. За інших значень λ вони можуть значно різнитися від числа 1,12. Подібного вигляду функції $Y(\lambda)$ для розподіленого (синусоїдального) навантаження авторам невідомі. Дослідження для інших видів навантажень та об'єктів вимагають ширших як теоретичних, так і експериментальних досліджень.

Одночасно, визначивши коефіцієнт зниження граничного навантаження n і знаючи характеристики тріщиностійкості матеріалу та граничне навантаження для конструкційного елемента, що пошкоджений тріщиною q_{Kc}^* , можна записати $q_{Kc}^* = q_{\sigma}^* / n$.

Висновки

Розроблена методика проведення експертної оцінки залишкової міцності лонжерона автомобіля Mercedes-Benz Sprinter 212D, що має поперечну тріщину у розтягнутій зоні, за дії статичного навантаження.

Знайдені уточнені формули для максимальних напружень та переміщень. Перевірка на міцність конструкції проводилася за методами допустимих напружень та визначення залишкової міцності із умови силового критерію Дж. Ірвіна. Продemonстровано, що розбіжність у величинах залишкової міцності несучої балки лонжерона автомобіля значно збільшується із ростом тріщини. Так, для тріщини довжиною $l = 5$ мм ця розбіжність становить 18,4%, а для тріщини довжиною $l = 10$ мм – зростає до 67,4%.

За допомогою відношення величин граничних навантажень, що визначені за зазначеними методами, у роботі отримана формула для коефіцієнта зниження граничного навантаження n . Аналіз результатів розрахунків показує, що для довжин $L / 2h > 10$ залишкову міцність лонжерона можна визначити використовуючи формули класичної теорії Бернуллі-Ейлера.

Список посилань

1. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. (1990). Под ред. Ю. Мураками. Мир, Москва, 1016.

2. Саврук, М.П. (1981). Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Наукова думка, Киев.
3. Черепанов, Г.П. (1983). Механика разрушения композитных материалов. Наука, Москва, 296.
4. Лозовой, Б.Л., Панасюк, В.В. (1962). Некоторые задачи изгиба полосы с прямолинейной трещиной. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1, 138–143.
5. Божидарнік, В.В., Андрейків, О.Є., Сулим, Г.Т. (2007). Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: монографія (Т. 2). Надтир'я, Луцьк, 410.
6. Шваб'юк, В.І., Ротко, С.В. (2015). Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія. Луцьк, 264.
7. Серенсен, С.В., Зайцев, Г.П. (1982). Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. Наук. думка, Киев, 296.
8. Ориняк, І.В., Бородій, М.В., Красовський, А.Я. (1997). Метод обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщин від вирізів. Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2, 37–48.
9. Кушнір, Р.М., Николишин, М.М., Осадчук, В.А. (2003). Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. Вид-во "СПОЛОМ", Львів, 320.
10. Ротко, С.В., Шваб'юк, В.В. (2003). Визначення граничного навантаження для композитної балки з неглибокою тріщиною. Наукові нотатки, 2, 228–232.
11. Irwin, G.R. (1957). Analyses of stress and strein near the end of a crack transferring loads. J. of Appl. Mech., 24(4), 361–374.
12. Тарнопольский, Ю.М., Розе, А.В. (1969). Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Зинатне, Рига, 276.