

---

УДК 621.39

Ю.Я. Бобало<sup>1</sup>, Р.Л. Політанський<sup>1</sup>, М.М. Климаш<sup>1</sup>, А.Д. Верига<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний університет «Львівська Політехніка», Львів

<sup>2</sup>Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці

## ВПЛИВ КОЕФІЦІЄНТУ ЧАСОВОГО МАСШТАБУВАННЯ СИГНАЛІВ ТИПУ ФРАКТАЛЬНИЙ ГАУСІВ ШУМ НА ЙОГО ЕНЕРГЕТИЧНІ, СТАТИСТИЧНІ ТА КОРЕЛЯЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ

*Робота присвячена вивченню властивостей сигналів типу фрактальний гаусів шум (далі – ФГШ). Авторами досліджені спектральна густина потужності, числові характеристики та автокореляційна функція сигналів типу ФГШ. Встановлено їх залежність від коефіцієнту часового масштабування. Зокрема показано, що збільшення коефіцієнту часового масштабування підсилює вплив параметра Херста на спектральну густина потужності, що узгоджується із результатами, отриманими раніше Мандельбротом.*

**Ключові слова:** ФГШ, показник Херста, коефіцієнт часового масштабування.

### Вступ

Інтерес до вивчення самоподібних (фрактальних) часових рядів обумовлений їх використанням у різних галузях сучасної науки і техніки – економіка, медицина, інформатика, телекомунікаційні системи [1].

Дослідження особливостей використання фрактальних сигналів в телекомунікаційних та інформаційних мережах обґрунтовано можливістю їх використання, зокрема у Всесвітній мережі Інтернет [2], оскільки обсяг даних, що передається є прогнозованою величиною та проявляє властивості самоподіб-

ності. Це уможливило керування потоками даних передбачивши пікові навантаження.

Перспективним напрямком досліджень, що виник порівняно недавно, є використання фрактальних сигналів у системах зв'язку з метою забезпечення прихованості передавання інформації [3,4].

Особливістю фрактальних сигналів є їх широкосмуговість, внаслідок чого їх використання у телекомунікаційних системах забезпечує можливість передавання інформації в умовах багатопроменевого поширення сигналів та дії значних завад [5].

Кількість наукових праць, присвячених даній тематиці є незначною, що обумовлено складністю їх генерування, але підвищення швидкодії мікропроцесорної техніки уможливило вирішення зазначеної проблеми [6].

На сьогоднішній день відомі методи передавання інформації з використанням сигналів типу «фрактальний вейвлет» [6], фрактального гаусового шуму [3, 7] та метод, що базується на використанні широкосмугових генераторів хаотичних коливань, математичною моделлю яких є система Реслера [8].

Практична реалізація методу з використанням синхронізації генераторів хаотичних коливань є надто складною внаслідок жорстких вимог до розкиду електричних значень параметрів елементної бази приймальної та передавальної сторін систем зв'язку [9].

Системи, описані в роботах [6 – 8] забезпечують безпомилкове декодування переданої інформації при відношенні сигнал/шум у каналах зв'язку на рівні мінус 10 дБ.

Система передавання інформації, що базується на методі кластерного коду з використанням фрактального гаусового шуму [7] має переваги у порів-

нянні з системою, що використовує сигнали типу «фрактальний вейвлет» [6], оскільки розпізнавання інформації при заданому рівні шумів досягається при 500 відліках носійного сигналу у порівнянні з 2500 відліками для носійного сигналу типу «фрактальний вейвлет», що ускладнює процес їх генерування, передавання та оброблення.

Наближена математична модель фрактального гаусового шуму, що використовувалась в роботах [3, 7] має наступний вигляд [10]:

$$S(t, H, n) \approx \frac{n^{-1/2}}{\Gamma(H+1/2)} \times \left[ \sum_{i=0}^{n(t+1)-1} \left( t+1 - \frac{i}{n} \right)^{H-1/2} \cdot \xi_i - \sum_{i=0}^{n \cdot t-1} \left( t - \frac{i}{n} \right)^{H-1/2} \cdot \xi_i \right], \quad (1)$$

де  $\Gamma(x)$  – гамма-функція;  $H$  – показник Херста;  $n$  – коефіцієнт масштабування у часі;  $t$  – момент часу, у який визначається значення відліку ФГШ (ціле число, більше 0);  $i$  – набір цілих чисел, що індексує доданки сум  $i$  позначає моменти часу, що передують моменту  $t$ ;  $\{\xi_i\}$  – скінченний набір випадкових чисел розподілених за гаусовим законом з одиничною дисперсією та нульовим математичним сподіванням,  $n$  – коефіцієнт часового масштабування, що є цілим числом, найменше значення якого дорівнює 1;  $S$  – значення відліку ФГШ.

Очевидно, що складність генерування фрактальних сигналів типу ФГШ та їх властивості залежать від значень коефіцієнту масштабування у часі (рис. 1).

**Метою даної роботи** є дослідження залежності спектральних, статистичних та кореляційних властивостей ФГШ від коефіцієнту часового масштабування.

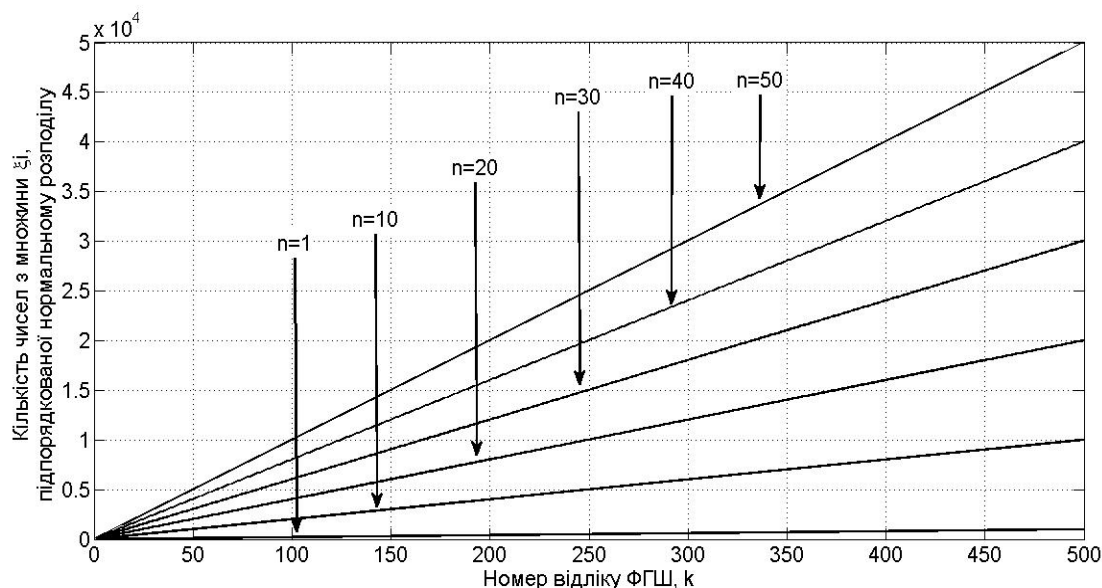


Рис. 1. Залежність кількості чисел з множини  $\xi_i$ , необхідної для генерування ФГШ від кількості його відліків при різних значеннях коефіцієнту часового масштабування

## Енергетичні характеристики сигналів типу ФГШ

Дослідження впливу коефіцієнту часового масштабування на властивості ФГШ здійснювалося для сигналів, формованих 500 відліками. Така кількість відліків носійних сигналів типу ФГШ є достатньою для забезпечення розпізнавання інформацій-

них сигналів при співвідношенні сигнал/шум рівних мінус 10 дБ. Моделювання властивостей ФГШ та необхідні математичні розрахунки здійснювалися у програмному середовищі MATLAB.

Часові діаграми сигналів з показниками Херста 0.1, 0.5 та 0.9 при значеннях коефіцієнту часового масштабування приведені на рис. 2.

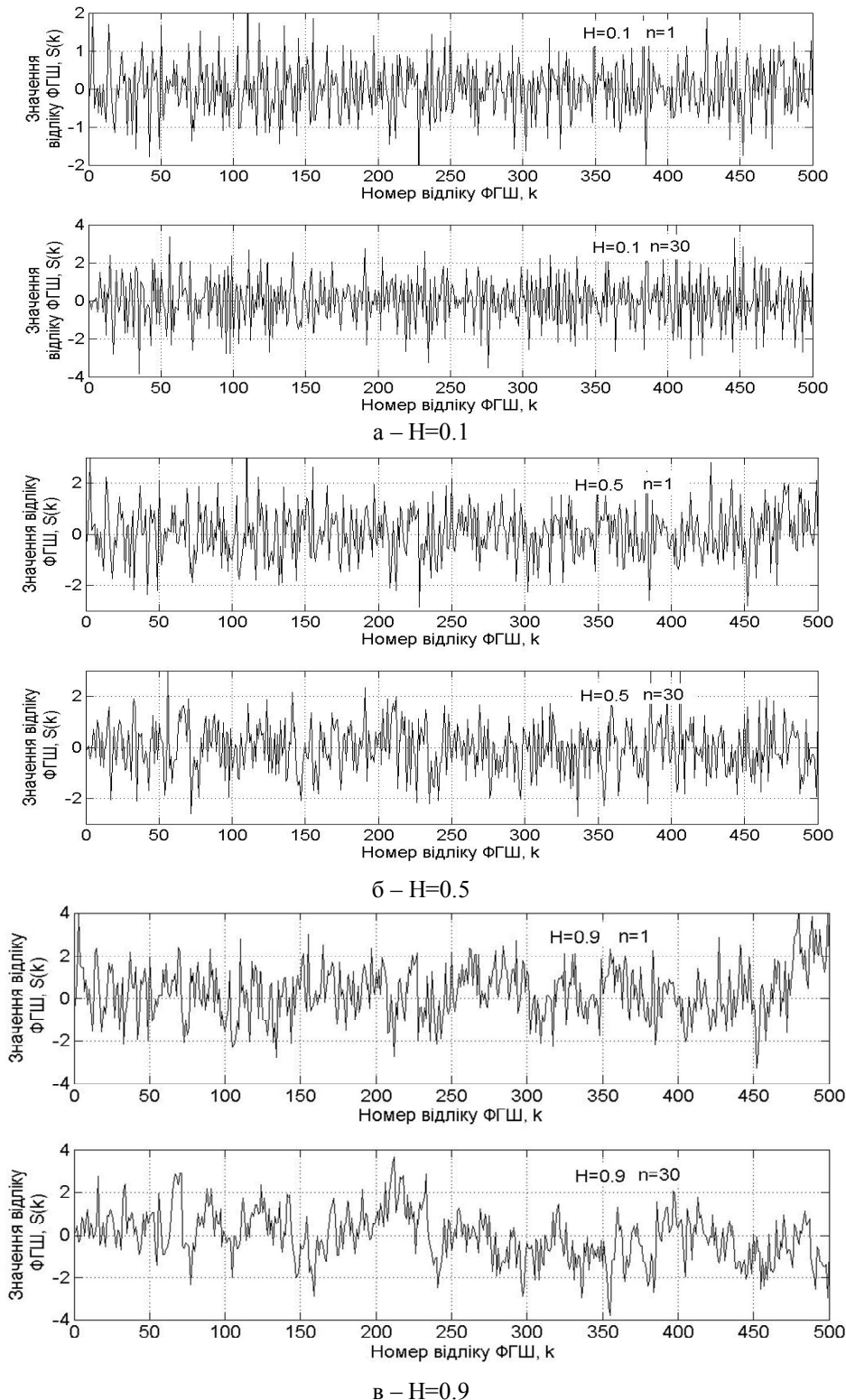


Рис. 2. Часові діаграми сигналів ФГШ при значеннях коефіцієнтів часового масштабування:  $n=1$ ,  $n=30$  з показниками Херста  $H=0.1$ ,  $H=0.5$ ,  $H=0.9$  – а, б, в відповідно

З отриманих діаграм можна зробити висновок, що генеровані сигнали є шумоподібними.

Спектральна густина потужності дискретного ФГШ розраховувалась шляхом усереднення по вибірках квадрату модуля дискретного перетворення Фур'є за формулою [7]:

$$W(w) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot m + 1} \cdot \left| \sum_{k=-m}^m S(k) \cdot e^{-j \cdot w \cdot k \cdot T} \right|^2, \quad (2)$$

де  $S(k)$  –  $k$ -ий відлік сигналу типу ФГШ;

$T$  – період дискретизації.

У нашому випадку для сигналу типу ФГШ, формованого 500 відліками, спектральна густина потужності дорівнюватиме:

$$W(w) = \frac{1}{1001} \cdot \left| \sum_{k=0}^{500} S(k) \cdot e^{-j \cdot w \cdot k \cdot T} \right|^2, \quad (3)$$

де  $T$  – значення часового інтервалу між відліками ФГШ/

Результати досліджень енергетичних властивостей сигналів типу ФГШ з різними показниками Херста приведені на рис. 3 та 4.

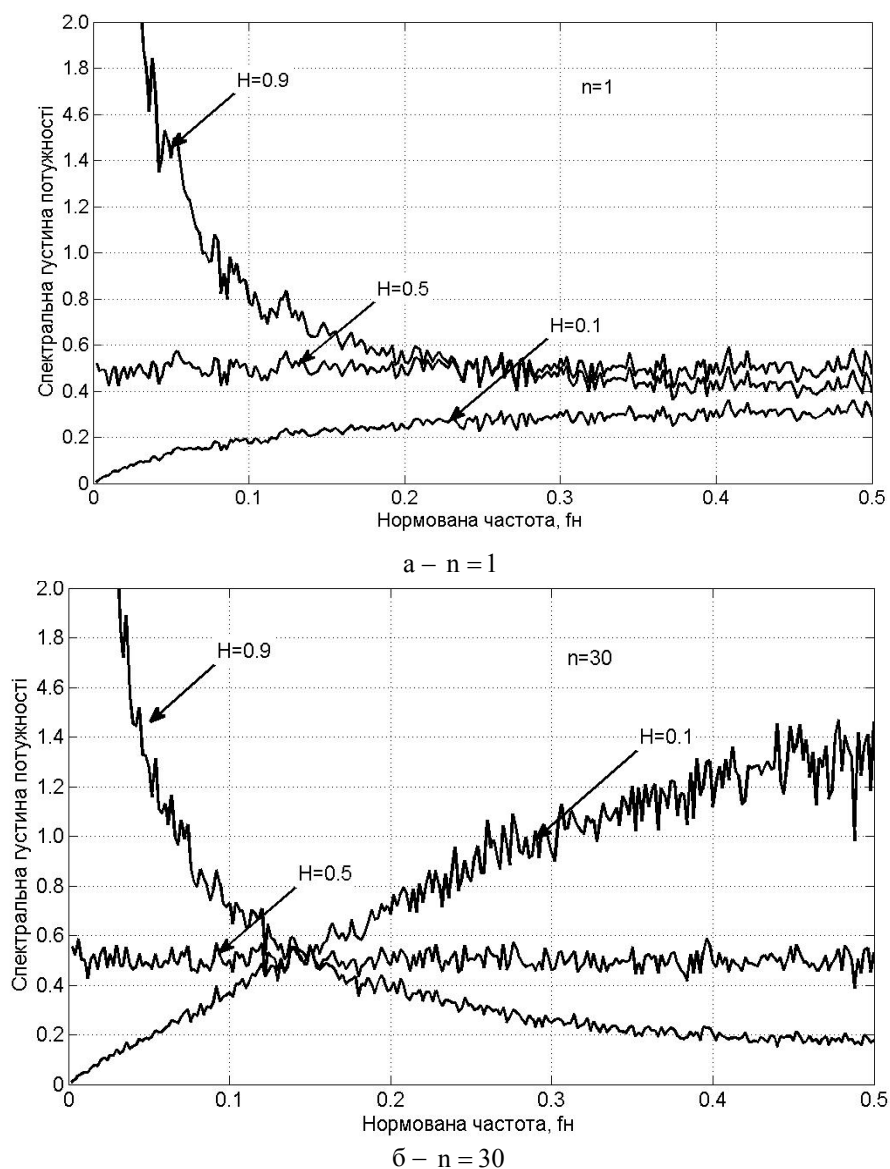


Рис. 3. Залежність спектральної густини потужності ФГШ з показниками Херста 0,1; 0,5; 0,9 від нормованої частоти при значеннях коефіцієнтів часового масштабування 1 і 30 – а і б відповідно

Із отриманих результатів моделювання випливає, що спектральна густина потужності сигналу ФГШ з показником Херста  $H=0.5$  є ідентичною зі спектром білого гаусового шуму у всьому діапазоні нормованих частот.

При зазначених значеннях коефіцієнта часового масштабування для сигналів ФГШ з показником Херста

та  $H = 0.9$  має місце домінуючий вплив низькочастотних складових, для сигналів ФГШ з показником Херста  $H=0.1$  спостерігається слабка залежність спектральної густини потужності при  $n=1$ , а при  $n=30$  має місце лінійна залежність спектральної густини потужності сигналу від частоти. Отримані результати стосовно характеру залежності спектральної густини

потужності для різних значень показника Херста корелюють із результатами приведеними в [10, 11].

На рис. 4 приведені графіки залежності спектральної густини потужності для 4 фіксованих значень нормованої частоти:

$$f_H = 0.1, f_H = 0.2; f_H = 0.3; f_H = 0.4$$

від коефіцієнту часового масштабування/

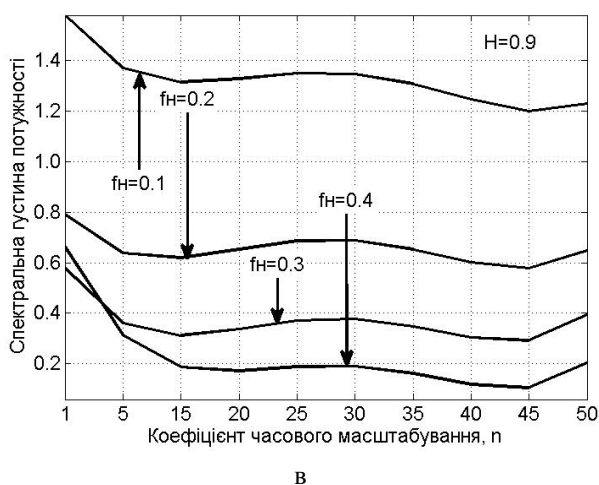
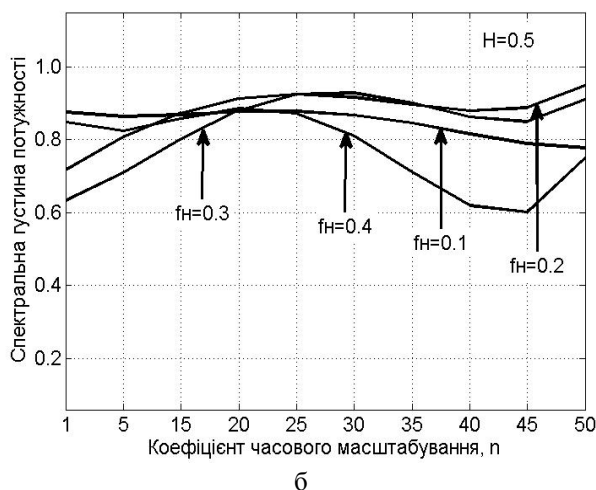
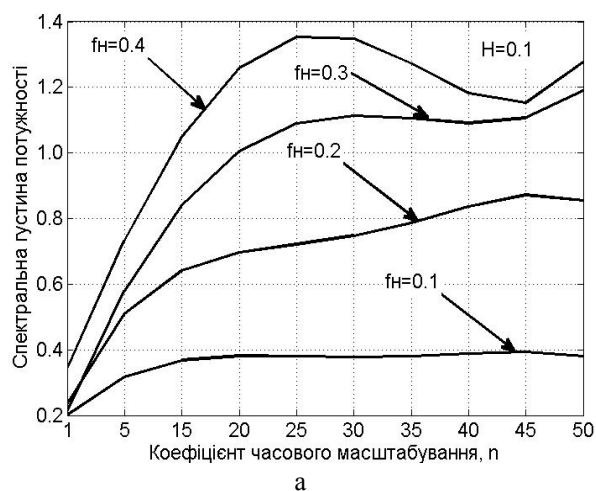


Рис. 4 Залежність спектральної густини потужності від коефіцієнту часового масштабування (а – ФГШ з  $N=0.1$ ; б – ФГШ з  $N=0.5$ ; в – ФГШ з  $N=0.9$ )

На основі графіків рис. 4 можна зробити висновки про те, що збільшення коефіцієнту часового масштабування підсилює характерну залежність спектральної густини потужності від ФГШ: спостерігається збільшення високочастотної складової для ФГШ із показником Херста  $N=0.1$ , та зменшення для ФГШ із показником Херста  $N=0.9$ , для ФГШ із показником Херста  $N=0.5$  такого впливу не виявлено. Те ж саме підтверджують дані, що приведені на графіках рис. 3.

### Числові та кореляційні характеристики сигналів типу ФГШ

Результати досліджень числових характеристик сигналів типу ФГШ з показниками Херста  $N=0.1$ ;  $0.5$ ;  $0.9$  при різних значеннях коефіцієнта часового масштабування приведені на рис. 5.

Із отриманих результатів випливає, що розподіли густини ймовірності сигналів типу ФГШ є гаусовими з нулевим математичним сподіванням. Для сигналів з показником Херста  $N=0.1$  характерне збільшення їх дисперсії з ростом коефіцієнта часового масштабування, а для сигналів типу ФГШ з  $N=0.9$  значення дисперсії зменшується зі збільшенням коефіцієнту часового масштабування.

На рис. 6 приведені залежності автокореляції сигналів типу ФГШ з показником Херста  $N=0.1$ ;  $N=0.5$ ;  $N=0.9$  від часового зсуву при значеннях коефіцієнта часового масштабування  $n=1$ ;  $30$ . Для сигналів з показником Херста  $N=0.1$ ;  $0.5$  спостерігається незначна кореляції сигналу з його копіями при часовому зсуві в межах  $[-500; 0) \cup (0; 500]$  сигнали з показником Херста  $N=0.9$  є корельованими у зазначеному діапазоні часового зсуву.

### Висновки

1. Сигнали типу ФГШ з різними показниками Херста є хаотичними з гаусовим розподілом густини ймовірності та нулевим математичним сподіванням. Дисперсія сигналів з показником Херста  $N=0.1$  зростає, а для сигналів з  $N=0.9$  зменшується зі збільшенням значення коефіцієнту часового масштабування, значення дисперсії сигналів з  $N=0.5$  не залежать від коефіцієнту часового масштабування.

2. Встановлено, що коефіцієнт часового масштабування впливає на спектральну густину потужності сигналів з  $N=0.1$  та  $0.9$ . Для сигналів з  $N=0.9$  низькочастотна складова є домінуючою. Для сигналів з  $N=0.1$  збільшення коефіцієнту часового масштабування призведе до лінійного зростання спектральної густини потужності з частотою.

3. Для сигналів типу ФГШ з показником Херста  $N=0.1$ ;  $0.5$  має місце слабка кореляція сигналів з їх копіями в діапазоні часового зсуву  $[-500; 0]$  та  $[0; 500]$ . Для сигналів з  $N=0.9$  спостерігається їх кореляція з копіями у вище вказаних діапазонах.

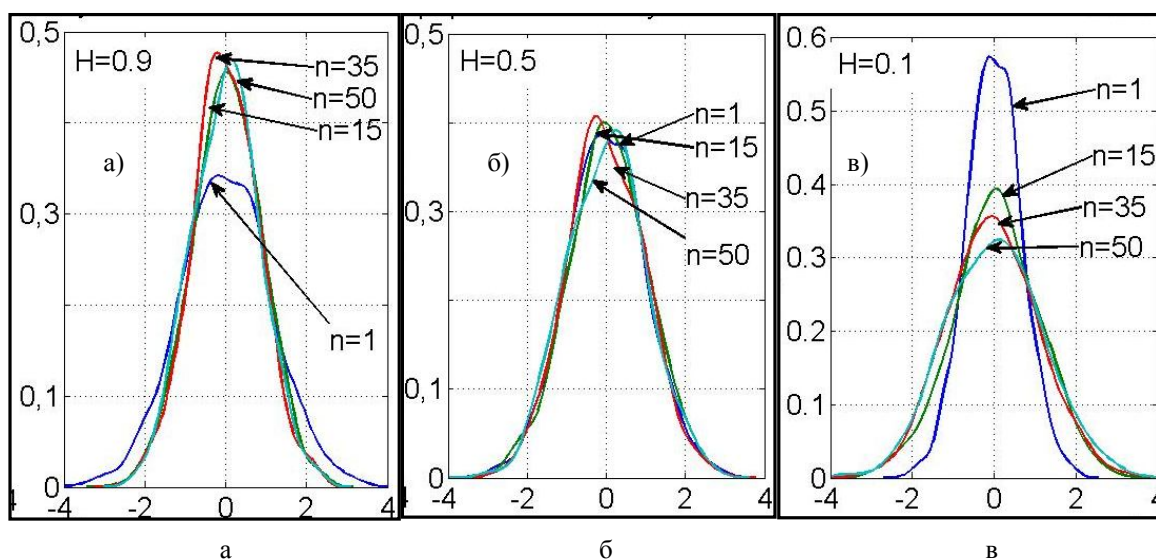


Рис. 5. Функція густини ймовірності сигналу типу ФГШ з показниками Херста  $H=0.1$ ;  $H=0.5$ ;  $H=0.9$  при різних значеннях коефіцієнта часового масштабування – а, б, в відповідно

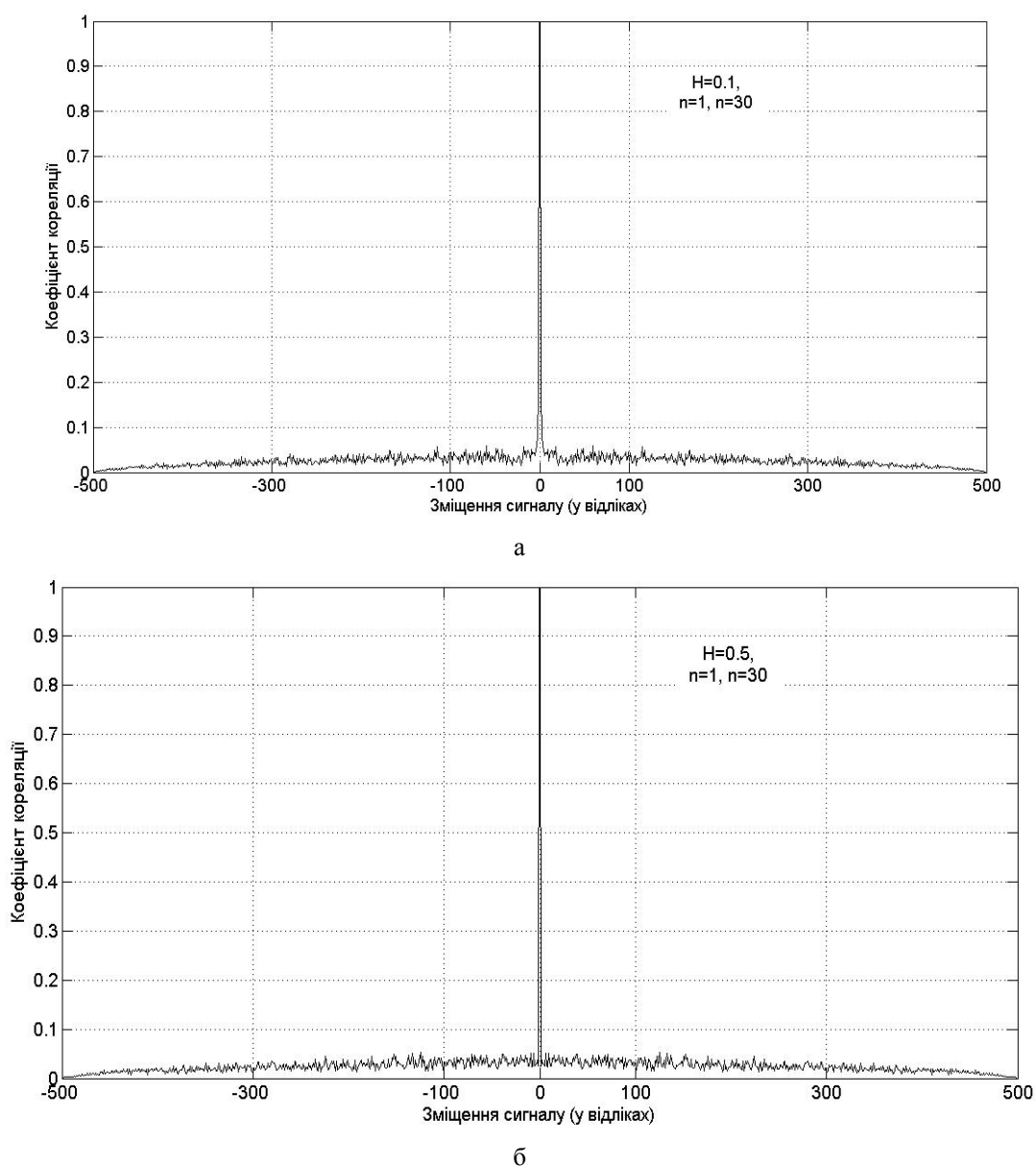


Рис. 6. Автокореляційні функції ФГШ

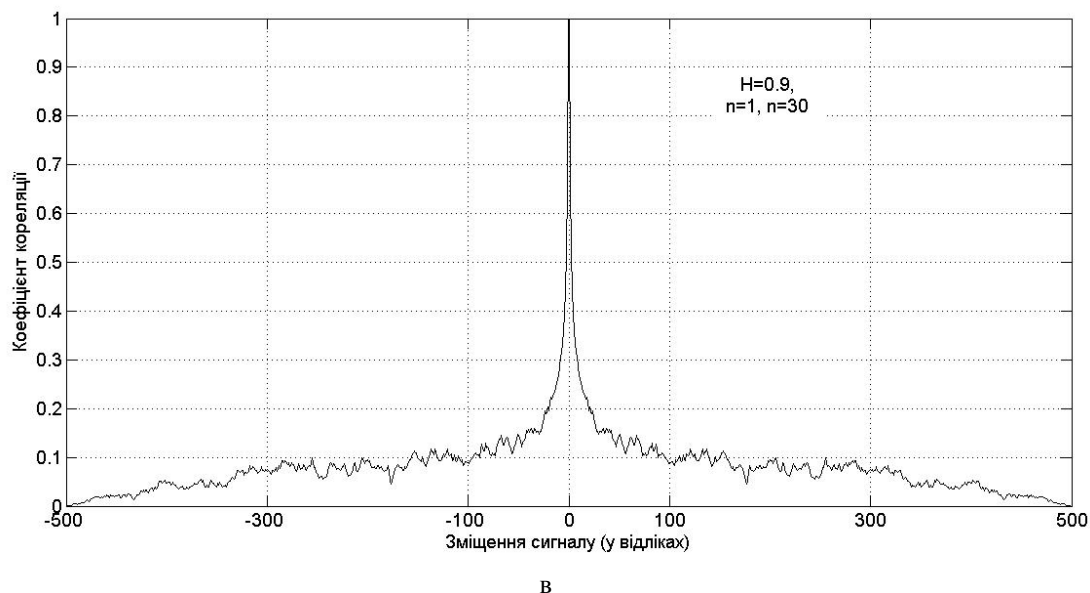


Рис. 6. Автокореляційні функції ФГШ (закінчення)

### Список літератури

1. Старченко, Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н.В. Старченко. – М., 2005. – 409 с.
2. Фомин, В.В. Статистический анализ ip и voip трафика / В.В. Фомин // Информационные технологии. Технологии компьютерных систем и сетей. – 2009. – Том 7, № 1. – С. 40-44.
3. Васюта, К.С. Метод передачи информации, основанный на манипуляции показателя херста фрактального ("цветного") гауссовского шума. / К.С. Васюта // Системи обробки інформації – 2010. – Випуск 6 (87). – С. 62-65.
4. Васюта, К.С. Особенности построения стеганографических систем радиосвязи / К.С. Васюта, С.В. Озеров, А.Н. Королук // Проблемы телекоммуникаций. – 2012 – № 3 (8) – С. 94-104.
5. Романов, Б.Н. Теория электрической связи. Сообщения, сигналы, помехи, их математические модели: учебное пособие / Б. Н. Романов, С.В. Краснов; Ульяновский ГТУ – У.: Университет, 2008. – 126 с.
6. Bolotov, V.N. Fractal Communication System / V.N. Bolotov, S.E. Kolesnikov, Yu.V. Tkach, Ya.Yu Tkach,

P.V. Khupchenko // Electromagnetic Phenomena – 2007. – V.7, №1 (18). – P. 174-179.

7. Климаш, М.М. Метод кластерного кодирования / М.М. Климаш, Р.Л. Політанський // Восточно-Европейский журнал передовых технологий – 2012 – № 5/3 (59). – С. 50 – 54.

8. Moskalenko, O. I. Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise / O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov // Physics Letters A – № 374 – 2010 – P. 2925-2931.

9. Иволга, Л. Г. Прецизионный генератор хаоса в инвариантных системах зв'язку / Л. Г. Иволга, Л. Ф. Політанський, Р. Л. Політанський // Проблеми телекомунікацій. – № 1(3) – 2011 – С. 106-116.

10. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 261 с.

11. Mandelbrot B.B., Wallis J. R. (1969), Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part I, Averages and variances. Water Resour. Res., 5, 228-241.

Надійшла до редколегії 5.08.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.С. Андрушак, Національний університет "Львівська політехніка", Львів.

### ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВРЕМЕННОГО МАСШТАБИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ ТИПА ФРАКТАЛЬНЫЙ ГАУССОВЫЙ ШУМ НА ЕГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Ю.Я. Бобало, Р.Л. Политанский, М.М. Климаш, А.Д. Верига

Статья посвящена изучению свойств сигналов типа фрактальный гауссовый шум (далее – ФГШ). Авторы исследовали спектральную плотность мощности, числовые характеристики и автокорреляционную функцию сигналов типа ФГШ. Найдена их зависимость от коэффициента временного масштабирования. В частности показано, что увеличение коэффициента временного масштабирования усиливает влияние параметра Херста на спектральную плотность мощности, что согласуется с результатами, полученными Мандельбротом.

**Ключевые слова:** ФГШ, показатель Херста, коэффициент временного масштабирования.

### THE INFLUENCE OF TEMPORAL SCALING FACTOR SIGNALS SUCH AS FRACTAL GAUSSIAN NOISE ON ITS ENERGY, STATISTICAL AND CORRELATION PROPERTIES

Y.J. Bobalo, R.L. Politanskiy, M.M. Klymash, A.D. Veriga

The paper studies the properties of signals such as fractal Gaussian noise (hereinafter - FGSH). The authors investigated the power spectral density, number and characteristics of the autocorrelation function of the signal-type FGSH. Found their dependence on the time scale factor. In particular, we show that an increase in the time scaling factor increases the effect of the parameter Hurst on the power spectral density, which is consistent with the results obtained by Mandelbrot.

**Key words:** FGSH, parameter Hurst, time scaling factor.